

A «FACTORISATIO NUMERORUM» PROBLÉMÁJÁRÓL.

Bevezetés.

Az *additív számelmélet* egyik nevezetes, «partitio numerorum» néven¹ ismert problémaköre valamely n természetes számnak tetszésszerűn számú pozitív egész szám *összegeként* való előállításainak számosságára vonatkozik. E számosság EULER óta számos vizsgálat tárgyát alkotta; HARDY és RAMANUJAN² aszimptotikus képletet is adtak rá. Ezzel szemben a megfelelő *multiplikatív számelméleti* problémát, amely valamely n természetes számnak tetszésszerűn számú, 1-nél nagyobb egész szám *szorzataként* való előállításainak számosságára vonatkozik, tudomásom szerint eddig még nem tárgyalták.³

¹ Szűkebb értelmében használva e kifejezést; tágabb értelemben a partitio numerorum problémaköre felölel minden additív számelméleti kérdést.

² G. H. HARDY és S. RAMANUJAN: Asymptotic Formulae in Combinatory Analysis, *Proceedings of the London Math. Society*, (2) **XVII** (1918), 75—115. oldal, vagy Collected Papers of SRINIVASA RAMANUJAN (Cambridge, 1927), 36. cikk, 276—309. oldal. A szóbanforgó aszimptotikus képlet egyszerűbb bebizonyítására nézve I. KONRAD KNOPP: Asymptotische Formeln der additiven Zahlentheorie, *Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft, naturwissenschaftliche Klasse*, **2** (1925), 45—74. oldal.

³ Ezzel szemben annak az (egyszerűbb) additív számelméleti problémának, amely valamely n természetes számnak adott k számú egész szám összegeként való előállításainak számosságára vonatkozik, multiplikatív számelméleti analónjával «PILTZ-féle osztóprobléma» néven számos munka foglalkozik; l. pl. G. H. HARDY és J. E. LITTLEWOOD: The Approximate Functional Equation in the Theory of the Zeta-function, with Applications to the Divisor-Problems of DIRICHLET and PILTZ, *Proceedings of the London Math. Society*, (2) **XXI** (1923), 39—74. oldal.

A szóbanforgó számosságok pontos definíciójához azt is meg kell mondanunk, hogy két előállítás különbözőnek számít-e, ha csak a tagok, illetőleg a tényezők *sorrendjében* térnek el egymástól. Az additív előállítások esetén csak az a definíció vezet problémához, amelynél a tagok különböző sorrendjével felírt felbontások nem tekintendők különbözőeknek, mert a másik definíció mellett, tehát ha a tagok sorrendjére tekintettel vagyunk, a felbontások száma ⁴ — mint teljes indukcióval minden nehézség nélkül adódik — 2^{n-1} . A multiplikatív előállítások esetében azonban az előállítások számának egyik definíciója sem vezet triviális számelméleti függvényhez. Jelen dolgozatban *tekintettel* vagyok a tényezők sorrendjére is, tehát a következőképpen definiált $f(n)$ számelméleti függvényt — n «factorisatióinak» számát — vizsgálom: $f(n)$ jelenti az n számnak

$$n = n_1 n_2 \cdots n_k \quad (1)$$

alakú előállításainak számát, ahol $k = 0,^5 1,^6 2, \dots$; $n_1, n_2, \dots, n_k$ 1-nél nagyobb egész számok; végül az (1) és az

$$n = n'_1 n'_2 \cdots n'_k$$

előállítások akkor és csakis akkor tekintendők azonosnak, ha

$$k = k'; n_1 = n'_1, n_2 = n'_2, \dots, n_k = n'_k.$$

Minthogy $f(n)$ változása szabálytalan (pl. valahányszor n törzsszám, $f(n) = 1$, míg különben $f(n)$ tetszés szerint nagy értékeket is felvesz), ezért nem $f(n)$ -re magára, hanem az

$$\frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{n}$$

⁴ Beleértve az «egy tag összegére» való nem-tulajdonképpeni felbontást is.

⁵ 0-tényezős szorzat jelentése 1; ez tehát csak $n = 1$ esetén lép fel: $f(1) = 1$.

