

Über einen Löwenheimschen Satz.

Von LÁSZLÓ KALMÁR in Szeged.

LÖWENHEIM¹⁾ hat eine Konstruktion angegeben, welche jedem Zähl Ausdruck²⁾ \mathfrak{A} einen binären³⁾ Zähl Ausdruck \mathfrak{B} zuordnet derart, daß \mathfrak{A} dann und nur dann allgemeingültig ist, falls \mathfrak{B} es ist. In den folgenden Zeilen wird diese Konstruktion durch eine einfachere ersetzt.

1. Es seien F_1, F_2, \dots, F_l die im gegebenen Zähl Ausdruck \mathfrak{A} figurierenden Funktionsvariable; F_λ soll r_λ Leerstellen besitzen⁴⁾ ($\lambda = 1, 2, \dots, l$). Es sei $r = \text{Max}(r_1, r_2, \dots, r_l)$. Wählen wir l Funktionsvariable G_1, G_2, \dots, G_l mit einer und r Funktionsvariable H_1, H_2, \dots, H_r mit zwei Leerstellen, die voneinander und von F_1, F_2, \dots, F_l verschieden sind, ferner eine von den in \mathfrak{A} vorkommenden gebundenen Variablen verschiedene Individuenvariable u .

Der gesuchte binäre Zähl Ausdruck \mathfrak{B} entsteht aus \mathfrak{A} , indem man für die Funktionszeichen $F_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_{r_\lambda})$ die Formel

$$(1) \quad (u) (H_1(x_1, u) \& H_2(x_2, u) \& \dots \& H_{r_\lambda}(x_{r_\lambda}, u) \rightarrow G_\lambda(u))$$

¹⁾ L. LÖWENHEIM, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Math. Annalen*, 76 (1915), S. 447–470, insb. § 4. Ich setze weder die Kenntnis dieser Arbeit, noch die der dort angewandten Schröderschen Symbolik voraus; statt den letzteren wende ich die Bezeichnungen des Werkes: D. HILBERT und W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik* (Berlin, 1928) an.

²⁾ d. h. Formel des engeren Funktionenkalküls ohne freie Individuenvariable.

³⁾ d. h. einen solchen, die ausschließlich Funktionsvariable mit einer und zwei Leerstellen enthält.

⁴⁾ Durch eine einfache vorbereitende Konstruktion könnte man übrigens erreichen, daß $r_1 = r_2 = \dots = r_l$; die obige Konstruktion würde aber dadurch nicht einfacher ausfallen.

einsetzt⁵⁾ ($\lambda = 1, 2, \dots, l$). Es ist klar, daß \mathfrak{B} allgemeingültig ist, falls \mathfrak{A} es ist; unsere Aufgabe ist, auch das Umgekehrte zu zeigen.

2. Setzen wir also voraus, daß \mathfrak{B} allgemeingültig ist. Es sei \mathfrak{I} ein beliebiger Individuenbereich, ferner $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_l$ beliebige in \mathfrak{I} definierte logische Funktionen von bzw. r_1, r_2, \dots, r_l Argumenten. Es ist zu zeigen, daß die Aussage \mathfrak{A}^* , die aus \mathfrak{A} durch Einsetzung dieser Funktionen für F_1, F_2, \dots, F_l entsteht, richtig ist.

Wir bezeichnen durch \mathfrak{I}^r die Menge der geordneten r -tupel aus Elementen von \mathfrak{I} . Die Komponenten der Elemente von \mathfrak{I}^r bezeichnen wir durch dieselben Buchstaben wie diese Elemente, aber mit oberen Indizes; z. B. sind die Komponenten von α der Reihe nach $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(r)}$.

Wir definieren in \mathfrak{I}^r die logischen Funktionen $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_l$ von einem Argument und $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_r$ von zwei Argumenten wie folgt: $\Psi_\lambda(\alpha)$ sei für $\alpha \in \mathfrak{I}^r$ gleichbedeutend mit $\Phi_\lambda(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(r_\lambda)})$; $\Omega_\rho(\alpha, \beta)$ bedeutet für $\alpha, \beta \in \mathfrak{I}^r$, daß $\alpha^{(\rho)}$ mit $\beta^{(\rho)}$ identisch ist ($\lambda = 1, 2, \dots, l$; $\rho = 1, 2, \dots, r$).

