Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls.

Von László Kalmár in Szeged.

In dieser Arbeit werde ich für einen Satz der mathematischen Logik einen neuen, einfachen Beweis geben. Da jener Satz dem elementarsten Kapitel der mathematischen Logik, dem sogenannten Aussagenkalkül angehört, setze ich gar keine Vorkenntnisse aus dieser Theorie voraus. Vielmehr werde ich nicht nur alles zum Verständnis des Beweises Nötige entwickeln, sondern gebe ich in **1—3** eine kurze Darstellung der wichtigsten Tatsachen des Aussagenkalküls. Diese Darstellung ermöglicht die Beurteilung der Rolle des in der Frage stehenden Satzes, sowie einen Vergleich der Ideen meines Beweises mit denen der übrigen Beweise auch für einen Leser, der gar nichts aus der mathematischen Logik weiß. **1** und **2** dienen zur Vorbereitung; in **3** gebe ich die Fragestellung an. In **4** werden die Grundideen der wichtigsten bisher angewandten Beweismethoden angegeben. In **5—9** folgt der neue Beweis; **10—13** beschäftigen sich mit anderen Wendungen des Satzes.

1. Dem Aussagenkalkül legt man eine Menge $\{\uparrow, \downarrow\}$ von zwei Elementen zugrunde, etwa in ähnlichem Sinn, wie der Arithmetik die abzählbar-unendliche Menge $\{1, 2, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen zugrunde gelegt wird.[1]) Die Elemente $\uparrow$ und $\downarrow$ jener Menge heißen

[1]) Die Auffassung des Aussagenkalküls als Arithmetik einer Menge mit zwei Elementen scheint zuerst von Łukasiewicz klar formuliert geworden zu sein; vgl. J. Łukasiewicz und A. Tarski, Untersuchungen über den Aussagenkalkül, *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III*, **23** (1930), S. 30—50, insb. Definition 5, S. 34; vgl. auch Fußnote [5]), S. 32—33. — Diese Auffassung wurde insbesondere im Werk: D. Hilbert und P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, erster Band (Berlin, 1934) beim Aufbau des Aussagenkalküls zugrunde gelegt. — Die älteren Darstellungen

die *logischen Werte*; $\uparrow$ heißt „wahr“, $\downarrow$ heißt „falsch“. Sie vertreten die gleichbenannten Wahrheitswerte der klassischen Logik; für unsere Zwecke kommt es aber allein darauf an, daß sie zwei verschiedene Elemente sind. Durch große lateinische Buchstaben werden wir meistens Veränderliche bezeichnen, die die logischen Werte anzunehmen fähig sind; sie heißen logische Variable. Das Übereinstimmen zweier logischen Werte bezeichnen wir durch das Gleichheitszeichen.

Analog, wie die Grundoperationen in der Arithmetik, definiert man im Aussagenkalkül fünf Operationen: *Negation, Implikation, Konjunktion, Disjunktion* und *Äquivalenz*. Diese Operationen sind Funktionen, deren Argumente logische Werte annehmen und deren Funktionswerte ebenfalls logische Werte sind; und zwar ist die Negation eine eingliedrige Operation, d. h. eine Funktion mit einem Argument, die übrigen vier aber zweigliedrige Operationen, d. h. Funktionen zweier Argumente. Zur Definition genügt es, die Funktionswerte an sämtlichen (bei der Negation zwei, bei den übrigen Operationen vier) Stellen anzugeben. Man definiert

die *Negation* $\bar{A}$ („nicht A“) von A durch $\bar{\uparrow} = \downarrow$, $\bar{\downarrow} = \uparrow$;

die *Implikation* $A \rightarrow B$ („A impliziert B“) von A, B durch $\uparrow \rightarrow \uparrow = \uparrow$, $\uparrow \rightarrow \downarrow = \downarrow$, $\downarrow \rightarrow \uparrow = \uparrow$, $\downarrow \rightarrow \downarrow = \uparrow$;

die *Konjunktion* $A \& B$ („A und B“) von A, B durch $\uparrow \& \uparrow = \uparrow$, $\uparrow \& \downarrow = \downarrow$, $\downarrow \& \uparrow = \downarrow$, $\downarrow \& \downarrow = \downarrow$;

die *Disjunktion* $A \vee B$ („A oder B“) von A, B durch $\uparrow \vee \uparrow = \uparrow$, $\uparrow \vee \downarrow = \uparrow$, $\downarrow \vee \uparrow = \uparrow$, $\downarrow \vee \downarrow = \downarrow$;

die *Äquivalenz* $A \sim B$ („A äquivalent B“) von A, B durch $\uparrow \sim \uparrow = \uparrow$, $\uparrow \sim \downarrow = \downarrow$, $\downarrow \sim \uparrow = \downarrow$, $\downarrow \sim \downarrow = \uparrow$.

Man kümmere sich nicht viel um die Benennungen der Operationen; dieselben weisen auf die (sprachlich teilweise durch Bindewörter, teilweise aber durch Zeitwörter ausgedrückten) Begriffe der klassischen Logik hin, die den Operationen des Aussagenkalküls entsprechen; wir haben aber mit diesem Entsprechen

des Aussagenkalküls setzen den Begriff der *Aussage* voraus; dieser Begriff wird meistens durch Beispiele wie „der Schnee ist weiß“ bzw. „der Schnee ist schwarz“ erläutert und der Aussagenkalkül (der übrigens seinen Namen dieser Behandlungsweise verdankt) als ein algebrenartiger Kalkül mit solchen Aussagen aufgebaut. Diese Auffassung hat den Anschein erweckt, als ob es sich im Aussagenkalkül um Philosophisches handle; dieser Umstand hat erfahrungsgemäß viele, philosophisch nicht interessierte, Mathematiker von dieser schönen Disziplin der reinen Mathematik abgeschreckt.

gar nichts zu tun, so daß wir auf die Frage, inwieweit dieses (insbesondere bei der Disjunktion und Implikation) nur teilweise besteht, nicht einzugehen brauchen. Man beachte aber, daß $\bar{A} = \uparrow$ mit $A = \downarrow$, $\bar{A} = \downarrow$ mit $A = \uparrow$ gleichbedeutend ist; ferner, daß $A \to B = \uparrow$ ist für $A = \downarrow$ und für $B = \uparrow$, sonst aber (d. h. für $A = \uparrow$, $B = \downarrow$) $A \to B = \downarrow$ ist; daß $A \& B$ dann und nur dann gleich $\uparrow$ ist, falls $A = \uparrow$ und $B = \uparrow$ ist; daß $A \vee B$ dann und nur dann gleich $\downarrow$ ist, falls $A = \downarrow$ und $B = \downarrow$ ist; endlich, daß $A \sim B$ dann und nur dann gleich $\uparrow$ ist, falls $A = B$.

Einen Ausdruck, der aus logischen Variablen mit Hilfe unserer Operationen entsteht, wobei diese Operationen auch mehrmals, in beliebiger Reihenfolge, aber natürlich nur endlich viele Malen angewendet werden können, nennen wir eine *Formel*. Der Aufbau einer Formel wird üblicherweise durch Klammern angedeutet. Z. B. ist $(A \sim (B \& C)) \to ((B \vee A) \to C)$ eine Formel. Wir bezeichnen Formeln durch große deutsche Buchstaben.

Man bemerke, daß die obigen Operationen willkürlich aus der Menge aller möglichen Operationen ausgezeichnet wurden. Historisch hängt dies jedenfalls mit dem oben erwähnten Entsprechen den Begriffen der klassischen Logik zusammen. Aber auch ein sachlicher Grund spricht für diese Auszeichnung. In der Tat kann man beweisen, daß sich alle übrigen, beliebig vielgliedrigen, Operationen des Aussagenkalküls[2]) durch jene fünf Operationen ausdrücken, also als Formeln darstellen lassen. Da wir diesen wichtigen Satz des Aussagenkalküls nicht benötigen werden, beweise ich ihn hier nicht, sondern verweise ich auf den Werk von HILBERT und BERNAYS, a. a. O. [1]), S. 55—57.

