7. Gyakorlat

P1 Tekintsük a következő shop problémát három gépen, a műveletek mögött, azt adjuk meg hanyadik gépen kell végrehajtani őket, illetve azt, hogy mennyi ideig tart.

$M_1 = O_{11}(1,3), O_{12}(3,4), O_{13}(2,3),$
$M_2 = O_{21}(2,1), O_{22}(3,4)$
$M_3 = O_{31}(2,1), O_{32}(1,5)$

Tudjuk, hogy az azonos gépekre vonatkozó műveletek között teljesülnie kell az $O_{11} \to O_{13}$ és $O_{31} \to O_{32}$ precedencia relációknak. Adjuk meg a feladathoz tartozó diszjunktív gráfot!

Megold: Minden művelethez tartozik egy pont, továbbá van egy O forrás és egy $*$ nyelő. A műveletekhez tartozó pontok súlyai a művelet végrehajtási idejei. Konjuktív élek mennek az O_{11} pontból az O_{13} pontba továbbá az O_{31} pontból az O_{32} pontba. A többi konjuktív él: az O pontból minden pontba megy él kivéve az O_{13}, O_{32}, $*$ pontokat, továbbá az $*$ pontba minden pontból megy él kivéve az O_{11}, O_{31}, O pontokat. Az irányítatlan diszjunktív élek két csoportba oszthatóak az azonos munkához tartozó műveletek közötti élek: (O_{11}, O_{12}), (O_{12}, O_{13}), (O_{21}, O_{22}). Az azonos géphez tartozó műveletek közötti diszjunktív élek: (O_{11}, O_{32}), (O_{13}, O_{21}), (O_{21}, O_{31}), (O_{13}, O_{31}), (O_{12}, O_{22}).

P2 Adjuk a diszjunktív éleknek a fenti feladatban minden esetben azt az irányítást, amely sorrendben a pontok az élben szerepelnek. Határozzuk meg az ütemezést, amit leír az így kapott gráf.

Megold: O_{11}-be a gráfban a leghosszabb út hossza 0, így az első gépen a $(0,3)$ időintervallumban ütemezzük. O_{12}-be a gráfban a leghosszabb út hossza 3, így a neki megfelelő harmadik gépen a $(3,7)$ időintervallumban ütemezzük. O_{13}-ba a gráfban a leghosszabb út hossza 7, így a neki megfelelő második gépen a $(7,10)$ időintervallumban ütemezzük. O_{21}-be a gráfban a leghosszabb út hossza 10, így a neki megfelelő második gépen a $(10,11)$ időintervallumban ütemezzük. O_{22}-be a gráfban a leghosszabb út hossza 11, így a neki megfelelő harmadik gépen a $(11,15)$ időintervallumban ütemezzük. O_{31}-be a gráfban a leghosszabb út hossza 11, így a neki megfelelő második gépen a $(11,12)$ időintervallumban ütemezzük. Végül O_{32}-be a gráfban a leghosszabb út hossza 12, így a neki megfelelő első gépen a $(12,17)$ időintervallumban ütemezzük.

P3 Vegyük a következő open shop feladatot két gépen. Minden munka két műveletből áll, amelyekből az elsőt az első gépen a másodikat a második gépen kell végrehajtani. A munkákat a műveletek végrehajtási idejeivel adjuk meg. Az input $J_1 = (2,2)$, $J_2 = (3,2)$, $J_3 = (4,5)$, $J_4 = (3,6)$, $J_5 = (4,3)$, $J_6 = (5,3)$. Adjuk meg az optimális ütemezést.

Megold Az optimális megoldást adó algoritmusban az I halmaz (ahol az első művelet nem hosszabb) a J_1, J_3, J_4 munkákat tartalmazza és $J = \{J_2, J_5, J_6\}$. Az a munka, ahol a rövidebb művelet végrehajtási ideje maximális a J_3. Következésképpen az optimális ütemezésben

- az első gépen a sorrend $J_1, J_4, J_2, J_5, J_6, J_3$

- az második gépen a sorrend $J_3, J_1, J_4, J_2, J_5, J_6$
- J_3 esetén a második műveletet hajtjuk végre először, a többieknél az elsőt.

Az ütemezés az első gépen: J_1 a (0,2), J_4 a (2,5), J_2 az (5,8), J_5 a (8,12), J_6 a (12,17) és J_3 a (17,21) időintervallumokban hajtódik végre.