Wegen Voraussetzung entsteht eine richtige Aussage \mathfrak{B}^* , falls in \mathfrak{B} für $G_1, G_2, \dots, G_l, H_1, H_2, \dots, H_r$ der Reihe nach die Funktionen $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_l, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_r$ eingesetzt und die Klammerzeichen über \mathfrak{I}^r erstreckt werden. Aus der Teilformel (1) wird dann insbesondere

$$(2) \quad (u) (\Omega_1(x_1, u) \& \Omega_2(x_2, u) \& \dots \& \Omega_{r_\lambda}(x_{r_\lambda}, u) \rightarrow \Psi_\lambda(u)).$$

Die Aussage \mathfrak{B}^* läßt sich aber auch mit sich über \mathfrak{I} erstreckenden Klammerzeichen ausdrücken. Man braucht nur die

⁵⁾ Statt dessen könnte man auch

$$(1) \quad (Eu) (H_1(x_1, u) \& H_2(x_2, u) \& \dots \& H_{r_\lambda}(x_{r_\lambda}, u) \& G_\lambda(u))$$

für $F_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_{r_\lambda})$ einsetzen. Ein formal ähnlicher Ansatz wird bei K. GÖDEL, Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.*, 40 (1933), S. 433–443, insb. Formel (20), S. 441, angewandt, um zu verhindern, daß ein gewisses Skolem'sches Verfahren den binären Charakter eines Zähl Ausdrucks zerstört. [Mit Hilfe dieses Gödel'schen Kunstgriffes könnte man den Teil II meiner Arbeit: Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem, *diese Acta*, 5 (1930–32), S. 222–236, gewisse technische Vereinfachungen anbringen; vgl. Fußnote ¹⁹⁾ jener Arbeit, die durch die Gödel'sche Bemerkung gegenstandslos wurde.] Den Gödel'schen Ansatz könnte man ebenfalls zum Beweis des Löwenheimschen Satzes verwerten; die sich so ergebende Konstruktion wäre aber komplizierter, als die des Textes, da sie im allgemeinen mehr (nämlich $r_1 + r_2 + \dots + r_l$ statt $r + l$) Hilfsfunktionen benutzt und auch zum Beweis einer Ungleichung wie (4) weniger geeignet ist.

darin vorkommenden logischen Funktionen durch die Komponenten ihrer Argumente auszudrücken, ferner die Allzeichen (x) und die Seinzeichen (Ex) durch den entsprechenden Zeichen ($x^{(1)}$) ($x^{(2)}$)...($x^{(r)}$) bzw. ($Ex^{(1)}$) ($Ex^{(2)}$)...($Ex^{(r)}$) für die Komponenten zu ersetzen. Insbesondere geht dann (2) in die Aussagenfunktion

$$(3) \quad (u^{(1)})(u^{(2)})\dots(u^{(r)}) (\Delta(x_1^{(1)}, u^{(1)}) \& \Delta(x_2^{(1)}, u^{(2)}) \& \dots \& \Delta(x_{r_\lambda}^{(1)}, u^{(r_\lambda)}) \rightarrow \Phi_\lambda(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r_\lambda)}))$$

über, wobei $\Delta(x, y)$ die Identitätsfunktion des Individuenbereiches \mathfrak{J} bedeutet, d. h. die logische Funktion, die dann und nur dann richtig ist, falls für x und y ein und dasselbe Element von \mathfrak{J} eingesetzt wird.

In dieser Schreibweise kommen außer $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)}$ nur solche Individuenvariable in \mathfrak{B}^* als Argumente einer Funktion vor, die den oberen Index $^{(i)}$ tragen; die Klammerzeichen mit den übrigen Variablen können also wieder weggelassen werden. Ersetzt man noch die Aussagenfunktion (3) durch die offenbar gleichwertigen Funktionen $\Phi_\lambda(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{r_\lambda}^{(1)})$, so entsteht eine Aussage, die sich von \mathfrak{A}^* nur in der Bezeichnung der (gebundenen) Individuenvariablen unterscheidet. Daher ist auch \mathfrak{A}^* richtig, wie behauptet.

3. Ein Zähl Ausdruck \mathfrak{A} kann, ohne allgemeingültig zu sein, in gewissen Individuenbereichen identisch (d. h. für jede Einsetzung von logischen Funktionen für die Funktionsvariablen) richtig ausfallen. In diesem Falle fragt man, welche Individuenbereiche diese Beschaffenheit haben. Um dies zu entscheiden, genügt es bekanntlich⁶⁾ die Mindestanzahl $m_{\mathfrak{A}}$ der Elemente derjenigen Individuenbereiche zu bestimmen, in denen \mathfrak{A} nicht mehr identisch richtig ist; dann ist \mathfrak{A} dann und nur dann in einem Individuenbereich identisch richtig, falls derselbe eine Kardinalzahl kleiner als $m_{\mathfrak{A}}$ besitzt.