In dieser Hinsicht ist aber die Einführung aller fünf Operationen nicht begründet, da man auch mit Negation und Implikation allein auskommt; in der Tat gilt für beliebige A, B

(1) $$A \& B = \overline{A \to \bar{B}},$$

(2) $$A \vee B = \bar{A} \to B,$$

(3) $$A \sim B = (A \to B) \& (B \to A) = \overline{(A \to B) \to \overline{B \to A}},$$

so daß sich die Konjunktion, Disjunktion und Äquivalenz mit Hilfe der Negation und Implikation ausdrücken läßt. Man beweist

[2]) d. h. Funktionen beliebig vieler Argumente, die auf der Menge $\{\uparrow, \downarrow\}$ definiert sind und deren Werte ebenfalls dieser Menge angehören.

die Gleichungen (1)—(3) durch Berechnung der linken und rechten Seite für alle (vier) möglichen Wertverteilungen von A und B mit Hilfe der Definitionen der Operationen. Ähnlich beweist man die Gleichungen

(4) $$A \vee B = \overline{\bar{A} \& \bar{B}},$$

(5) $$A \& B = \overline{\bar{A} \vee \bar{B}},$$

$$A \to B = \overline{A \& \bar{B}} = \bar{A} \vee B,$$

$$A \sim B = \overline{A \& \bar{B}} \& \overline{B \& \bar{A}} = \overline{\overline{\bar{A} \vee B} \vee \overline{\bar{B} \vee A}},$$

die zeigen, daß auch die Konjunktion und Negation, oder die Disjunktion und Negation zur Darstellung aller Operationen des Aussagenkalküls genügen. Der Grund dafür, warum man doch alle fünf Operationen zugleich betrachtet, besteht darin, daß man sonst einige Tatsachen des Aussagenkalküls nur viel komplizierter ausdrücken könnte.

2. Weitere wichtige Sätze des Aussagenkalküls werden durch die Gleichungen

(6) $$A \& B = B \& A,$$

(7) $$A \vee B = B \vee A,$$

(8) $$A \& (B \& C) = (A \& B) \& C,$$

(9) $$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C,$$

(10) $$(A \& B) \vee C = (A \vee C) \& (B \vee C),$$

(11) $$(A \vee B) \& C = (A \& C) \vee (B \& C),$$

(12) $$\overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B},$$

(13) $$\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B},$$

(14) $$\bar{\bar{A}} = A$$

(für beliebige Werte von A, B, C) ausgedrückt. Man beweist diese Gleichungen ebenfalls durch Ausprobieren aller (höchstens 8) Fällen; durch geeignete Zusammenfassung von Fällen kann man die Anzahl der hierzu nötigen Proben noch vermindern. (Die Gleichungen (12) und (13) lassen sich auch leicht aus (4) und (5) erhalten.) Die Gleichungen (6)—(10) weisen auf eine *Analogie zwischen Aussagenkalkül und Algebra* hin; sie besagen nämlich, daß Konjunktion und Disjunktion kommutative und assoziative Operationen sind und die letztere gegenüber der ersteren distributiv ist. Vermöge der Assoziativität darf man mehrgliedrige Konjunktionen und Disjunktionen[3]) ohne Klammern schreiben; allgemein kann man mit Konjunktion und Disjunktion ebenso rechnen, wie mit Addition und Multiplikation in einem Ring.[4]) Gleichung (11) zeigt, daß die Analogie auch im umgekehrten Sinne besteht, da auch die Konjunktion gegenüber der Disjunktion distributiv ist; man kann daher die erstere der Multiplikation und die letztere der Addition entsprechen lassen. Vermöge (12)—(14) können diese Analogien dazu verwertet werden, jede Formel nach belieben als Konjunktion von einfachen Disjunktionen oder als Disjunktion von einfachen Konjunktionen zu schreiben; dabei heißt eine Konjunktion oder Disjunktion *einfach,* falls ihre Glieder logische Variable oder Negationen von solchen sind. Zu diesem Zwecke drücke man vor allem die etwaigen Implikationen und Äquivalenzen durch die übrigen drei Operationen aus; dann wende man (12) und (13) zur „Ausführung" der Negationen solange an, bis alle Negationsstriche über einzelnen Variablen stehen; die dabei eventuell auftretenden mehrfachen Negationen beseitige man mit Hilfe von (14). Endlich verwende man zum „Ausmultiplizieren" das Distributivgesetz (10) oder (11), je nachdem die gegebene Formel als Konjunktion von einfachen Disjunktionen *(konjunktive Normalform)* oder als Disjunktion von einfachen Konjunktionen *(disjunktive Normalform)* darzustellen ist.

3. Eine Formel, deren Wert für jede Einsetzung von logischen Werten für die Variablen $\uparrow$ ausfällt, nennen wir eine *identisch wahre* Formel, oder kürzer eine *Identität.* Die Theorie der Identitäten ist ein wichtiges Kapitel des Aussagenkalküls; diese spielen ja hier eine ähnliche Rolle, wie die allgemeingültigen Regeln in der klassischen Logik. Ob eine vorgelegte Formel $\mathfrak{A}$ eine Identität ist oder nicht, läßt sich durch Berechnung des Wertes von $\mathfrak{A}$ für jede einzelne Einsetzung von logischen Werten für die in $\mathfrak{A}$ figurierenden Variablen entscheiden. Eine andere, meistens bequemere Methode besteht darin, daß man $\mathfrak{A}$ als eine konjunktive Normalform darstellt; in der Tat sieht man leicht ein, daß eine Konjunktion

[3]) Die Wörter Negation, Implikation, Konjunktion, Disjunktion, Äquivalenz wendet man auch zur Bezeichnung der *Resultate* der entsprechenden Operationen an; die Werte, worauf die Operationen anwendet werden, heißen (unabhängig davon, um welche Operation es sich handelt,) *Glieder.*

[4]) Mit der wichtigen Ausnahme, daß es hier kein Analogon der Subtraktion gibt.

dann und nur dann eine Identität ist, falls dies für jedes Glied derselben zutrifft; ferner, daß eine einfache Disjunktion dann und nur dann eine Identität ist, falls mindestens eine Variable darin sowohl negiert wie unnegiert als Disjunktionsglied auftritt; daher läßt sich von einer konjunktiven Normalform sofort erkennen, ob sie eine Identität ist.

Diese Möglichkeit, zu entscheiden, ob eine vorgelegte Formel eine Identität ist, ist zweifellos eine der fundamentalsten Tatsachen der Theorie der Identitäten. Diese Theorie ist aber dadurch noch keineswegs erschöpft, ebensowenig, wie etwa die Zahlentheorie durch die Möglichkeit, von einem vorgelegten, aus 1 durch die vier Spezies zusammengesetzten Ausdruck (d. h. von einer numerisch gegebenen rationalen Zahl) zu entscheiden, ob derselbe eine ganze Zahl repräsentiert. Man bedarf vielmehr, um eine Methode zum Beweisen von Sätzen für beliebige Identitäten zu gewinnen, eine analoge Entstehungsart der Identitäten, wie der Aufbau der natürlichen Zahlen aus 1 durch iterierte Addition von 1 — worauf im Grunde die wichtigste Beweismethode der Zahlentheorie, die vollständige Induktion, beruht. Eine solche Entstehungsart der Identitäten gewinnt man aus den folgenden Überlegungen.

Ist $\mathfrak{A}$ eine Identität und setzt man in $\mathfrak{A}$ für eine Variable überall, wo sie in $\mathfrak{A}$ vorkommt, eine und dieselbe Formel $\mathfrak{B}$ (Identität oder nicht) ein, so entsteht offenbar wieder eine Identität. Durch diese Operation der *Einsetzung* können aus einer Identität kompliziertere, sozusagen längere Identitäten gebildet werden.