⁶ E szerint a nem-tulajdonképpeni, «egy tényező szorzatára» való felbontás is számítandó.

középértékre fogok aszimptotikus képletet adni: bebizonyítom, hogy

$$\frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n} \sim \frac{1}{\varrho R} n^{\varrho-1}, \quad (2)$$

ahol ϱ a $\zeta(s) = 2$ egyenletnek ⁷ egyetlen 1-nél nagyobb valós gyöke, ⁸ R értéke pedig

$$R = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\varrho}} = -\zeta'(\varrho).$$

A (2) aszimptotikus képlet abból a tényből fog következni, hogy az $f(n)$ számelméleti függvény generátor DIRICHLET-sora $\frac{1}{2-\zeta(s)}$, azaz

$$f(1) + \frac{f(2)}{2^s} + \frac{f(3)}{3^s} + \dots + \frac{f(n)}{n^s} + \dots = \frac{1}{2-\zeta(s)} \quad (3)$$

(l. 1. szakasz); ez az egyenlet akkor érvényes, ha az $s = \sigma + it$ komplex változó valós komponense, $\sigma > \varrho$; máskülönben a baloldalon álló sor széttartó. E generátorfüggvény a $\sigma > \varrho$ félsíkon reguláris; a $\sigma = \varrho$ egyenesen egyedüli szinguláris helye az $s = \varrho$ pólus. BOHR-nak a RIEMANN-féle ζ -függvény értékkészletére vonatkozó vizsgálataiból ⁹ következik, hogy a $\sigma = \varrho$ egyenes bármilyen kis (baloldali) környezetében vannak a $\zeta(s) = 2$ egyen-

⁷ Itt $\zeta(s)$ az s komplex változó oly értékeinél, melyeknek valós összetevője 1-nél nagyobb, a

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots$$

sorral értelmezett RIEMANN-féle ζ -függvény, ahol n^s az $e^{s \log n}$ transzcendens egész függvényt jelenti.

⁸ Ilyen gyök valóban egy és csakis egy van; ugyanis $\zeta(s)$ 1-nél nagyobb valós s értékeknél csökkenő valós folytonos függvény, az $s=1$ helyhez (jobbról) közeledve minden határon túl nő, míg $s \rightarrow \infty$ esetén 1 a határértéke.

⁹ H. BOHR: Über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$, *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse*, 1911, 409–428. oldal.

letnek gyökei, tehát a szóbanforgó generátorfüggvénynek pólusai. Ebből közvetlenül következik, hogy a (2) aszimptotikus képlet

$$\frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n} - \frac{1}{R} n^{\varrho-1} \quad (4)$$

maradéktagjára nézve nem áll fenn $O(n^\alpha)$ alakú megbecslés, ahol $\alpha < \varrho - 1$; BOHR módszerét részleteiben követve e maradéktagra még élesebb alulról való megbecsléshez lehet jutni. Úgy szólván azt az esetet illusztrálja az $f(n)$ számelméleti függvény, ami a törzsszámok eloszlásának problémájánál előállna, ha a RIEMANN-féle ζ -függvénynek — a nevezetes RIEMANN-féle sejtéssel ellentétben — a $\sigma = 1$ egyenes bármilyen kis baloldali környezetében volnának zérushelyei. Jelen dolgozatban nem foglalkozom ezekkel, a (3) függvény mélyebb függvénytani tulajdonságaiból folyó eredményekkel; mindössze az említett (2) aszimptotikus képletet fogom bebizonyítani. E közben a komplex változós függvénytannak csak a legalemibb fogalmait és tételeit fogom alkalmazni; ezeknek teljes elkerülése nem ütköznék ugyan akadályba, azonban az előálló számításbeli többlet miatt nem volna érdemes. A (4) maradéktagnak említett alulról való megbecslésére, továbbá ugyane maradéktagnak a diophantikus approximációk elmélete segítségével történő felülről való megbecslésére más helyen szándékozom visszatérni.

1. Az $f(n)$ számelméleti függvényhez tartozó DIRICHLET-SOR

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = f(1) + \frac{f(2)}{2^s} + \frac{f(3)}{3^s} + \dots + \frac{f(n)}{n^s} + \dots, \quad (5)$$

ahol $s = \sigma + it$ komplex változó. Ha s valós összetevője, σ , nagyobb, mint a $\zeta(s) = 2$ egyenlet egyetlen 1-nél nagyobb valós gyöke, ϱ , akkor e sor összetartó és összege

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{1}{2 - \zeta(s)}. \quad (6)$$