Aus dem obigen Beweis ergibt sich nun die Ungleichung

$$(4) \quad m_{\mathfrak{A}} \leq m_{\mathfrak{B}} \leq m_{\mathfrak{A}^*}.$$

Kennt man also $m_{\mathfrak{B}}$, so kann man auch $m_{\mathfrak{A}}$ bestimmen. Ist $m_{\mathfrak{B}}$ endlich, so folgt dies daraus, daß man in endlich vielen Schritten entscheiden kann, ob ein gegebener Zähl Ausdruck in einem Individuen-

⁶⁾ Siehe P. BERNAYS und M. SCHÖNFINKEL, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen*, 99 (1928), S. 342–372, insb. S. 344.

bereich mit einem gegebenen endlichen Anzahl von Elementen identisch richtig ist; ist aber $m_{\mathfrak{B}}$ unendlich, so ist nach dem bekannten Löwenheim–Skolemischen Satz⁷⁾ $m_{\mathfrak{B}} = \aleph_0$, also, wegen (4), auch $m_{\mathfrak{A}} = \aleph_0$.

4. Die obige Konstruktion besitzt, gegenüber der Löwenheimschen Konstruktion, auch die Beschaffenheit, daß \mathfrak{A} dann und nur dann erfüllbar ist, falls \mathfrak{B} es ist. Dies folgt aus der Bemerkung, daß unsere Konstruktion der Negation von \mathfrak{A} die Negation von \mathfrak{B} zuordnet.

(Eingegangen am 12. März 1934.)

Zusatz.⁸⁾

Die oben — vom Standpunkt der *mengentheoretischen Prädikatenlogik*⁹⁾ aus dargelegte — Beweisverfahren besitzt dem Löwenheimschen gegenüber auch den Vorzug, daß es sich fast unmittelbar der *axiomatischen Prädikatenlogik* anpassen läßt. So gewinnt man den folgenden *finiten* Beweis des Löwenheimschen Satzes, der mit wesentlich einfacheren Hilfsmitteln auskommt, als der von HERBRAND¹⁰⁾ stammende *finite* Beweis dieses Satzes.¹¹⁾

⁷⁾ L. LÖWENHEIM, a. a. O., Satz 2; TH. SKOLEM, Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, *Skrifter det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, Mat.-Naturv. Klasse*, 1929, No. 4, 49 S., insb. § 4.

⁸⁾ In diesem Zusatz wird den Prädikatenlogik betreffenden Ideen des neulich erschienenen Werkes: D. HILBERT und P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, I (Berlin, 1934) Rechnung getragen. In Terminologie und Bezeichnungen schließen wir uns von nun an diesem Werk (zitiert: H.—B.) an; nur sollen $l, r, s, \lambda, \varphi$ (mit oder ohne Indizes), wie bisher, Ziffern bedeuten. p, q (auch mit beliebigen Indizes) sollen freie Individuenvariable (besonders für Festlegung von Nennformen), u (ebenfalls mit oder ohne Indizes) eine gebundene Individuenvariable bedeuten.

⁹⁾ Vgl. H.—B., S. 125.

¹⁰⁾ J. HERBRAND, Sur le problème fondamental de la logique mathématique, *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydz. III*, 24 (1931), S. 12–56, insb. S. 34–39.

¹¹⁾ Aus dem folgenden Beweis der finiten Formulierung des Löwenheimschen Satzes kann man mit Hilfe des Gödelschen Vollständigkeitssatzes (K. GÖDEL, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.*, 37 (1930), S. 349–367, insb. Satz I, S. 350) wiederum zu einem Beweis des Löwenheimschen Satzes in der mengentheoretischen Formulierung gelangen; dieser Beweis wäre aber komplizierter, als der oben gegebene Beweis.

10) Für die genaue Festlegung der Bedingungen für die Anwendung der beiden letzten Schemata s. H.—B., S. 103 und 104.

Gilt die Behauptung bereits für eine Formel \mathfrak{F} , so gilt sie auch für die Formel \mathfrak{G} , falls diese aus \mathfrak{F} durch Einsetzung oder Umbenennung entsteht. In der Tat entsteht dann $\mathfrak{G}^{(s)}$ offenbar durch Einsetzungen bzw. Umbenennungen aus $\mathfrak{F}^{(s)}$.