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ zwei Identitäten, so ist auch $\mathfrak{B}$ eine Identität. In der Tat, setzen wir für die in $\mathfrak{B}$ figurierenden Variablen beliebige logische Werte ein. Kommt eine solche Variable auch in $\mathfrak{A}$ vor, so setze man für sie denselben logischen Wert in $\mathfrak{A}$ ein, wie in $\mathfrak{B}$; für die nur in $\mathfrak{A}$, nicht aber in $\mathfrak{B}$ vorkommenden Variablen setze man etwa $\downarrow$ ein. Nach dieser Einsetzung wird laut Voraussetzung $\mathfrak{A} = \uparrow$ und $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} = \uparrow$; also auch $\mathfrak{B} = \uparrow$, da ja $\uparrow \to \downarrow = \downarrow$ und nicht $\uparrow$ ist. — Die Operation, die aus zwei Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ die Formel $\mathfrak{B}$ erzeugt, nennt man *Abtrennung;* durch diese Operation können wir aus einer Identität $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ eine kürzere Identität $\mathfrak{B}$ bilden (mit Hilfe einer anderen Identität $\mathfrak{A}$).

Nun erhebt sich die Frage, *ob es endlich viele Identitäten gibt, aus denen sich jede Identität durch endlich viele Einsetzungen und Abtrennungen gewinnen läßt.* Die Antwort ist bejahend;

die durch dieselbe ausgedrückte Beschaffenheit der Identitäten ist unter dem Namen *Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls* bekannt. Ein System von endlich vielen Identitäten der verlangten Art heißt ein *Axiomensystem,* jene Identitäten selbst *Axiome des Aussagenkalküls.* Diese Benennungen weisen auf die Analogie hin, die zwischen der fraglichen Entstehungsart der Identitäten einerseits und dem axiomatischen Aufbau einer mathematischen Theorie im üblichen Sinne andererseits besteht; dabei nehmen die Rolle der logischen Schlußweisen die beiden Operationen: Einsetzung und Abtrennung über, man nennt daher diese auch die *Schlußregeln* des Aussagenkalküls.

Durch den Satz von der Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls wird das obige Desideratum erfüllt: um einen Satz für beliebige Identitäten zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß er für die Axiome (eines Axiomensystems des Aussagenkalküls) besteht und falls er für eine Formel $\mathfrak{A}$ bzw. für zwei Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ gültig ist, so gilt er auch für jede aus $\mathfrak{A}$ durch Einsetzung entstehende Formel bzw. für die aus $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ durch Abtrennung von $\mathfrak{A}$ entstehende Formel $\mathfrak{B}$.

4. Die meisten Beweise der Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls beruhen auf der oben besprochenen, mit konjunktiven Normalformen operierenden Methode der Entscheidung, ob eine gegebene Formel eine Identität ist. Bei diesen Beweisen[5]) werden die Axiome derart gewählt, daß sich aus denselben zunächst alle Disjunktionen, die eine Variable nebst ihrer Negation als Glieder enthalten, mittels den Schlußregeln gewinnen lassen; ferner, daß die Operation, die aus zwei Formeln ihre Konjunktion erzeugt, mittels den Axiomen auf die Schlußregeln zurückgeführt werden kann; endlich, daß dasselbe auch auf die *Inversen* jener Operationen zutreffe, die zur Transformation einer Formel in eine konjunktive Normalform anzuwenden sind. Dann ist, falls $\mathfrak{A}$ eine Identität und $\mathfrak{B}$ eine konjunktive Normalform für $\mathfrak{A}$ ist, aus den Axiomen mit Hilfe der Schlußregeln zunächst $\mathfrak{B}$ und daraus weiter $\mathfrak{A}$ ableitbar.

Eine interessante, auf völlig anderen Ideen beruhende Methode zum Beweis der Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls ist von ŁUKASIEWICZ[6]) gegeben worden. Er zeigt etwas mehr, nämlich, daß endlich viele Identitäten als Axiome derart angegeben werden können, daß es für jede Formel $\mathfrak{A}$ eine der folgenden beiden Fälle vorliegt: entweder ist $\mathfrak{A}$ aus den Axiomen mit Hilfe von Einsetzungen und Abtrennungen ableitbar, oder läßt sich *jede* Formel aus $\mathfrak{A}$ und den Axiomen mit Hilfe derselben Schlußregeln ableiten. (Da, falls $\mathfrak{A}$ eine Identität ist, aus $\mathfrak{A}$ und den Axiomen durch die Schlußregeln nur Identitäten abgeleitet werden können, so folgt hieraus der Satz von der Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls in seiner ursprünglichen Form[7]).) — Die Methode von ŁUKASIEWICZ besteht darin, daß ein Verfahren angegeben wird, wodurch man für eine beliebige Formel $\mathfrak{A}$, je nach der Form derselben, entweder direkt zeigen kann, daß eine der genannten Fälle vorliegt, oder aber eine oder zwei *kürzere* Formeln $\mathfrak{A}'$ bzw. $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ angeben kann, so daß $\mathfrak{A}'$ bzw. $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ mit $\mathfrak{A}$ äquivalent sind im

[5]) Man vgl. z. B. D. HILBERT und W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik* (Berlin, 1928), § 3—4 und 10—11. Diese Methode des Axiomatisierbarkeitsbeweises beruht auf Ideen von SCHRÖDER und wurde zuerst von POST exakt ausgeführt: E. L. POST, Introduction to a General Theory of Elementary Propositions, *American Journal of Math.*, **43** (1921), S. 163—185, insb. Nr. 3. Die meisten Darstellungen des Aussagenkalküls umgehen die Frage dadurch, daß sie die Identitäten als diejenigen Formeln definieren, die aus gewissen angegebenen Axiomen durch gewisse angegebene Schlußregeln abgeleitet werden können. Bei solchem Vorgehen taucht doch die Frage als Problem der Vollständigkeit (nebst dem der Widerspruchsfreiheit) des Axiomensystems auf.

[6]) J. ŁUKASIEWICZ, Ein Vollständigkeitsbeweis des zweiwertigen Aussagenkalküls, *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III,* **24** (1931), S. 153—183. ŁUKASIEWICZ beschränkt sich hierbei auf Identitäten, die aus Variablen mittels Negationen und Disjunktionen hergestellt werden (keine wesentliche Einschränkung, da sich jede Operation des Aussagenkalküls auf jene beiden zurückführen läßt); dementsprechend wird daher der Einsetzungsregel eingeschränkt und die Abtrennungsregel abgeändert. Ferner wendet ŁUKASIEWICZ eine von der hier benützten (in vorliegender Form von HILBERT stammenden) abweichende Symbolik an. Dies kann hier nicht als bloß eine Äußerlichkeit aufgefaßt werden, da die Symbolik von ŁUKASIEWICZ sozusagen zur Methode gehört. Überhaupt ist diese Symbolik, deren wichtiger Vorteil ist, daß sie keine Klammern (oder Ersatzmittel für Klammern) benutzt, zur Untersuchung von solchen Fragen sehr geeignet. Wir benutzen doch die Hilbertsche Symbolik, da sie mehr verbreitet ist und für uns, die uns dem Klammerngebrauch der Algebra angewöhnt haben, übersichtlicher zu sein scheint.

[7]) Umgekehrt folgt aus der ursprünglichen Formulierung der Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls die oben erwähnte Verschärfung; vgl. HILBERT—ACKERMANN, a. a. O. [5]), S. 33.

Sinne, daß, wenn für $\mathfrak{A}'$ bzw. $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ eine der genannten Fälle vorliegt, so gilt dasselbe auch für $\mathfrak{A}$.