Ugyanis $\sigma > \varrho$ esetén

$$\frac{1}{2 - \zeta(s)} = \frac{1}{1 - (\zeta(s) - 1)} = \\ = 1 + (\zeta(s) - 1) + (\zeta(s) - 1)^2 + \dots + (\zeta(s) - 1)^k + \dots,$$

mert ekkor

$$|\zeta(s) - 1| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\varrho}} = \zeta(\varrho) - 1 = 1.$$

Itt, ha $\sigma > 1$,

$$(\zeta(s) - 1)^k = \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right)^k = \sum_{n_1=2}^{\infty} \sum_{n_2=2}^{\infty} \dots \sum_{n_k=2}^{\infty} \frac{1}{(n_1 n_2 \dots n_k)^s},$$

s a jobboldalon álló k -szoros végtelen sor feltétlenül össze-
tartó; egyszerű DIRICHLET-sorrá átrendezve

$$(\zeta(s) - 1)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_k(n)}{n^s}, \quad (7)$$

ahol $f_k(n)$ az n pozitív egész számnak k -tényező

$$n = n_1 n_2 \dots n_k$$

szorzat alakjában való előállításainak száma, hol $n_1, n_2, \dots, n_k$ 1-nél nagyobb egész számok és két előállítás akkor és csakis akkor számít azonosnak, ha a tényezők, sorrendre nézve is, megegyeznek.¹⁰ (7) érvényes $k = 0$ esetén is, ha $f_0(1)$ jelentése 1, különben (vagyis, ha $n > 1$), $f_0(n) = 0$. Eszerint, ha $\sigma > \varrho$,

$$\frac{1}{2 - \zeta(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_k(n)}{n^s}.$$

¹⁰ A 3. lábjegyzetben említett PILTZ-féle osztóprobléma az

$$f_k(n) + \binom{k}{1} f_{k-1}(n) + \binom{k}{2} f_{k-2}(n) + \dots + \binom{k}{k} f_0(n)$$

számelméleti függvényre vonatkozik, amelynek közvetlen jelentése az n számnak $n = n_1 n_2 \dots n_k$ alakú előállításainak száma, ahol k adott természetes szám, két, egymástól a tényezők sorrendjében eltérő előállítás különbözőnek számít és $n_1, n_2, \dots, n_k$ pozitív egész számok, megengedve az 1-et is.

E kétszeres végtelen sor $\sigma > \rho$ esetén ismét feltétlenül össze-
tartó (mert bármely tagjának abszolút értéke nem egyéb, mint
ugyane sornak megfelelő tagja az $s = \sigma$ helyen), s így egyszerű
DIRICHLET-sorrá átrendezve is összetartó és összege $\frac{1}{2 - \zeta(s)}$;
szóval (minthogy $f(n) = f_0(n) + f_1(n) + \dots + f_k(n) + \dots$ ¹¹) az (5) sor
összetartó és összegét (6) adja.

2. Az $f(n)$ számelméleti függvény közepes nagyságrendjének
megbecsléséhez használni fogok egy, az $\frac{1}{2 - \zeta(s)}$ függvénynek
a $\sigma = \rho$ egyenes jobboldali környezetében való viselkedésére vo-
natkozó egyenlőtlenséget. Ennek bebizonyítása a következő
segédítélen fog alapulni:

*Legyen t tetszőszerinti pozitív szám. Az n pozitív egész
számnak adható végtelen sok különböző*

$$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k, \dots \quad (8)$$

*érték, amelynél $\frac{t}{2\pi} \log n$ -nek a legközelebbi egész számtól való
távolsága legalább $\frac{1}{4}$; a (8) számok választhatók úgy, hogy*

$$\nu_k < \frac{e^{\frac{2\pi k}{t}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{t}}} \quad (9)$$

legyen.

Bebizonyítás: Ha g valamely egész szám és az n egész szám
teljesíti az

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g+\frac{1}{4})} \leq n \leq e^{\frac{2\pi}{t}(g+\frac{3}{4})}$$

egyenlőtlenséget, akkor

$$g + \frac{1}{4} \leq \frac{t}{2\pi} \log n \leq g + \frac{3}{4},$$

tehát n -nek megvan a kívánt tulajdonsága. Ha

¹¹ E végtelen sor csak látszólagos, mert, ha k nagyobb, mint n törzs-
tenyezőinek száma (többszörösségükkel számlálva őket), akkor $f_k(n) = 0$.

