Megjegyzések a kongruens körök négyzetben való legsűrűbb pakolásának problémájához

Szabó Péter Gábor és Csendes Tibor

A Magyar Tudomány 2001/5. számában jelent meg Filep Lászlónak a *Magyar matematika Erdélyben a két világháború között* című dolgozata. A cikkben szó volt Lázár Dezső (1913–1943) magyar matematikusnak egy diszkrét geometriai problémafelvetéséről is. Idézet a dolgozatból:

„Fontos eredményt ért el Lázár Dezső egy diszkrét geometriai problémával kapcsolatban, amelyet Fejes Tóth Lászlónak vetett fel még egyetemista korukban: Hogyan kell nagyszámú pontot egy négyzetben úgy elhelyezni, hogy a köztük fellépő minimális távolság maximális legyen? [9, 146. o] A két fiatal matematikus nem tudta, hogy analóg problémát már Bolyai Farkas is felvetett, amelyet A. Thue norvég matematikus megoldott a múlt század végén. A problémát Thue-től függetlenül Fejes Tóth László is megoldotta, és ahogy írja az idézett helyen: „a sikerélmény hatása vezetett a fedések és az elhelyezkedések vizsgálatára", vagyis a magyar diszkrét geometriai iskola kialakulására."

Az említett [9] könyv az irodalomjegyzékünkben megadott [9]. A fentiekben foglaltakhoz szeretnénk néhány megjegyzést tenni. A Lázár Dezső által felvetett probléma ekvivalens a négyzet adott számú kongruens körrel való legsűrűbb kitöltésének problémájával.

Bolyai Farkas az 1832–33-ban megjelent — a hosszú címe miatt röviden csak *Tentamen*-nek hívott — munkájában [1] valóban vizsgált egy körpakolási problémát szabályos háromszögben. Könyvében azonban nem mondja, hogy ő a legsűrűbb körpakolást keresné, csupán egy konkrét elhelyezés esetén a körök által le nem fedett területet, illetve annak határértékét vizsgálja egy körpakolássorozatra. Meg kell jegyeznünk, hogy az általa tanulmányozott pakolássorozat nem optimális körpakolássorozat (lásd pl. [10]).

A Lázár által kitűzött feladat nagyszámú, de *véges* sok pontra lett kimondva. A Fejes Tóth László által 1940-ben közölt megoldás [3] egy aszimptotikus értéket ad a pontok közötti minimális távolság maximumára, de az nem a valódi megoldása a feladatnak, arra csak egy közelítés (hasonlóan ilyen Thue [11] eredménye is [2]). A fenti probléma igazolt megoldása az 1–27 [5, 8] és a 36 [4] pontszámra ismert. Vannak magasabb értékekre is ún. jó pakolások [6], de annak megválaszolása, hogy azok az elhelyezések optimálisak vagy sem, még nyitott probléma.

A fenti pontosításokkal együtt viszont örülhetünk, hogy Lázár Dezső problémafelvetése felmerült, mivel a nemzetközi matematikai irodalom erről nemigen tud, így a problémát Leo Mosernek egy 1960-ban a *Canadian Mathematical Bulletin*-ben megjelent dolgozatától [7] eredezteti.

Hivatkozások

[1] Bolyai Farkas, *Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae, Elementaris Ac Sublimioris, Methodo Intuitiva, Evidentiaque Huic Propria Introducendi*, második kiadás, második kötet, 119–122, 1904. Illetve a hozzátartozó ábrakötet 31. ábrája.

[2] Erdős Pál és Fejes Tóth László, Pontok elhelyezése egy tartományban, *Magyar Tud. Akad. Mat és Fiz. Oszt. Közleményei*, **6**:185–190, 1956.

[3] L. Fejes Tóth, Über einen geometrischen Satz, *Mathematische Zeitschrift* **46**: 83–85, 1940.

[4] K. Kirchner and G. Wengerodt, Die dichteste Packung von 36 Kreisen in einem Quadrat, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, **25**:147–159, 1987.

[5] K. J. Nurmela and P. R. J. Östergård, More optimal packings of equal circles in a square, *Discrete & Computational Geometry* **22**:439–457, 1999.

[6] K. J. Nurmela and P. R. J. Östergård, Packing up to 50 equal circles in a square, *Discrete & Computational Geometry* **18**:111–120, 1997.

[7] Leo Moser, Problem 24, *Canadian Mathematical Bulletin* **3**:78, 1960.

[8] R. Peikert, D. Würtz, M. Monagan and C. Groot, Packing circles in a square: A review and new results, In P. Kall (ed.), *System Modelling and Optimization*, volume 180 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, 380–385, 1990.

[9] Staar Gyula, A megélt matematika, *Gondolat*, 1990.

[10] Szabó Péter Gábor, Optimális körelhelyezések a négyzetben, *Polygon* **X**/2:48–64, 2000.

[11] A. Thue, Om nogle geometrisk taltheoretiske theoremer, *Forhdl. Skand. Naturforsk.* **14**:352-353, 1892.

Szabó Péter Gábor
Cygron, Számítástechnikai Kutató-Fejlesztő és Kereskedelmi Kft.
6724, Szeged, Kátay utca 21., telefon: (62) 435 505
`pszabo@cygron.hu`

Csendes Tibor
Szegedi Tudományegyetem, Alkalmazott Informatikai Tanszék
6720, Szeged, Árpád tér 2., telefon: (62) 544 305
`csendes@inf.u-szeged.hu`