Ich werde nun eine dritte Methode entwickeln, die sich direkt an die Definition der Identität anknüpft und in der Ausführung einfacher ausfällt, als die bisherigen.

5. Es seien zunächst die Axiome angegeben.

Hilfsaxiome:

(I) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,

(II) $(A \to B) \to ((\overline{A} \to B) \to B)$.

Axiom der Negation:

(III) $A \to \overline{\overline{A}}$.

Axiome der Implikation:

(IV) $B \to (A \to B)$,

(V) $\overline{A} \to (A \to B)$,

(VI) $A \to (\overline{B} \to \overline{A \to B})$.

Axiome der Konjunktion:

(VII) $A \to (B \to (A \,\&\, B))$,

(VIII) $\overline{A} \to \overline{A \,\&\, B}$,

(IX) $\overline{B} \to \overline{A \,\&\, B}$.

Axiome der Disjunktion:

(X) $A \to (A \vee B)$,

(XI) $B \to (A \vee B)$,

(XII) $\overline{A} \to (\overline{B} \to \overline{A \vee B})$.

Axiome der Äquivalenz:

(XIII) $A \to (B \to (A \sim B))$,

(XIV) $A \to (\overline{B} \to \overline{A \sim B})$,

(XV) $\overline{A} \to (B \to \overline{A \sim B})$,

(XVI) $\overline{A} \to (\overline{B} \to (A \sim B))$.

Die Rolle der Einteilung der Axiome[8]) wird aus dem Beweise der Axiomatisierbarkeit klar hervortreten; insbesondere auch,

[8]) Eine ähnliche Einteilung findet man in Hilbert—Bernays, a. a. O. [1]), S. 66; dort kommen aber keine Hilfsaxiome vor; auch sonst ist jenes Axiomensystem eleganter, als das unsere. In der Tat, bei Hilbert und Bernays gehören zu jeder Operation je drei Axiome; dieselben enthalten außer der fraglichen Operation nur die Implikation als einzige Hilfsoperation. (Vgl. aber den zweiten Absatz von **10.**) — Die Axiome (III), (X) und (XI) kommen auch bei Hilbert und Bernays vor.

warum (I) und (II) Hilfsaxiome und nicht Axiome der Implikation heißen. Vorläufig deute ich nur an, daß die nach den Operationen genannten Axiome in einem gewissen Sinn zur Formalisierung der Definition der fraglichen Operationen dienen.

Ich nenne eine Formel $\mathfrak{A}$ *ableitbar,* falls sie aus den Axiomen durch eine endliche Kette von Einsetzungen und Abtrennungen entsteht, falls es also eine endliche Folge

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$$

von Formeln gibt, so daß jedes Glied $\mathfrak{A}_m$ der Folge entweder mit einem der Axiome (I)—(XVI) identisch ist, oder aber aus einer Formel $\mathfrak{A}_k$ mit $k<m$ durch Einsetzung, oder aus zwei Formeln $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{A}_l$ mit $k, l<m$ durch Abtrennung entsteht, endlich $\mathfrak{A}_n$ mit $\mathfrak{A}$ identisch ist. Außer diesem Begriff benötigen wir auch den Hilfsbegriff der *Ableitbarkeit aus Prämissen.* Es seien $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ beliebige Formeln; wir sagen, $\mathfrak{A}$ sei aus den Prämissen[9]) $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ ableitbar, falls es eine endliche Folge

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$$

von Formeln gibt, so daß jedes Glied $\mathfrak{A}_m$ desselben entweder mit einem der Axiome (I)—(XVI), oder mit einem der Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ identisch ist, oder aus einer Formel $\mathfrak{A}_k$ mit $k<m$ durch Einsetzung einer Formel *für eine Variable, die in keiner der Prämissen* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ *vorkommt,* oder aber aus zwei Formeln $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{A}_l$ mit $k, l<m$ durch Abtrennung hervorgeht, endlich $\mathfrak{A}_n$ mit $\mathfrak{A}$ identisch ist.

6. Nun zeige ich, daß die Axiome (I)—(XVI) lauter Identitäten sind. Man könnte dies auch mittels Durchprobieren aller Fälle für die Werte von A, B, C verifizieren; durch die folgende Bemerkung geht es aber kürzer. Um zu zeigen, daß eine Formel von der Form $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ eine Identität ist, genügt es nachzuweisen, daß für alle Werte der in derselben vorkommenden Variablen, für die $\mathfrak{A} = \uparrow$ ist, auch $\mathfrak{B} = \uparrow$ ausfällt. In der Tat gilt dann $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} = \uparrow$ für beliebige Werte der Variablen, da, falls $\mathfrak{A} = \downarrow$ ist, sowieso $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} = \uparrow$ ausfällt. Analog sieht man ein, daß es zum Beweis, daß eine Formel $\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{B})$ bzw. $\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to (\mathfrak{A}_3 \to \mathfrak{B}))$ eine Identität ist, genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{B} = \uparrow$ gilt für alle Werte der Variablen, für welche $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \uparrow$, bzw. $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3 = \uparrow$ ausfällt. Mit Hilfe

[9]) Das Wort *Prämisse* verwenden wir also in diesem Zusammenhang als Synonyme des Wortes *Formel.*

dieser Bemerkung verifiziert man den Identitätscharakter der Axiome (I)—(XVI) wie folgt.

(I). Falls $A \to (B \to C) = A \to B = A = \uparrow$, so gilt auf Grund der Definition der Implikation $B = \uparrow$ (da nämlich sonst $A \to B = = \uparrow \to \downarrow = \downarrow$ wäre) und ebenso $B \to C = \uparrow$, daher auch $C = \uparrow$.

(II). Falls $A \to B = \bar{A} \to B = \uparrow$, so muß auch $B = \uparrow$ sein. Sonst wäre $B = \downarrow$, und da entweder A, oder $\bar{A}$ gleich $\uparrow$ ist, entweder $A \to B$, oder $\bar{A} \to B$ gleich $\uparrow \to \downarrow = \downarrow$.

(III). Falls $A = \uparrow$, so gilt auf Grund der Definition der Negation $\bar{\bar{A}} = \uparrow$.

(IV). Falls $B = \uparrow$, so gilt auf Grund der Definition der Implikation, unabhängig vom Wert von A, $A \to B = \uparrow$.

(V). Falls $\bar{A} = \uparrow$, also $A = \downarrow$, so gilt auf Grund der Definition der Implikation, unabhängig vom Wert von B, $A \to B = \uparrow$.

(VI). Falls $A = \bar{B} = \uparrow$, so gilt $A = \uparrow$, $B = \downarrow$, also auf Grund der Definition der Implikation $A \to B = \downarrow$, $\overline{A \to B} = \uparrow$.

(VII). Falls $A = B = \uparrow$, so gilt auf Grund der Definition der Konjunktion $A \& B = \uparrow$.

(VIII) und (IX). Falls $\bar{A} = \uparrow$, d. h. $A = \downarrow$, oder aber $\bar{B} = \uparrow$, d. h. $B = \downarrow$, so gilt auf Grund der Definition der Konjunktion $A \& B = \downarrow$, also $\overline{A \& B} = \uparrow$.

(X) und (XI). Falls $A = \uparrow$, oder aber $B = \uparrow$, so gilt auf Grund der Definition der Disjunktion $A \vee B = \uparrow$.

(XII). Falls $\bar{A} = \bar{B} = \uparrow$, d. h. $A = B = \downarrow$, so gilt auf Grund der Definition der Disjunktion $A \vee B = \downarrow$, also $\overline{A \vee B} = \uparrow$.

(XIII) und (XVI). Falls $A = B = \uparrow$, oder aber $\bar{A} = \bar{B} = \uparrow$, d. h. $A = B = \downarrow$, so gilt nach Definition der Äquivalenz $A \sim B = \uparrow$.