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g+\frac{3}{4})} - e^{\frac{2\pi}{t}(g+\frac{1}{4})} \geq 1,$$

akkor biztosan van ilyen n egész szám; ez pedig teljesül, amint

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g+\frac{3}{4})} \geq \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{t}}}, \quad (10)$$

tehát g -nek minden elég nagy értékénél. Legyen g_0 a legnagyobb egész szám, amely a (10) egyenlőséget nem teljesíti. Akkor

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g_0+\frac{3}{4})} < \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{t}}}, \quad (11)$$

de

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g_0+k+\frac{3}{4})} \geq \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{t}}}$$

ha $k=1, 2, 3, \dots$; a (8) pozitív egész számokat úgy választva, hogy

$$e^{\frac{2\pi}{t}(g_0+k+\frac{1}{4})} \leq \nu_k \leq e^{\frac{2\pi}{t}(g_0+k+\frac{3}{4})}$$

legyen, ezek a kívánt tulajdonsággal fognak bírni és (11) miatt a (9) egyenlőtlenségnek is megfelelnek.

3. Ha $\sigma > 1$, akkor

$$\zeta(\sigma) - \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - n^{-ti}}{n^{\sigma}},$$

$$|\zeta(\sigma) - \zeta(s)| \geq \Re(\zeta(\sigma) - \zeta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(t \log n)}{n^{\sigma}}.$$

A jobboldalon egy tag sem negatív; ha n olyan, hogy $\frac{t}{2\pi} \log n$ -nek a legközelebbi egész számtól való távolsága legalább $\frac{1}{4}$, akkor a $t \log n$ szög vagy a második, vagy a harmadik negyedben van, tehát $\cos(t \log n) \leq 0$. Így a megelőző szakaszban bebizonyított segédétel szerint

$$\begin{aligned}
 |\zeta(\sigma) - \zeta(s)| &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_k^{\sigma}} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\frac{\pi}{t}})^{\sigma}}{e^{\frac{2k\pi\sigma}{t}}} = \\
 &= \frac{(1 - e^{-\frac{\pi}{t}})^{\sigma}}{e^{\frac{2\pi\sigma}{t}} (1 - e^{-\frac{2\pi\sigma}{t}})} = e^{-\frac{3\pi\sigma}{t}} \frac{(e^{\frac{\pi}{t}} - 1)^{\sigma}}{1 - e^{-\frac{2\pi\sigma}{t}}},
 \end{aligned}$$

tehát, a minden valós x helyen érvényes $e^x \geq 1 + x$ egyenlőtlenség miatt,

$$|\zeta(\sigma) - \zeta(s)| \geq e^{-\frac{3\pi\sigma}{t}} \frac{\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\sigma}}{\frac{2\pi\sigma}{t}} = \frac{\pi^{\sigma-1}}{2\sigma} e^{-\frac{3\pi\sigma}{t}} t^{1-\sigma}. \quad (12)$$

4. Minthogy

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < 2,$$

ezért $1 < \varrho < 2$.¹² Legyen $\varrho \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 1$; akkor (12) folytán

$$|\zeta(\sigma) - \zeta(s)| \geq \frac{\pi^{\varrho-1}}{4} e^{-6\pi t^{1-\sigma}} = c_1 t^{1-\sigma},$$

ahol c_1 , (mint alább $c_2, c_3, \dots, c_8$ is) pozitív állandót jelent. Továbbá, minthogy $\sigma > 1$ esetén $\zeta(\sigma)$ csökkenő konvex függvény,¹³ ezért

$$0 \leq 2 - \zeta(\sigma) = \zeta(\varrho) - \zeta(\sigma) \leq (\varrho - \sigma) \zeta'(\varrho) = R(\sigma - \varrho),$$

ahol R , mint a bevezetésben, $-\zeta'(\varrho)$ -t jelöli. Ennélfogva

$$|2 - \zeta(s)| \geq |\zeta(\sigma) - \zeta(s)| - (2 - \zeta(\sigma)) \geq c_1 t^{1-\sigma} - R(\sigma - \varrho),$$

¹² J. P. GRAM: Tafeln für die RIEMANNSCHE Zetafunktion, *Det kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, naturvidenskabelig og matematisk Afdeling*, (VIII) 10 (1926), 313—325. oldal szerint

$$\zeta(1.7) = 2.05428 \ 87568 \dots,$$

$$\zeta(1.8) = 1.88222 \ 96181 \dots,$$

(320. oldal); tehát $1.7 < \varrho < 1.8$.