Gilt die Behauptung bereits für die Formeln \mathfrak{P} und $\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{Q}$, sind also $\mathfrak{P}^{(s)}$ und $(\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{Q})^{(s)}$, d. h. $\mathfrak{P}^{(s)} \rightarrow \mathfrak{Q}^{(s)}$ ableitbar, so ist nach dem Schlußschema (*) auch $\mathfrak{Q}^{(s)}$ ableitbar, so daß die Behauptung auch für die Formel \mathfrak{Q} gilt.

Gilt endlich die Behauptung des Hilfssatzes für die Formeln $\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{Q}(a)$ bzw. $\mathfrak{Q}(a) \rightarrow \mathfrak{P}$, so gilt sie auch für $\mathfrak{P} \rightarrow (x) \mathfrak{Q}(x)$ bzw. $(Ex) \mathfrak{Q}(x) \rightarrow \mathfrak{P}$. In der Tat handelt es sich in diesem Fall um den deduktiven Übergang von einer Formel von der Form

$$\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{U}(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(s)})$$

zu

$$\mathfrak{B} \rightarrow (x^{(1)}) (x^{(2)}) \dots (x^{(s)}) \mathfrak{U}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(s)})$$

bzw. von

$$\mathfrak{U}(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(s)}) \rightarrow \mathfrak{B}$$

zu

$$(Ex^{(1)}) (Ex^{(2)}) \dots (Ex^{(s)}) \mathfrak{U}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(s)}) \rightarrow \mathfrak{B},$$

die sich folgendermaßen ausführen läßt. Im ersten Fall gelangt man zunächst aus der Formel $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{U}(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(s)})$ durch Einsetzung, Anwendung des Schemas (α) und Umbenennung zu $\mathfrak{B} \rightarrow (x^{(s)}) \mathfrak{U}(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(s-1)}, x^{(s)})$, daraus in gleicher Weise zu $\mathfrak{B} \rightarrow (x^{(s-1)}) (x^{(s)}) \mathfrak{U}(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(s-2)}, x^{(s-1)}, x^{(s)})$ usw., endlich zu $\mathfrak{B} \rightarrow (x^{(1)}) (x^{(2)}) \dots (x^{(s)}) \mathfrak{U}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(s)})$. Im zweiten Fall verfährt man in analoger Weise, nur wendet man statt (α) das Schema (β) an.

7. Wir wenden nun den somit bewiesenen Hilfssatz auf die Formel \mathfrak{B} mit $s=r$ an. Wir erhalten, vorausgesetzt, daß \mathfrak{B} ableitbar ist, die Ableitbarkeit derjenigen Formel $\mathfrak{B}^{(r)}$, die aus $\mathfrak{U}^{(r)}$ durch Einsetzung von

$$(5) \quad \begin{aligned} & (u^{(1)}) (u^{(2)}) \dots (u^{(r)}) (H_1(p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \dots, p_1^{(r)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)}) \& \\ & \& H_2(p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, \dots, p_2^{(r)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)}) \& \dots \& \\ & \& H_{r_\lambda}(p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(2)}, \dots, p_{r_\lambda}^{(r)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)}) \rightarrow \\ & \rightarrow G_\lambda(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)}) \end{aligned}$$

für die Nennform $F_\lambda(p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \dots, p_1^{(r)}, p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, \dots, p_2^{(r)}, \dots, p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(2)}, \dots, p_{r_\lambda}^{(r)})$ ($\lambda = 1, 2, \dots, l$) entsteht.

Erweitern wir nun das Axiomensystem des Prädikatenkalküls durch das Prädikatensymbol $\Delta(x, y)$ nebst den Axiomen¹⁷⁾

$$(J_1) \quad \Delta(a, a)$$

$$(J_2) \quad \Delta(a, b) \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$$

und setzen wir in $\mathfrak{B}^{(r)}$ für $H_\rho(p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(r)}, q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(r)})$ die Formel $\Delta(p^{(1)}, q^{(\rho)})$ ($\rho = 1, 2, \dots, r$) und für $G_\lambda(q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(r_\lambda)})$ die Formel $F_\lambda(q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(r_\lambda)})$ ein¹⁸⁾, so erhalten wir eine Formel, die man aus $\mathfrak{U}^{(r)}$ direkt durch Einsetzung von

$$(6) \quad (u^{(1)}) (u^{(2)}) \dots (u^{(r)}) (\Delta(p_1^{(1)}, u^{(1)}) \& \Delta(p_2^{(1)}, u^{(2)}) \& \dots \& \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, u^{(r_\lambda)}) \rightarrow F_\lambda(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r_\lambda)}))$$

für $F_\lambda(p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \dots, p_1^{(r)}, p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, \dots, p_2^{(r)}, \dots, p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(2)}, \dots, p_{r_\lambda}^{(r)})$ ($\lambda = 1, 2, \dots, l$) gewinnen kann.