(XIV) und (XV). Falls $A = \bar{B} = \uparrow$, d. h. $A = \uparrow$, $B = \downarrow$, so gilt auf Grund der Definition der Äquivalenz $A \sim B = \downarrow$, also $\overline{A \sim B} = \uparrow$. Dasselbe gilt auch im Falle $\bar{A} = B = \uparrow$, d. h. $A = \uparrow$, $B = \downarrow$.

Aus dem somit verifizierten Identitätscharakter der Axiome folgt nach einer obigen Bemerkung, daß auch alle ableitbaren Formeln Identitäten sind. Wir werden nun auch das Umgekehrte und damit die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls beweisen.

7. Zum Beweis benötigen wir einige Hilfssätze.

H i l f s s a t z 1.[10]) *Es seien* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ *beliebige Formeln, die die* (in den Axiomen figurierenden) *Variablen* A, B, C *nicht enthalten. Es sei die Formel* $\mathfrak{A}$ *aus den Prämissen* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ *ableitbar. Dann ist die Formel* $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}$ *aus den Prämissen* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ *ableitbar.* (Für $r = 1$ bedeutet dies: ableitbar schlechthin.)

Wir beweisen die Behauptung a) für den Fall, daß die Formel $\mathfrak{A}$ eine der Axiome (I)—(XVI) oder der Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ ist; b) für den Fall, daß $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{P}_r$ identisch ist; dann c) angenommen, daß die Behauptung für eine Formel $\mathfrak{A}$ gültig ist, beweisen wir dieselbe für jede Formel $\mathfrak{B}$, die aus $\mathfrak{A}$ durch Einsetzung einer Formel für eine in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ nicht vorkommende Variable entsteht; endlich d) angenommen, daß die Behauptung für die Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gilt, beweisen wir sie für die Formel $\mathfrak{B}$. Aus der Definition der Ableitbarkeit aus Prämissen ergibt sich, daß dann die Behauptung für jede aus $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ als Prämissen ableitbare Formel gilt.

a) Ist $\mathfrak{A}$ ein Axiom, oder eine der Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$, so erhält man aus dem Axiom (IV) durch zweimalige Einsetzung (von $\mathfrak{P}_r$ für A und dann $\mathfrak{A}$ für B)

$$\mathfrak{A} \to (\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}),$$

daraus durch Abtrennung des Axioms oder der Prämisse $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}.$$

Die beiden dabei benötigten Einsetzungen erfolgten für die Variablen A und B, also für solche, die in den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ nicht vorkommen; also ist $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}$ aus jenen Prämissen ableitbar.

b) Ist $\mathfrak{A}$ identisch mit $\mathfrak{P}_r$, so handelt es sich um die Ableitbarkeit von $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{P}_r$ aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$. Wir zeigen sogar die Ableitbarkeit dieser Formel ohne Prämissen, wobei aber nur für A, B, C Formeln eingesetzt werden. Man erhält zunächst aus Axiom (I) durch Einsetzung von A für C

$$(A \to (B \to A)) \to ((A \to B) \to (A \to A)); \qquad (15)$$

---

[10]) Vgl. zu der in diesem Hilfssatz ausgedrückten Idee *a)* A. Tarski, Über einige fundamentalen Begriffe der Metamathematik, *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III,* **23** (1930), S. 22—29, insb. Axiom 8*, S. 24; *b)* Hilbert—Bernays, a. a. O. [1]), Begriff der regulären Implikationsformel, S. 68, und Deduktionstheorem, S. 155; *c)* G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen I, *Math. Zeitschrift,* **39** (1934), S. 176—210, insb. Schlußfiguren-Schema „*FE*", S. 186.

ferner aus dem Axiom (IV) durch Vertauschung von A mit B (dies kommt auf eine dreimalige Einsetzung hinaus: man setzt zunächst C für A, dann A für B, endlich B für C ein)

$$A \to (B \to A); \tag{16}$$

durch Abtrennung dieser Formel von (15) gewinnt man

$$(A \to B) \to (A \to A);$$

daraus durch Einsetzung von $B \to A$ für B

$$(A \to (B \to A)) \to (A \to A);$$

trennt man endlich (16) von der letzten Formel ab, so erhält man die Formel

$$A \to A,$$

woraus die verlangte Formel $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{P}_r$ durch Einsetzung von $\mathfrak{P}_r$ für A entsteht.

c) Ist $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}$ aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ ableitbar und entsteht $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A}$ durch Einsetzung einer Formel $\mathfrak{F}$ für eine Variable, die weder in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$, noch in $\mathfrak{P}_r$ vorkommt, so entsteht durch Einsetzung von $\mathfrak{F}$ für dieselbe Variable aus $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}$ die Formel $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{B}$, die dann also ebenfalls aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ ableitbar ist.

d) Sind die Formeln $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{P}_r \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ ableitbar, so ist es auch $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{B}$. In der Tat gewinnt man aus dem Axiom (I) durch Einsetzung von $\mathfrak{P}_r$ für A, dann durch gleichzeitige Einsetzung[11]) von $\mathfrak{A}$ für B und von $\mathfrak{B}$ für C die Formel

$$(\mathfrak{P}_r \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})) \to ((\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}) \to (\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{B})),$$

woraus durch Abtrennung der aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ ableitbaren Formeln $\mathfrak{P}_r \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ und $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}$ die Formel $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{B}$ entsteht. Damit ist der Hilfssatz 1 vollständig bewiesen.

Man beachte, daß beim Beweis nur die Axiome (I) und (IV) benutzt wurden; der Hilfssatz gilt also auch für andere Axiomensysteme, falls nur (I) und (IV) Axiome (oder aber ableitbare Formeln[12])) sind.

11) Eine gleichzeitige Einsetzung läßt sich leicht auf sukzessive Einsetzungen zurückführen. Z. B. hat man im vorliegenden Fall zuerst für C eine weder in $\mathfrak{A}$, noch in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ vorkommende Variable D einzusetzen; dann setze man $\mathfrak{A}$ für B und endlich $\mathfrak{B}$ für D ein.

12) Falls eine der verlangten Formeln kein Axiom, nur eine ableitbare Formel ist, so soll eine solche Ableitung für sie existieren, wobei für keine in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ vorkommende Variable eine Einsetzung erfolgt. Dies ist aber, wie man z. B. mittels der Methode der „Rückverlegung der Einsetzungen" (vgl. z. B. Hilbert—Bernays, a. a. O. [1]), S. 225) leicht zeigen kann, stets der Fall. (Natürlich wird auch hier vorausgesetzt, daß $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ die in den Axiomen figurierenden Variablen nicht enthalten.)

Hilfssatz 2. *Enthalten die Formeln $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ die Variable A, B, C nicht, und ist eine Formel $\mathfrak{A}$ sowohl aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \mathfrak{P}_r$, wie auch aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \overline{\mathfrak{P}}_r$ ableitbar, so ist $\mathfrak{A}$ auch aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ allein ableitbar.*

In der Tat ist dann nach Hilfssatz 1 sowohl die Formel $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}$, wie auch $\overline{\mathfrak{P}}_r \to \mathfrak{A}$ aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ ableitbar. Ferner gewinnt man aus dem Axiom (II) durch Einsetzung von $\mathfrak{P}_r$ für A und dann $\mathfrak{A}$ für B die Formel

$$(\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}) \to ((\overline{\mathfrak{P}}_r \to \mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}),$$

woraus durch zweimalige Abtrennung (von $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}$ und dann von $\overline{\mathfrak{P}}_r \to \mathfrak{A}$) die Formel $\mathfrak{A}$ entsteht.

Beim Beweise wurde außer Hilfssatz 1 nur das Axiom (II) benutzt; daher gilt Hilfssatz 2 für jedes Axiomensystem, in welchem (I), (II) und (IV) Axiome (oder ableitbare Formeln, vgl. [12])) sind.