¹³ Ugyanis

$$\zeta'(\sigma) = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\sigma}} < 0, \quad \zeta''(\sigma) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^2 n}{n^{\sigma}} > 0.$$

tehát, ha

$$\sigma \geq \varrho, \quad R(\sigma - \varrho) \leq \frac{1}{2} c_1 t^{-\frac{\varrho}{2}} \quad \text{és} \quad 1 - \sigma \geq -\frac{\varrho}{2}, \quad (13)$$

akkor (minthogy ekkor $\sigma \leq 1 + \frac{\varrho}{2} < 2$)

$$|2 - \zeta(s)| \geq \frac{1}{2} c_1 t^{-\frac{\varrho}{2}}.$$

(13) áll, ha $t \geq 1$ és $\varrho \leq \sigma \leq \varrho + c_2 t^{-\frac{\varrho}{2}}$, ha csak c_2 elég kicsi; ugyanis ekkor

$$R(\sigma - \varrho) \leq R c_2 t^{-\frac{\varrho}{2}} \leq \frac{1}{2} c_1 t^{-\frac{\varrho}{2}}, \quad \text{ha} \quad c_2 \leq \frac{c_1}{2R},$$

$$1 - \sigma \geq 1 - \varrho - c_2 t^{-\frac{\varrho}{2}} \geq 1 - \varrho - c_2 \geq -\frac{\varrho}{2}, \quad \text{ha} \quad c_2 \leq 1 - \frac{\varrho}{2}.$$

Ennélfogva ekkor

$$\left| \frac{1}{2 - \zeta(s)} \right| \leq \frac{2}{c_1} t^{\frac{\varrho}{2}};$$

viszont, ha $t \geq 1$ és $\varrho + c_2 t^{-\frac{\varrho}{2}} < \sigma \leq 2$, akkor, $\zeta(\sigma)$ konvexsége miatt,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2 - \zeta(s)} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{\sigma}} = \frac{1}{2 - \zeta(\sigma)} < \\ &< \frac{1}{(\varrho - \sigma) \zeta'(\sigma)} < \frac{1}{-c_2 \zeta'(2) t^{-\frac{\varrho}{2}}} = \frac{1}{-c_2 \zeta'(2)} t^{\frac{\varrho}{2}}. \end{aligned}$$

Eszerint $\varrho \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 1$ esetén

$$\left| \frac{1}{2 - \zeta(s)} \right| \leq c_3 t^{\frac{\varrho}{2}}. \quad (14)$$

5. Az $s = \varrho$ hely a $2 - \zeta(s)$ függvénynek elsőrendű¹⁴ zérushelye, tehát reciprok értékének elsőrendű pólusa

$$\lim_{s \rightarrow \varrho} \frac{s - \varrho}{2 - \zeta(s)} = - \lim_{s \rightarrow \varrho} \frac{s - \varrho}{\zeta(s) - \zeta(\varrho)} = - \frac{1}{\zeta'(\varrho)} = \frac{1}{R}$$

reziduummal; ezért a

¹⁴ $\zeta'(\varrho) < 0$.

$$\varphi(s) = \frac{1}{2-\zeta(s)} - \frac{1}{R} \frac{1}{s-\varrho}$$

függvény, és első differenciálhányadosa is, a $\varrho \leq \sigma \leq 2$, $0 \leq t \leq 1$ téglalapon — reguláris lévén — korlátos:

$$|\varphi(s)| \leq c_4, \quad (15)$$

$$|\varphi'(s)| \leq c_5. \quad (16)$$

Másrészt, (14) miatt, $\varrho \leq \sigma \leq 2$, $t > 1$ esetén,

$$|\varphi(s)| \leq \left| \frac{1}{2-\zeta(s)} \right| + \frac{1}{R} \frac{1}{|s-\varrho|} \leq c_3 t^{\frac{\varrho}{2}} + \frac{1}{R}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} |\varphi'(s)| &= \left| \frac{\zeta'(s)}{(2-\zeta(s))^2} + \frac{1}{R} \frac{1}{(s-\varrho)^2} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{2-\zeta(s)} \right|^2 |\zeta'(s)| + \frac{1}{R} \frac{1}{|s-\varrho|^2} \leq R c_3^2 t^{\varrho} + \frac{1}{R}. \end{aligned} \quad (18)$$

(15), (16), (17) és (18) szerint, ha $\varrho \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 0$, akkor, $t \leq |s|$, $1 < \varrho \leq |s|$ miatt,

$$|\varphi(s)| \leq c_3 t^{\frac{\varrho}{2}} + \frac{1}{R} + c_4 \leq c_6 |s|^{\frac{\varrho}{2}}, \quad (19)$$

$$|\varphi'(s)| \leq R c_3^2 t^{\varrho} + \frac{1}{R} + c_5 \leq c_7 |s|^{\varrho}. \quad (20)$$

$\varphi(\bar{s}) = \overline{\varphi(s)}$ és $\varphi'(\bar{s}) = \overline{\varphi'(s)}$ miatt érvényesek a (19) és (20) egyenlőtlenségek $\varrho \leq \sigma \leq 2$, $t < 0$ esetén is, szóval $\varrho \leq \sigma \leq 2$ esetén mindig.