8. Nun ist aber (6) im erweiterten Axiomensystem überführbar in $F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_{r_\lambda}^{(1)})$. In der Tat gewinnt man die Formel

$$(u^{(1)}) (u^{(2)}) \dots (u^{(r)}) (\Delta(p_1^{(1)}, u^{(1)}) \& \Delta(p_2^{(1)}, u^{(2)}) \& \dots \& \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, u^{(r_\lambda)}) \rightarrow F_\lambda(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r_\lambda)})) \rightarrow F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_{r_\lambda}^{(1)})$$

aus der Formel

$$(u^{(1)}) (u^{(2)}) \dots (u^{(r)}) (\Delta(p_1^{(1)}, u_1^{(1)}) \& \Delta(p_1^{(1)}, u_2^{(2)}) \& \dots \& \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, u^{(r_\lambda)}) \rightarrow F_\lambda(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r_\lambda)})) \rightarrow (\Delta(p_1^{(1)}, p_1^{(1)}) \& \Delta(p_2^{(1)}, p_2^{(1)}) \& \dots \& \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(1)}) \rightarrow F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_{r_\lambda}^{(1)})),$$

die aus der bereits (in 6) als ableitbar erkannten r -Transformierten von (a) durch Einsetzungen und Umbenennungen entsteht, durch Vertauschung der Vorderglieder nebst Abtrennung des im erweiterten System offenbar ableitbaren Vordergliedes $\Delta(p_1^{(1)}, p_1^{(1)}) \& \Delta(p_2^{(1)}, p_2^{(1)}) \& \dots \& \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(1)})$ mit Hilfe des Schlußschemas (*); zur Ableitung der Formel

¹⁷⁾ Dies sind die Axiome der Identität, s. H.—B., S. 165. Wir gebrauchen das Zeichen $\Delta(p, q)$ statt $p = q$.

¹⁸⁾ Hier wird statt einer Formel-Variable eine Formel eingesetzt, welche nicht sämtliche Argumente der fraglichen Formel-Variablen enthält. Dadurch können Formeln entstehen, die Bestandteile wie $(x) \mathfrak{F}$ oder $(Ex) \mathfrak{F}$ enthalten, wobei x in \mathfrak{F} nicht vorkommt. Das Verbot solcher Formeln bzw. Einsetzungen könnte leicht durch triviale Modifikationen (Hinzufügung von Konjunktionsglieder wie $\Delta(x, x)$ oder $A(x) \vee \bar{A}(x)$) umgangen werden.

$$(7) \quad F_{\lambda}(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_{r_{\lambda}}^{(1)}) \rightarrow (u^{(1)})(u^{(2)}) \dots (u^{(r)}) (\Delta(p_1^{(1)}, u^{(1)}) \& \\ \& \Delta(p_2^{(1)}, u^{(2)}) \& \dots \& \Delta(p_{r_{\lambda}}^{(1)}, u^{(r_{\lambda}})) \rightarrow F_{\lambda}(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r_{\lambda}}))$$

verfährt man wie folgt. Aus (J₂) ergeben sich die Formeln

$$\Delta(p_1^{(1)}, q^{(1)}) \rightarrow (F_{\lambda}(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_{r_{\lambda}}^{(1)}) \rightarrow F_{\lambda}(q^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_{r_{\lambda}}^{(1)})), \\ \Delta(p_2^{(1)}, q^{(2)}) \rightarrow (F_{\lambda}(q^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_{r_{\lambda}}^{(1)}) \rightarrow F_{\lambda}(q^{(1)}, q^{(2)}, p_3^{(1)}, \dots, p_{r_{\lambda}}^{(1)})), \\ \dots \\ \Delta(p_{r_{\lambda}}^{(1)}, q^{(r_{\lambda})}) \rightarrow (F_{\lambda}(q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(r_{\lambda}-1)}, p_{r_{\lambda}}^{(1)}) \rightarrow F_{\lambda}(q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(r_{\lambda}-1)}, q^{(r_{\lambda})}))$$

