Játékelméleti modellek

Játékelméleti alapok

Véges játékok: Véges sok, n darab játékos van, mindenkinek véges sok lehetséges stratégiája, az i játékos stratégiái $s_{i1}, \ldots, s_{ik_i}$. Minden i játékosra adott egy nyereségfüggvény, amely a lehetséges stratégia n-esek halmazán van értelmezve. Az i játékosra $N_i(s_{1j_1}, \ldots, s_{nj_n})$ megadja mekkora i nyeresége, amennyiben az l játékos az s_{lj_l} stratégiát választja.

Mátrixjátékok: A mátrixjátékok a kétszemélyes zérusösszegű játékok. Amennyit az A játékos nyer a B játékos elveszíti. A játékot megadja az N nyereségmátrix, a sorok A stratégiái, az oszlopok B stratégiái. Az N_{ij} mező A nyeresége, ha az i és j stratégiákat választják.

Tiszta stratégia: Az eddigiekben tiszta stratégiákról volt szó. A játékos a lehetséges stratégiái közül választ egyet.

Mixelt stratégia: A játékos nem egy stratégiát választ, hanem egy P_i valószínűségi eloszlást definiál a stratégiái halmazán. Ekkor p_{ij_i} annak a valószínűsége, hogy a játékos az s_{ij_i} stratégiát választja. Ezért a nyereség egy valószínűségi változó lesz.

Nash Egyensúly: Mixelt stratégiák egy $P_1, \ldots, P_n$ halmaza Nash egyensúlyi helyzetet alkot, ha egyik játékos sem növelheti várható nyereségét a mixelt stratégiájának megváltoztatásával, ha a többiek nem változtatnak. Azaz formálisan, ha minden i-re teljesül, hogy bármilyen P_i' stratégiára is vált át az i játékos

$$E(N_i(P_1, \ldots, P_i', \ldots, P_n)) \leq E(N_i(P_1, \ldots, P'_i, \ldots, P_n))$$

teljesül.

Prisoner dillema (példa): A koordinálatlanság hiányának problémáját mutatja ez a példa.

Adott két gyanúsított. Ha mindketten vallanak, mindketten 5 év börtönt kapnak, ha csak az egyik vall, akkor ő 2 év börtönt kap, a társa 6 évet, ha mindketten tagadnak 4 évet kapnak mindketten. Ekkor mindkét játékosnak a tiszta Nash stratégiája, hogy vall. (Hiszen akár tagad, akár vall a másik, a tekintett játékos büntetése kisebb ha ő vall.) Következésképp a Nash egyensúlyban mindketten 5 évet kapnak. A koordinált optimumban a mindketten tagadnak, és 4 évet kapnak.

A forgalom játékelméleti modellje

A modell

- Adott m link A és B között, minden linkhez hozzá van rendelve az s_j átviteli sebessége.
- Adott n felhasználó, mindegyikhez hozzá van rendelve a w_i érték, ami az átküldeni kívánt csomag nagysága.
- Tiszta stratégiák: minden felhasználó kiválaszthatja melyik linket használja, $x_{ij} = 1$, ha a j-edik linkre küldi a csomagot, 0 egyébként.
- Tiszta stratégiák mellett egy j link költsége, a teljes odarendelt adatmennyiség osztva a sebességgel

$$C_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i x_{ij}}{s_j}.$$

- A szociális optimum: Az elérhető legkisebb maximális költség, azaz $opt = \min \max_j C_j$, ahol a minimumot a lehetséges tiszta stratégia n-esek halmazán vesszük.
- Mixelt stratégiák: minden felhasználó megad egy P_i valószínűségi eloszlást a linkeken, p_{ij} annak a valószínűsége, hogy a j-edik linket választja (azaz x_{ij} egy valószínűségi változó, amely p_{ij} valószínűséggel lesz 1).
- Mixelt stratégiák mellett egy j link költsége egy valószínűségi változó, várható értéke a teljes odarendelt adatmennyiség várható értéke osztva a sebességgel

$$E(C_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i p_{ij}}{s_j}.$$

- Egy felhasználó várható költsége, ha az adatait a j linken küldi keresztül

$$c_{ij} = \frac{w_i + \sum_{k \neq i} w_k p_{kj}}{s_j}.$$

- Nash egyensúlynak hívjuk a mixelt stratégiák egy olyan halmazát, ahol egyik felhasználó sem tudja csökkenteni a várható költséget, ha valamely pozitív valószínűséggel rendelkező link helyett egy másik linkre küldi a csomagot. (Formálisan ha $p_{ij} > 0$, akkor minden k linkre $c_{ij} \leq c_{ik}$.)

- Egy X Nash egyensúlyi helyzet költsége a maximális költség várható értéke, azaz $C(X) = E(\max_j C_j)$.

Megjegyzés: Valószínűségi változókra az $E(\max_j C_j)$ érték sokkal nagyobb lehet, mint a $\max_j E(C_j)$ érték. (Például, ha minden C_j kis valószínűséggel vesz fel nagyon nagy értéket, és nagy valószínűséggel kicsit.)