6. Mint ismeretes,¹⁵ ha $\sigma > 0$, $x > 0$ és k pozitív egész szám, akkor ($s = \sigma + it$)

$$\frac{k!}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^s}{s^{k+1}} dt = \begin{cases} \log^k x, & \text{ha } x \geq 1, \\ 0, & \text{ha } x \leq 1, \end{cases} \quad (21)$$

¹⁵ L. például E. LANDAU: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I. kötet, 266. oldal, ahol $\sigma=2$, ez azonban a bizonyításhoz nem lényeges; vagy E. LANDAU: Sobre los números primos en progresión aritmética, *Revista Matemática Hispano-Americana*, 5 (1923), teorema 62 (5. oldal), ahol a (21) képlet $k=1$ speciális esete van — elemi úton — bebizonyítva, amelyből az általános $k-1$ -szeres parciális integrálással adódik.

továbbá ¹⁶ $x > 1$ esetén

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^s}{s} dt = 1. \quad (22)$$

Ennélfogva, ha $\sigma > \rho$, az

$$\frac{1}{2-\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

végtelen sornak feltétlen és t -ben egyenletes összetartása ¹⁷ miatt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^s}{s^3} \frac{dt}{2-\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \frac{2!}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^3} dt = \\ &= \sum_{n \leq x} f(n) \log^2 \frac{x}{n}, \end{aligned} \quad (23)$$

ahol az összegezés jele alatt $n \leq x$ azt jelzi, hogy n az x -nél nem nagyobb pozitív egész számokat futja át; megfelelő módon értelmezendők alább is a hasonló jelölések.

7. Itt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^s}{s^3} \frac{dt}{2-\zeta(s)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s \frac{\varphi(s)}{s^3} dt + \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^s}{s^3(s-\rho)} dt.$$

A szokásos eljárással (részlettörtekre bontás) adódik, hogy

$$\frac{1}{s^3(s-\rho)} = \frac{1}{\rho^3(s-\rho)} - \frac{1}{\rho^3 s} - \frac{1}{\rho^2 s^2} - \frac{1}{\rho s^3},$$

¹⁶ E képlet a (21) képlet $k=1$, $x>1$ esetéből parciális integrációval adódik; egyébként megtalálható például a 15. lábjegyzetben idézett helyeken is, a 344., illetőleg 1. oldalon (teorema 60).

¹⁷ U. i. $\left| \frac{f(n)}{n^s} \right| = \frac{f(n)}{n^\sigma}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma}$ összetartó.

tehát, $x > 1$, $\sigma > \rho$ esetén, (21) és (22) miatt,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^s}{s^3(s-\rho)} dt &= \frac{x^\rho}{\rho^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\sigma-\rho+it}}{\sigma-\rho+it} dt - \frac{1}{\rho^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^s}{s} dt - \\ &- \frac{1}{\rho^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^s}{s^2} dt - \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^s}{s^3} dt = 2\pi \left(\frac{x^\rho}{\rho^3} - \frac{1}{\rho^3} - \frac{\log x}{\rho^2} - \frac{\log^2 x}{2\rho} \right). \end{aligned}$$

Igy, (23) szerint,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} f(n) \log^2 \frac{x}{n} &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x^s \frac{\varphi(s)}{s^3} dt + \frac{2x^\rho - 2 - 2\rho \log x - \rho^2 \log^2 x}{\rho^3 R}. \end{aligned} \quad (24)$$