Az ütemezés a második gépen: J_3 a (0,5), J_1 az (5,7), J_4 a (7,13), J_2 a (13,15), J_5 a (15,18), J_6 a (18,21) időintervallumokban hajtódik végre.

P4 Tekintsünk egy olyan ütemezési feladatot, amelyben két gépünk van, M_1 és M_2, továbbá 6 munkát kell végrehajtani, a J_i, $(i = 1, \ldots 6)$ munkákat. A munkák mindegyike két műveletből áll, melyek közül az elsőt M_1-en, a másodikat M_2-n kell végrehajtani. A munkákat és műveleteiket, valamint a műveletek végrehajtási idejeit adja meg az alábbi táblázat:

Munkák	Műveletek	Végrehajtási idők
J_1	O_{11}, O_{12}	3,5
J_2	O_{21}, O_{22}	4,1
J_3	O_{31}, O_{32}	3,4
J_4	O_{41}, O_{42}	2,2
J_5	O_{51}, O_{52}	1,3
J_6	O_{61}, O_{62}	1,2

Adjuk meg a fenti permutációs flow shop ütemezési probléma optimális megoldását, a Johnson algoritmus alapján.

Megold: Első lépésként beállítjuk a k és l értékeket. A $k := 1$ értékadás a 6-elemű lista elejére berakandó elem pozicióját, amíg az $l := 6$ értékadás a lista végére helyezendő elem helyzetét adja meg.

Képezve a végrehajtási idők minimumát az 1 értéket kapjuk, amely a 2 indexet határozza meg. Mivel $p_{22} = 1$, ezért a 4. lépésben a J_2 munka kerül a lista utolsó helyére, az l értéke 5-re változik, majd rátérünk ismét a 2. lépésre. A maradék munkák végrehajtási idejeinek minimuma ismét 1, ami most az 5 indexet határozza meg. Mivel $p_{51} = 1$, ezért J_5 kerül a lista első helyére és k értéke 2-re változik. A maradék munkákra a végrehajtási idők minimuma 1, ami most egyértelműen meghatározza a 6 indexet. Mivel $p_{61} = 1$, ezért J_6 kerül a lista második helyére, és k a 3 értéket veszi fel. A maradék munkákra a minimum 2, amely a 4 indexet határozza meg egyértelműen, és J_4 lesz a lista harmadik eleme, k pedig 4-re változik. Most a minimális elem 3, ami az 1 indexet határozza meg, és J_1 lesz a lista negyedik eleme, k pedig 5 értéket kap. Végül J_3 kerül a lista ötödik helyére, amivel az eljárás befejeződik. A listán levő elemek sorrendje a következő:

$$J_5 \prec J_6 \prec J_4 \prec J_1 \prec J_3 \prec J_2.$$

F1. Egy ládapakolási feladatról tudjuk, hogy minden tárgy mérete legfeljebb 1/5, igazoljuk, hogy ekkor a NF algoritmus aszimptotikus versenyképességi hányadosa 5/4.

Megold: Mivel minden tárgy mérete legfeljebb $1/5$, ezért az NF algoritmus által kapott pakolásban, az utolsó ládán kívül minden ládában legalább $4/5$ a ládába pakolt tárgyak méreteinek összege (ellenkező esetben meg belefért volna a következő láda első eleme). Következésképpen $\sum_{i \in I} a_i \geq 4/5(NF(I) - 1)$. Másrészt mivel az optimális algoritmusnak is el kell helyeznie az összes tárgyat a ládákban, ezért $OPT(I) \geq \sum_{i \in I} a_i$. Következésképpen $NF(I) \leq 5/4OPT(I) + 5/4$, amiből következik, hogy ebben az esetben NF aszimptotikusan $5/4$-versenyképes.

Másrészt ennél nem kisebb az aszimptotikus hányadosa, amint ezt a következő példa mutatja. Legyen $\varepsilon > 0$ egy nagyon kicsi szám és vegyük a következő sorozatot: $I_n = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, \varepsilon)^{5n}$ (az inputban a fenti ötös lista ismétlődik $5n$-szer). Erre az inputra NF $5n$ ládát használ el, minden ismétlődést külön ládába rak. Az optimális megoldás megoldja az inputot $4n + 1$ ládával, a $20n$ darab $1/5$ kerül $4n$ ládába, és a kicsi tárgyak egy további ládába. Az $NF(I_n)/OPT(I_n)$ hányados tart $5/4$-hez, ahogy n és ezzel együtt $OPT(I_n)$ tart a végtelenbe, így az állítás második felét is igazoltuk.