8. Die wesentliche Beweisidee wird durch den folgenden Hilfssatz ausgedrückt, wobei nunmehr auch die übrigen Axiome benutzt werden.

Hilfssatz 3. *Es seien $D_1, D_2, \ldots, D_r$ beliebige[13]) von A, B, C verschiedene Variable; es sei $\mathfrak{A}$ eine Formel, die keine andere Variablen enthält als (höchstens) jene; wir bezeichnen daher $\mathfrak{A}$ auch durch $\mathfrak{A}(D_1, D_2, \ldots, D_r)$. Es seien $W_1, W_2, \ldots, W_r$ beliebige gegebene logische Werte; $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r)$ bezeichne den logischen Wert, die aus $\mathfrak{A}$ durch Einsetzung von W_1 für D_1, W_2 für $D_2, \ldots, W_r$ für D_r und Berechnung des Wertes des so entstandenen Ausdruckes mit Hilfe der Definitionen der Operationen entsteht. Es bezeichne $\mathfrak{D}_s$ für $s = 1, 2, \ldots, r$ die Formel D_s oder $\overline{D}_s$, je nachdem $W_s = \uparrow$ oder $W_s = \downarrow$. Ist nun $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$, so ist $\mathfrak{A}$, ist aber $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, so ist $\overline{\mathfrak{A}}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar.*

Wir beweisen die Behauptung a) für den Fall, daß $\mathfrak{A}$ eine Variable ist; b) falls $\mathfrak{A}$ die Negation einer Formel $\mathfrak{B}$ ist, für die

13) Sie sollen also nicht notwendig durch $D_1, D_2, \ldots, D_r$ bezeichnet werden.

die Behauptung bereits gilt; c) falls $\mathfrak{A}$ die Implikation, oder d) Konjunktion, oder e) Disjunktion, oder f) Äquivalenz zweier Formeln $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ist, für die die Behauptung gilt. Aus der Definition der Formel folgt dann, daß die Behauptung für jede Formel gültig ist.

a) Bezeichnet $\mathfrak{A}$ die Variable D_s $(s=1, 2, \ldots,$ oder $r)$, so ist $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = W_s$; für $W_s = \uparrow$ ist $\mathfrak{D}_s$ mit $\mathfrak{A}$, für $W_s = \downarrow$ mit $\overline{\mathfrak{A}}$ identisch. Also ist im ersten Fall $\mathfrak{A}$, im zweiten $\overline{\mathfrak{A}}$ eine der Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$, daher ableitbar aus denselben.[14])

b) Es gelte die Behauptung für die Formel $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ bezeichne die Formel $\overline{\mathfrak{B}}$. Da $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$ mit $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$ mit $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$ gleichbedeutend ist, ist im ersten Fall $\overline{\mathfrak{B}}$, d. h. $\mathfrak{A}$, im zweiten Fall $\mathfrak{B}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar. Aus $\mathfrak{B}$ und der Formel

$$\mathfrak{B} \to \overline{\overline{\mathfrak{B}}},$$

die aus dem Axiom (III) durch Einsetzung[15]) entsteht, gewinnt man dann weiter durch Abtrennung die Formel $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$, d. h. $\overline{\mathfrak{A}}$.

Es gelte nun die Behauptung für die Formeln $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.

c) Es bezeichne $\mathfrak{A}$ die Formel $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$. Dann gilt $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$ dann und nur dann, falls $\mathfrak{C}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$, oder $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$; im ersten Fall ist $\mathfrak{C}$, im zweiten $\overline{\mathfrak{B}}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar. Trennt man die so erhaltene Formel von der (aus (IV) bzw. (V) durch Einsetzung entstandenen) Formel

$$\mathfrak{C} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$$

bzw.

$$\overline{\mathfrak{B}} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$$

ab, so gewinnt man die Formel $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, d. h. $\mathfrak{A}$. Ist aber $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, so gilt $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$ und $\mathfrak{C}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, also sind $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar, also auch $\overline{\mathfrak{A}}$ d. h. $\overline{\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}}$, da sie durch Abtrennung von $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ aus der (aus (VI) durch Einsetzung

[14]) Auf Grund der Definition gelten die Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ selbst als aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ ableitbare Formeln.

[15]) Unter Einsetzung ist hier und im Folgenden stets eine Einsetzung für eine Variable zu verstehen, die in den jeweiligen Prämissen nicht vorkommt, bzw. eine Reihe von solchen Einsetzungen.

entstandenen) Formel

$$\mathfrak{B} \to (\overline{\mathfrak{C}} \to \overline{\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}})$$

entsteht.

d) Es bezeichne $\mathfrak{A}$ die Formel $\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}$. Falls $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$ gilt, so ist $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$ und $\mathfrak{C}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$; daher sind nach Voraussetzung $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar, also auch die Formel $\mathfrak{A}$ d. h. $\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}$, da sie aus (VII) durch Einsetzung und zweimalige Abtrennung entsteht. Falls aber $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, so ist entweder $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, oder $\mathfrak{C}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, also ist entweder $\overline{\mathfrak{B}}$, oder $\overline{\mathfrak{C}}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar; in beiden Fällen gilt dasselbe auch für $\overline{\mathfrak{A}}$, da diese Formel, d. h. $\overline{\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}}$, aus (VIII) bzw. (IX) durch Einsetzung und Abtrennung von $\overline{\mathfrak{B}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{C}}$ entsteht.

e) Es sei $\mathfrak{A}$ die Formel $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$. Ist $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$, so ist einer der Werte $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r)$, $\mathfrak{C}(W_1, W_2, \ldots, W_r)$ gleich $\uparrow$; also ist eine der Formeln $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar, also auch $\mathfrak{A}$ d. h. $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$, da diese Formel aus (X) oder (XI) durch Einsetzung und Abtrennung entsteht. Ist aber $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, so ist $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \mathfrak{C}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, also sind $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar, mithin auch $\overline{\mathfrak{A}}$, d. h. $\overline{\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}}$, da diese Formel aus (XII) durch Einsetzung und zweimalige Abtrennung entsteht.

f) Es sei endlich $\mathfrak{A}$ die Formel $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C}$. Ist $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$, so ist $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \mathfrak{C}(W_1, W_2, \ldots, W_r)$, d. h. entweder beide gleich $\uparrow$, oder beide gleich $\downarrow$. Im ersten Fall sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, im zweiten Fall $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar. Im ersten Fall setze man in (XIII), im zweiten Fall in (XVI) $\mathfrak{B}$ für A und $\mathfrak{C}$ für B ein; durch zweimalige Abtrennung erhält man jedesmal $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C}$, d. h. $\mathfrak{A}$. Ist aber $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, so ist einer der Werte $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r)$, $\mathfrak{C}(W_1, W_2, \ldots, W_r)$ gleich $\uparrow$, der andere $\downarrow$; also sind entweder $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$, oder $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{C}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar; durch Einsetzung von $\mathfrak{B}$ für A und $\mathfrak{C}$ für B in (XIV) oder (XV) und zweimalige Abtrennung erhält man jedesmal $\overline{\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C}}$, d. h. $\overline{\mathfrak{A}}$.