8. Itt, parciálisan integrálva,

$$\begin{aligned} \int_{-\omega}^{+\omega} x^s \frac{\varphi(s)}{s^3} dt &= \frac{1}{i \log x} \left(x^{\sigma+i\omega} \frac{\varphi(\sigma+i\omega)}{(\sigma+i\omega)^3} - x^{\sigma-i\omega} \frac{\varphi(\sigma-i\omega)}{(\sigma-i\omega)^3} \right) - \\ &- \frac{1}{\log x} \int_{-\omega}^{+\omega} x^s \left(\frac{\varphi(s)}{s^3} \right)' dt, \end{aligned}$$

tehát, minthogy $\omega \rightarrow \infty$ esetén, (19) miatt,

$$\left| x^{\sigma \pm i\omega} \frac{\varphi(\sigma \pm i\omega)}{(\sigma \pm i\omega)^3} \right| = x^\sigma \left| \frac{\varphi(\sigma + i\omega)}{(\sigma + i\omega)^3} \right| \leq c_6 x^\sigma |\sigma + i\omega|^{\frac{\ell}{2}-3} \rightarrow 0,$$

ezért

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^s \frac{\varphi(s)}{s^3} dt = \frac{1}{\log x} \int_{-\infty}^{+\infty} x^s \left(3 \frac{\varphi(s)}{s^4} - \frac{\varphi'(s)}{s^3} \right) dt.$$

Ennélfogva, a (19) és (20) egyenlőtlenségeket alkalmazva,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^s \frac{\varphi(s)}{s^3} dt \right| &\leq \frac{x^\sigma}{\log x} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(3 \frac{|\varphi(s)|}{|s|^4} + \frac{|\varphi'(s)|}{|s|^3} \right) dt \leq \\
&\leq \frac{x^\sigma}{\log x} \int_{-\infty}^{+\infty} (3c_6 |s|^{\frac{\varrho}{2}-4} + c_7 |s|^{\varrho-3}) dt \leq \\
&\leq (3c_6 + c_7) \frac{x^\sigma}{\log x} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varrho + it|^{\varrho-3} dt = c_8 \frac{x^\sigma}{\log x}, \quad (25)
\end{aligned}$$

mert $\frac{\varrho}{2} - 4 < \varrho - 3 < 0$; a legutolsó integrál (s így a többi is) konvergens, mert $\varrho - 3 < -1$. (25) mindig érvényes, ha $\sigma > \varrho$; ezért, σ -t ϱ -hoz közelítve,

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^s \frac{\varphi(s)}{s^3} dt \right| \leq c_8 \frac{x^\varrho}{\log x},$$

s így, ha $x \rightarrow \infty$,

$$x^{-\varrho} \int_{-\infty}^{+\infty} x^s \frac{\varphi(s)}{s^3} dt \rightarrow 0.$$

Tehát, figyelemmel (24)-re, adódik, hogy $x \rightarrow \infty$ esetén

$$x^{-\varrho} \sum_{n \leq x} f(n) \log^2 \frac{x}{n} \rightarrow \frac{2}{\varrho^3 R}. \quad (26)$$

9. Legyen $\lambda > 1$; továbbá, rövidítésképpen,

$$\Phi_\lambda(x) = \sum_{n \leq \lambda^2 x} f(n) \log^2 \frac{\lambda^2 x}{n} - 2 \sum_{n \leq \lambda x} f(n) \log^2 \frac{\lambda x}{n} + \sum_{n \leq x} f(n) \log^2 \frac{x}{n};$$

(26) miatt $x \rightarrow \infty$ esetén

$$x^{-\varrho} \Phi_\lambda(x) \rightarrow \frac{2}{\varrho^3 R} (\lambda^{2\varrho} - 2\lambda^\varrho + 1). \quad (27)$$

Másrészt azonban

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(x) &= \sum_{n \leq x} f(n) \left(\log^2 \frac{\lambda^2 x}{n} - 2 \log^2 \frac{\lambda x}{n} + \log^2 \frac{x}{n} \right) + \\
&+ \sum_{x < n \leq \lambda x} f(n) \left(\log^2 \frac{\lambda^2 x}{n} - 2 \log^2 \frac{\lambda x}{n} \right) + \sum_{\lambda x < n \leq \lambda^2 x} f(n) \log^2 \frac{\lambda x}{n}.
\end{aligned}$$