-**Koordinációs hányados:** Ez a hányados a koordinálatlanság árát méri, a Nash egyensúlyi helyzetek költségének és a szociális optimum hányadosára ad egy legrosszabb eset korlátot.

$$R = \max_{X \ Nash \ helyzet} \frac{C(X)}{opt}$$

Példa: Legyen két link és két felhasználó, továbbá $s_1 = s_2 = w_1 = w_2 = 1$. Ekkor az optimális tiszta stratégiapáros $x_{11} = 1, x_{22} = 1$, és $opt = 1$. Másrészt $p_{11} = p_{12} = p_{21} = p_{22} = 1/2$ is egy Nash egyensúly, és erre az egyensúlyra $C = 3/2$. Tehát erre a hálózatra $R \geq 3/2$.

Tétel [1]: Az m párhuzamos linkből álló hálózat esetén a koordinációs hányadosra

$$R = O(\frac{\log m}{\log \log \log m}).$$

Biz: Nem része az anyagnak.

Az alábbi egyszerűbb állítást igazoljuk. A bizonyítás alapötlete ugyanaz, mint az általános esetben.

Tétel [1], [2]: Amennyiben az m párhuzamos linkből álló hálózat esetén a koordinációs hányados definíciójában a maximumot csak a tiszta stratégiákból álló Nash egyensúlyi helyzeteken vesszük, akkor $R = O(\frac{\log m}{\log \log m})$.

Biz: Vegyünk egy tetszőleges, tiszta Nash egyensúlyi helyzetet! Feltesszük, hogy $opt = 1$, és r a maximális költség, amely egész. A tétel állításához igazolni kell, hogy $r = O(\frac{\log m}{\log \log m})$. Továbbá tegyük fel, hogy $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_m$.

Definiáljuk minden $0 \leq k \leq r-1$ esetén a G_k halmazát a linkeknek következőképpen. G_k a linkeknek az a maximális hosszú prefixe, amelyben minden linknek a költsége legalább k. (Formálisan G_k az $1, \ldots, q$ linkeket tartalmazza, ahol q a maximális olyan index, hogy $C_j \geq k$ minden $1 \leq j \leq q$ értékre.)

1. Lemma $|G_{r-1}| \geq 1$.

Biz: Ez az állítás azt jelenti, hogy az első linken a költség legalább $r-1$. Tegyük fel, hogy nem igaz. Legyen i egy olyan felhasználó, amelynek a költsége maximális (azaz, ahol a költség r). Mivel a szociális optimum 1, és s_1 maximális ezért $w_i \leq s_1$. Másrészt ez azt jelenti, hogy ha i a jelenlegi link helyett az 1 linket választja a költsége kisebb lesz mint

$$r - 1 + \frac{w_i}{s_1} \leq r - 1 + 1 = r.$$

Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy Nash egyensúlyi helyzetből indultunk ki, azaz a lemmát igazoltuk.

2. Lemma Minden $0 \leq k \leq r-2$ értékre $|G_k| \geq (k+1)|G_{k+1}|$.

Biz: Legyen q az első olyan link, amely már nincs benne a G_k halmazban.

Ekkor minden i-re, amely G_{k+1}-beli linket választott teljesül, hogy $w_i \geq s_q$, hiszen ellenkező esetben az 1 Lemma bizonyításához teljesen hasonlóan a felhasználó q-t választaná a jelenlegi linkje helyett, és a költsége kisebb lenne, mint $k+1$, ami ellentmond a Nash egyensúlyi helyzetnek.

Másrészt ez azt jelenti, hogy az optimális kiosztásban az összes felhasználó, aki jelenleg G_{k+1}-beli linket választott, G_k-beli linkhez van rendelve, hiszen q-n és a nagyobb indexű linkeken a költség nagyobb lenne, mint 1, ami ellentmond az $opt = 1$ feltételnek. Legyen ezen felhasználók halmaza T.

Ekkor $\sum_{i \in T} w_i \geq \sum_{j \in G_{k+1}} (k+1) s_j$, mivel a G_{k+1} halmazban minden linken legalább $k+1$ a költség. Másrészt $\sum_{i \in T} w_i \leq \sum_{j \in G_k} s_j$, mivel az optimális megoldásban a T halmaz elemeit a G_k halmaz linkjeihez rendeljük hozzá, legfeljebb $opt = 1$ költséggel. Tehát $\sum_{j \in G_k} s_j \geq \sum_{j \in G_{k+1}} (k+1) s_j$, amiből $s_1 \geq s_2 \geq \ldots s_m$ alapján adódik a lemma állítása.

Az 1. lemmát követően a 2. lemmát többször használva azt kapjuk, hogy $m = |G_0| \geq (r-1)!$. Használva a Γ függvényt adódik, hogy $r \leq \Gamma^{-1}(m) = O(\frac{\log m}{\log \log m})$. (Ezen részhez a Γ függvény ismerete szükséges, ezért a részleteket elhagyjuk.)

IRODALOM

[1] A. Czumaj and B. Vöcking. Tight Bounds for Worst-Case Equilibria. In Proc. of 13th SODA (San Francisco, 2002); pp. 413-420, (a fogalmak és az általános tétel bizonyítása)

http://ls2-www.cs.uni-dortmund.de/˜voecking/papers/SODA02.ps

[2] B Vöcking, The price of shelfish routing, előadás vázlat, az egyszerűsített tétel bizonyításának vázlata, ábrák.

http://ls2-www.cs.uni-dortmund.de/˜voecking/selfish.ps