9. Nun gehen wir zum Beweis des Satzes über, laut dessen jede Identität eine ableitbare Formel ist. Es sei zunächst

$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(D_1, D_2, \ldots, D_r)$ eine Identität, die die Variablen A, B, C nicht, sondern nur die Variablen $D_1, D_2, \ldots, D_r$ enthält. Da, für beliebige Werte $W_1, W_2, \ldots, W_r$, $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$ ausfällt, so ist $\mathfrak{A}$ nach Hilfssatz 3 aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar, falls $\mathfrak{D}_1$ beliebig D_1 oder $\overline{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ beliebig D_2 oder $\overline{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ beliebig D_r oder $\overline{D}_r$ bedeuten kann. Wählt man also $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{r-1}$ beliebig in diesem Sinn, so ist $\mathfrak{A}$ sowohl aus $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{r-1}, D_r$, wie auch aus $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{r-1}, \overline{D}_r$, also, nach Hilfssatz 2, auch aus $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{r-1}$ als Prämissen ableitbar. Wählt man hier $\mathfrak{D}_{r-1}$ einmal D_{r-1}, das anderemal $\overline{D_{r-1}}$, so folgt analogerweise, daß $\mathfrak{A}$ auch aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{r-2}$ allein ableitbar ist, u. s. w.: in dieser Weise gelangt man endlich zur Ableitbarkeit von $\mathfrak{A}$ ohne Prämissen.

Enthält aber $\mathfrak{A}$ auch A, B, C, oder einige dieser Variablen, so ersetze man sie provisorisch durch beliebige, in $\mathfrak{A}$ ursprünglich nicht vorkommende (und natürlich von A, B, C verschiedene) Variable. Dann ist die so entstandene Formel $\mathfrak{A}'$ laut Obigem ableitbar; aus $\mathfrak{A}'$ gelangt man aber durch Einsetzung wiederum zu $\mathfrak{A}$ zurück.

10. Unser Axiomensystem (I)—(XVI) läßt hinsichtlich Einfachheit und anderen ästhetischen Gesichtspunkten viel zu wünschen übrig. So habe ich nicht untersucht, ob die Axiome voneinander unabhängig sind, oder einige aus den übrigen durch Einsetzungen und Abtrennungen abgeleitet werden können. Für die Axiome (VII)—(XVI) trifft letzteres gewiß nicht zu; man kann ja für jedes dieser Axiome eine von der üblichen abweichende Definition der entsprechenden Operation so angeben, daß das fragliche Axiom keine Identität bleibt, wohl aber alle übrigen. Bei den Axiomen (I)—(VI) versagt aber diese Methode, da die Negation und Implikation auch in den übrigen Axiomen vorkommen.

Nun habe ich das Axiomensystem (I)—(XVI) bloß zum Dienste aufgestellt, um die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls einfach beweisen zu können. Hat man ein eleganteres Axiomensystem und will man beweisen, daß dasselbe zur Ableitung aller Identitäten mit Hilfe von Einsetzungen und Abtrennungen ausreicht, so ist es bloß zu zeigen, daß die Formeln (I)—(XVI) in bezug auf jenes Axiomensystem ableitbar sind, was im allgemeinen eine geringere Mühe erfordert, als der direkte Beweis, daß das gleiche auf jede

Identität zutrifft. Dies werde ich weiter unten an einem Beispiel (allerdings bei einer gewissen Vereinfachung der Fragestellung) zeigen.

11. Der obige Beweis der Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls zeigt, daß es zur Ableitung einer Identität $\mathfrak{A}$ außer den Hilfsaxiomen (I), (II) und dem Axiom (IV) nur Axiome derjenigen Operationen nötig sind, die in $\mathfrak{A}$ vorkommen; auch können alle Zwischenformeln der Ableitung mit Hilfe von Negationen, Implikationen und den in $\mathfrak{A}$ vorkommenden Operationen aufgebaut werden. Engt man also den Begriff der Formel (und damit den Begriff der Identität) derart ein, daß nur die aus logischen Variablen mit Hilfe von Negationen und Implikationen aufgebauten Ausdrücke als Formeln gelten (wozu der Umstand Anlaß gibt, daß jede, beliebig vielgliedrige, logische Operation sich als Formel in diesem engeren Sinn darstellen läßt), so kann man behaupten, daß jede Identität aus den Identitäten (I)—(VI) mit Hilfe einer endlichen Kette von Einsetzungen und Abtrennungen abgeleitet werden kann. Bei einer Einsetzung kann dabei natürlich nur eine Formel im engeren Sinn für eine Variable eingesetzt werden. Wir werden von nun an die Wörter Formel, Identität, Einsetzung im angegebenen engeren Sinn gebrauchen.

Für dieses engere System der Identitäten wurden mehrere, recht elegante Axiomensysteme von verschiedenen Autoren aufgestellt. Als Beispiel betrachten wir das folgende Axiomensystem von Łukasiewicz:[16])

(L₁) $\quad A \to (B \to A),$

(L₂) $\quad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)),$

(L₃) $\quad (\overline{A} \to \overline{B}) \to (B \to A).$

Man bemerke, daß (L₂) mit (I) identisch ist und (L₁) sich von (IV)

[16]) Dieses Axiomensystem ist durch Vereinfachung eines von Frege stammenden Axiomensystems entstanden. Vgl. Łukasiewicz—Tarski, a. a. O. [1]), Fußnote [9]) auf S. 35. Ich habe dieses Axiomensystem statt dem noch eleganteren, ebenfalls von Łukasiewicz stammenden Axiomensystem

$$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)),$$
$$(\overline{A} \to A) \to A,$$
$$A \to (\overline{A} \to B)$$

(vgl. ebendort, Satz 6) gewählt, da das System (L₁)—(L₃) leichter mit unserem zu vergleichen ist.

nur in der Bezeichnung unterscheidet. Daraus folgt, daß diese beiden Formeln Identitäten sind; das gleiche gilt auch für (L_3). Um dies zu beweisen, genügt es nach einer früheren Bemerkung zu zeigen, daß $\overline{A} \to \overline{B} = B = \uparrow$ nur im Fall $A = \uparrow$ möglich ist. Dies folgt aber daraus, daß für $A = \downarrow$, $B = \uparrow$ $\overline{A} \to \overline{B} = \uparrow \to \downarrow = \downarrow$ ausfällt.

Wir nennen eine Formel L-ableitbar, falls sie aus den Axiomen (L_1)—(L_3) mit Hilfe einer endlicher Kette von Einsetzungen und Abtrennungen entsteht. Analog nennen wir eine Formel L-ableitbar aus gewissen Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$, falls sie aus den Axiomen (L_1)—(L_3) und den Formeln $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ mit Hilfe einer endlichen Kette von Abtrennungen und Einsetzungen für solche Variable entsteht, die in den Prämissen *nicht* vorkommen. Nach Obigem sind alle L-ableitbare Formeln Identitäten. Um den das Umgekehrte aussprechenden Satz von Łukasiewicz zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, daß die Formeln (I)—(VI) L-ableitbar sind. Da (I) mit (L_2) identisch ist und (IV) aus (L_1) durch Einsetzung entsteht, brauchen wir nur die Formeln (II), (III) (V) und (VI) zu betrachten.

Nach der Bemerkung zum Beweis des Hilfssatzes 1 gilt jener Hilfssatz auch für die L-Ableitbarkeit. Wir benötigen einen weiteren Hilfssatz, der sozusagen die indirekte Beweismethode im Axiomensystem (L_1)—(L_3) formalisiert; um diesen Hilfssatz formulieren zu können, führen wir den folgenden Begriff ein. Es seien $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ beliebige Formeln. Wir sagen, daß die Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ *widerspruchsvoll*[17]) sind, falls es eine Formel $\mathfrak{A}$ gibt, so daß sowohl $\mathfrak{A}$, wie auch $\overline{\mathfrak{A}}$ aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ L-ableitbar sind. Enthalten die widerspruchsvollen Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ die Variable A, B, C nicht[18]), so ist eine beliebige Formel $\mathfrak{B}$ aus jenen Prämissen L-ableitbar. In der Tat, aus (L_1) gewinnt man durch Einsetzung $\overline{\mathfrak{A}} \to (\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}})$, daraus durch Abtrennung von $\overline{\mathfrak{A}}$ die Formel $\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}}$; ferner gewinnt man aus (L_3) durch Einsetzung die Formel $(\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ und daraus durch Abtrennung von $\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}}$ und dann von $\mathfrak{A}$ die verlangte Formel $\mathfrak{B}$.