Itt

$$\begin{aligned}\log^3 \frac{\lambda^2 x}{n} - 2 \log^2 \frac{\lambda x}{n} + \log^2 \frac{x}{n} &= \\ &= \left(\log \frac{x}{n} + 2 \log \lambda \right)^2 - 2 \left(\log \frac{x}{n} + \log \lambda \right)^2 + \log^2 \frac{x}{n} = \\ &= 2 \log^2 \lambda,\end{aligned}$$

s innét

$$\log^3 \frac{\lambda^2 x}{n} - 2 \log^2 \frac{\lambda x}{n} \leq 2 \log^2 \lambda,$$

továbbá $x < n \leq \lambda x$ esetén

$$\begin{aligned}\log^3 \frac{\lambda^2 x}{n} - 2 \log^2 \frac{\lambda x}{n} &\geq \log^3 \frac{\lambda^2 x}{n} - \left(2 \log \frac{\lambda x}{n} \right)^2 = \\ &= \log^3 \frac{\lambda^2 x}{n} - \log^2 \frac{\lambda^2 x^2}{n^2} \geq 0;\end{aligned}$$

$\lambda x < n \leq \lambda^2 x$ esetén pedig

$$0 \leq \log^3 \frac{\lambda^2 x}{n} \leq \log^2 \lambda \leq 2 \log^2 \lambda.$$

Ezért

$$2 \log^2 \lambda \sum_{n \leq x} f(n) \leq \Phi_\lambda(x) \leq 2 \log^2 \lambda \sum_{n \leq \lambda^2 x} f(n),$$

azaz

$$\frac{\left(\frac{x}{\lambda^2} \right)^{-e} \Phi_\lambda \left(\frac{x}{\lambda^2} \right)}{2 \lambda^{2e} \log^2 \lambda} \leq x^{-e} \sum_{n \leq x} f(n) \leq \frac{x^{-e} \Phi_\lambda(x)}{2 \log^2 \lambda}.$$

Ha $x \rightarrow \infty$, (27) folytán ezek az $x^{-e} \sum_{n \leq x} f(n)$ -re talált korlátok rendre az

$$\frac{1}{\varrho^3 R} \frac{\lambda^{2e} - 2\lambda^e + 1}{\lambda^{2e} \log^2 \lambda} \quad \text{és} \quad \frac{1}{\varrho^3 R} \frac{\lambda^{2e} - 2\lambda^e + 1}{\log^2 \lambda}$$

határértékekhez közelednek; ennél fogva $x^{-e} \sum_{n \leq x} f(n)$ minden sűrűsödési helye ezek közé esik. Ez igaz minden 1-nél nagyobb λ -ra; minthogy $\lambda \rightarrow 1$, azaz $\log \lambda = h \rightarrow 0$ esetén

$$\frac{\lambda^{2\varrho} - 2\lambda^\varrho + 1}{\log^2 \lambda} = \frac{e^{2h\varrho} - 2e^{h\varrho} + 1}{h^2} \rightarrow \frac{d^2(e^{y\varrho})}{dy^2} \Big|_{y=0} = \varrho^2,$$

s így egyúttal

$$\frac{\lambda^{2\varrho} - 2\lambda^\varrho + 1}{\lambda^{2\varrho} \log^2 \lambda} \rightarrow \varrho^2,$$

ezért $x \rightarrow \infty$ esetén

$$x^{-\varrho} \sum_{n \leq x} f(n) \rightarrow \frac{1}{\varrho^3 R} \varrho^2 = \frac{1}{\varrho R},$$

aminek a bevezetésben kimondott (2) aszimptotikus képlet evidens következménye.

Szeged, 1930. május 25.

Kalmár László.

UBER DAS PROBLEM DER «FACTORISATIO NUMERORUM».

In der vorliegenden Arbeit wird der asymptotische Verlauf der zahlentheoretischen Funktion $f(n)$ untersucht, welche als die Anzahl der Darstellungen von n in der Form

$$n = n_1 n_2 \dots n_k \tag{1}$$

definiert wird, wobei $k=0, 1, 2, \dots$, ferner $n_1, n_2, \dots, n_k$ beliebige ganze Zahlen >1 sind. Dabei bedeutet das Produkt (1) im Falle $k=0$ Eins; ferner sind zwei Darstellungen (1) auch dann als verschieden zu betrachten, wenn sie sich bloss in der Reihenfolge der Faktoren unterscheiden. Die zahlentheoretische Funktion $f(n)$ ist ein multiplikativ-zahlentheoretisches Analogon der Anzahl der unbeschränkten Partitionen von n .

Es wird für $f(n)$ die asymptotische Formel

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) \sim \frac{n^\varrho}{-\varrho \zeta'(\varrho)}$$

hergeleitet, wobei ϱ durch $\varrho > 1$, $\zeta(\varrho) = 2$ definiert ist.

László Kalmár.