durch Einsetzung; also (durch Einsetzung in die identische Formel

$$(A_1 \rightarrow (B_1 \rightarrow B_2)) \rightarrow ((A_2 \rightarrow (B_2 \rightarrow B_3)) \rightarrow \dots ((A_{r_{\lambda}} \rightarrow (B_{r_{\lambda}-1} \rightarrow B_{r_{\lambda}})) \rightarrow \\ \rightarrow (A_1 \& A_2 \& \dots \& A_{r_{\lambda}} \rightarrow (B_1 \rightarrow B_{r_{\lambda}}))) \dots)$$

und r_{λ} -malige Anwendung des Schemas (*))

$$\Delta(p_1^{(1)}, q^{(1)}) \& \Delta(p_2^{(1)}, q^{(2)}) \& \dots \& \Delta(p_{r_{\lambda}}^{(1)}, q^{(r_{\lambda})}) \rightarrow \\ \rightarrow (F_{\lambda}(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_{r_{\lambda}}^{(1)}) \rightarrow F_{\lambda}(q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(r_{\lambda})})),$$

woraus sich (7) durch Vertauschung der Vorderglieder und dann r -malige Anwendung des Schemas (α) (nebst den nötigen Einsetzungen und Umbenennungen, vgl. 6, letzter Absatz) ergibt.

9. Aus der Überführbarkeit von (6) in $F_{\lambda}(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_{r_{\lambda}}^{(1)})$ ergibt sich, daß man ebenfalls zu einer ableitbaren Formel \mathfrak{C} gelangt, falls man in $\mathfrak{A}^{(r)}$ für $F_{\lambda}(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_{r_{\lambda}}^{(1)})$ statt (6) die Formel $F_{\lambda}(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_{r_{\lambda}}^{(1)})$ einsetzt.¹⁹⁾

Die Formel \mathfrak{C} unterscheidet sich also von \mathfrak{A} nur dadurch, daß jede gebundene Variable in den Klammerzeichen durch die Folge ihrer Komponenten, in den Leerstellen der Funktionsvariablen hingegen durch ihre *erste* Komponente ersetzt wurde.

Um von der Formel \mathfrak{C} zu \mathfrak{A} zu gelangen, braucht man nur die Klammerzeichen, in denen eine Variable mit oberem Index ⁽²⁾, ⁽³⁾, ..., oder ^(r) steht (so daß das Wirkungsbereich der betreffenden Klammerzeichen die Klammervariable nicht enthält), wegzulassen und in den übrigbleibenden Variablen das obere Index ⁽¹⁾

¹⁹⁾ Vgl. H.—B., S. 150, fünfter Absatz. Die Behauptung ergibt sich durch Kombination der Eigenschaft 3 der Überführbarkeit (H.—B., S. 133) mit Regel η (H.—B., S. 136).

zu streichen. Die erste dieser Operationen ist gestattet, da die Formeln $(x)\mathfrak{F}$ und $(Ex)\mathfrak{F}$, falls x in \mathfrak{F} nicht vorkommt, wie wir zeigen werden, in \mathfrak{F} überführbar sind; die zweite Operation ist eine Umbenennung der gebundenen Variablen.

Wir haben nur noch die vier Formeln

$$(8') \quad (x)A \rightarrow A, \\ (8'') \quad A \rightarrow (x)A, \\ (9') \quad (Ex)A \rightarrow A, \\ (9'') \quad A \rightarrow (Ex)A$$

abzuleiten; unsere Überführbarkeitsbehauptung ergibt sich dann durch Einsetzung und Zusammenfassung der wechselseitigen Implikationen in Äquivalenzen. Nun gewinnt man (8') und (9') aus (a) bzw. (b) durch Einsetzung von A für $A(p)$, (8'') und (9'') durch Anwendung des Schemas (α) bzw. (β) auf die identische Formel $A \rightarrow A$.

Damit ist zunächst nur bewiesen, daß \mathfrak{A} im durch die Identitätsaxiome (J₁) und (J₂) erweiterten Axiomensystem des Prädikatenkalküls ableitbar ist. Da aber \mathfrak{A} das Prädikatensymbol Δ nicht enthält, so lassen sich aus seiner Ableitung auch die Axiome (J₁) und (J₂) eliminieren²⁰⁾; daher ist \mathfrak{A} eine ableitbare Formel des Prädikatenkalküls, w. z. b. w.

(Hinzugefügt am 10. September 1934.)

²⁰⁾ H.—B., S. 382, Kursivtext.