Schon diese einfache Bemerkung genügt, um die L-ableitbarkeit der Formel (V) mit Hilfe des Hilfssatzes 1 zu zeigen. In der Tat: die Prämissen $\overline{D}$ und D sind offenbar widerspruchsvoll, also ist die Formel E aus jenen L-ableitbar; nach Hilfssatz 1 folgt daraus die L-Ableitbarkeit der Formel $D \to E$ aus der Prämisse $\overline{D}$, daraus weiter die L-Ableitbarkeit der Formel $\overline{D} \to (D \to E)$ ohne Prämissen; aus der letzteren gewinnt man aber (V) durch Einsetzung.

17) Konsequenter sollte man *L-widerspruchsvoll* sagen; der Begriff hängt ja vom zugrunde gelegten Axiomensystem ab.

18) Wir benötigen den Begriff der widerspruchsvollen Prämissen und seine Eigenschaften nur in diesem Fall.

Unser neuer Hilfssatz lautet nun, wie folgt:

Hilfssatz 4. *Es seien $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ beliebige, die Variablen A, B, C nicht enthaltende Formeln.* a) *Sind die Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \overline{\mathfrak{P}_r}$ widerspruchsvoll, so ist die Formel $\mathfrak{P}_r$ aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ L-ableitbar.* b) *Sind die Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \mathfrak{P}_r$ widerspruchsvoll, so ist die Formel $\overline{\mathfrak{P}_r}$ aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ L-ableitbar.*

Beweis. a) Es bezeichne $\mathfrak{A}$ eine beliebige, aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ L-ableitbare Formel, etwa (L_1). Sind die Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \overline{\mathfrak{P}_r}$ widerspruchsvoll, so ist nach obiger Bemerkung die Formel $\overline{\mathfrak{A}}$ aus diesen Prämissen L-ableitbar; daher ist nach Hilfssatz 1 die Formel $\overline{\mathfrak{P}_r} \to \overline{\mathfrak{A}}$ L-ableitbar aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$. Trennt man nun diese Formel, und danach die Formel $\mathfrak{A}$, von der aus (L_3) durch Einsetzung entstandenen Formel

$$(\overline{\mathfrak{P}_r} \to \overline{\mathfrak{A}}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{P}_r)$$

ab, so gewinnt man die Formel $\mathfrak{P}_r$.

b) Wenden wir die eben bewiesene Hälfte a) des Hilfssatzes 4 auf die offenbar widerspruchsvolle Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \overline{\overline{\mathfrak{P}_r}}, \overline{\mathfrak{P}_r}$ an. Es folgt, daß die Formel $\mathfrak{P}_r$ L-ableitbar ist aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \overline{\overline{\mathfrak{P}_r}}$. Sind also die Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \mathfrak{P}_r$ widerspruchsvoll, so läßt sich aus $\mathfrak{P}_r$, aus $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ und aus den Axiomen (L_1)—(L_3) durch endlich viele weitere Abtrennungen und Einsetzungen für in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \mathfrak{P}_r$ nicht vorkommende Variable eine gewisse Formel nebst ihrer Negation gewinnen; also sind dann auch die Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \overline{\overline{\mathfrak{P}_r}}$ widerspruchsvoll. Eine nochmalige Anwendung der Hälfte a) des Hilfssatzes 4 ergibt die L-Ableitbarkeit von $\overline{\mathfrak{P}_r}$ aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$.

12. Nun können wir die L-Ableitbarkeit der Formeln (II), (III) und (VI) beweisen. Offenbar genügt es die Formeln

(II') $(D \to E) \to ((\overline{D} \to E) \to E)$,

(III') $D \to \overline{\overline{D}}$,

(VI') $D \to (\overline{E} \to \overline{D \to E})$,

aus denen die Formeln (II), (III) und (VI) durch Einsetzung entstehen, als L-ableitbar nachzuweisen. Dies können wir allein durch Anwendung der Hilfssätze 1 und 4 (und des Abtrennungsregels)[19]) wie folgt erbringen.

(II'). Die Prämissen $D \to E$, $\overline{D} \to E$, $\overline{E}$ und $\overline{D}$ sind offenbar widerspruchsvoll (aus der zweiten entsteht ja durch Abtrennung der letzten die Formel E). Daher ist, nach Hilfssatz 4, D aus den Prämissen $D \to E$, $\overline{D} \to E$, $\overline{E}$ L-ableitbar. Also sind auch diese Prämissen widerspruchsvoll; durch Abtrennung von D gewinnt man nämlich aus der ersten Prämisse $D \to E$ die Formel E. Eine nochmalige Anwendung des Hilfssatzes 4 zeigt also die L-Ableitbarkeit von E aus den Prämissen $D \to E$, $\overline{D} \to E$; hieraus folgt aber durch zweimalige Anwendung des Hilfssatzes 1, daß die Formel (II') L-ableitbar (ohne Prämissen) ist.

(III'). Die Prämissen D und $\overline{D}$ sind offenbar widerspruchsvoll; also ist nach Hilfssatz 4 die Formel $\overline{\overline{D}}$ aus der Prämisse D, daher nach Hilfssatz 1 die Formel (III') ohne Prämissen L-ableitbar.

(VI'). Betrachten wir die Formeln D, $\overline{E}$ und $D \to E$ als Prämissen. Durch Abtrennung erhält man E, also sind die genannten Prämissen widerspruchsvoll. Daraus ergibt sich nach Hilfssatz 4, daß $\overline{D \to E}$ aus den Prämissen D, $\overline{E}$, also nach Hilfssatz 1, daß (VI') ohne Prämissen L-ableitbar ist.

Damit haben wir gezeigt, daß die Formeln (I)—(VI) und damit alle Identitäten L-ableitbar sind.

13. Die hier dargelegte Methode des Axiomatisierbarkeitsbeweises läßt mehrere Anwendungen zu. So kann man mit ihrer Hilfe auch die Axiomatisierbarkeit derjenigen (von Łukasiewicz stammenden und von Wajsberg und Lindenbaum als axiomatisierbar erkannten[20])) Verallgemeinerung des gewöhnlichen (zweiwertigen) Aussagenkalküls beweisen, bei der die Rolle der beiden logischen Werte durch mehrere (aber endlich viele) verschiedene Werte übernommen wird. Ferner läßt sich die Methode (mit einer geringen Modifikation) auch zum Beweis der Axiomatisierbarkeit gewisser fragmentarischer Systeme des (zwei- oder mehrwertigen) Aussagenkalküls anwenden, die die Negation nicht enthalten. Auf diese Anwendungen werde ich noch zurückkommen.

(Eingegangen am 21. März 1935.)

[19]) Daraus folgt, daß die Formeln (II), (III) und (VI) in jedem Axiomensystem ableitbar sind, für welches die Hilfssätze 1 und 4 gültig sind und deren Schlußregeln die Einsetzung und die Abtrennung sind. Durch analoge Betrachtungen erhält man, daß dasselbe auch für die Formeln (I), (IV) und (V) zutrifft. Man kann sogar die Hilfssätze 1 und 4 als *Schlußregeln* deuten in einem Axiomensystem, wobei keine Axiome vorhanden sind, sondern man aus beliebigen Prämissen ausgehen darf; diese Schlußregeln dienen zur Elimination einer Prämisse. Auf diese Weise gelangt man zu einer Formulierung der Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls — bei Beschränkung auf Formeln, die mittels Negationen und Implikationen aufgebaut sind —, die man, bei Zugrundelegung des allgemeinen Formelbegriffs und sogar auch den sogenannten engeren Funktionenkalkül einbezogen, Gentzen verdankt. (Vgl. Gentzen, a. a. O. [10]).)

[20]) Vgl. Łukasiewicz—Tarski, a. a. O. [1]), Satz 22, S. 40.