

Megjegyzés a halmazelmélet Gödel-féle axiómarendszeréhez¹ I.

HAJNAL ANDRÁS ÉS KALMÁR LÁSZLÓ

I. Jelen dolgozat a halmazelmélet GÖDEL-féle axiómarendszerének² egyszerűsítésével foglalkozik; ugyanis megmutatjuk, hogy ennek az axiómarendszerének egyik axiómája felesleges, mert a többi axióma segítségével bebizonyítható. Bevezetésül ismertetjük a halmazelmélet GÖDEL-féle axiómarendszerét és viszonyát a halmazelmélet többi axiómarendszeréhez.

A halmazelmélet axiomatizálását azok a logikai ellentmondások, ún. antinómiák³ tették szükségessé, amelyek a halmazelmélet eredeti, ún. naiv felépítése során felléptek. A naiv halmazelméletben magától értetődőnek tartjuk azt az elvet, hogy minden T tulajdonsághoz létezik olyan halmaz, amely azokból és csak azokból az elemekből áll, amelyeknek megvan a T tulajdonságuk. Ha pl. T gyanánt azt a tulajdonságot választjuk, amely akkor és csak akkor van meg egy x dolognak (elemnek), ha x olyan halmaz, amely a saját elemei között nem szerepel, akkor az önmagukat nem tartalmazó halmazok halmazához jutunk, amely az ismert módon az ún. RUSSELL-féle antinómiához⁴ vezet.

A halmazelmélet történetileg első, ZERMELO-féle axiómarendszerében⁵ ennek az elvnek az ún. részhalmazaxióma⁶ felel meg,

¹ Ez a dolgozat HAJNAL ANDRÁS készülő kandidátusi disszertációjának megbeszélése során keletkezett. KALMÁR LÁSZLÓ előadta 1955. szeptember 21-én a Bolyai János Matematikai Társulat balatonvilágosi számelméleti és kombinatorikai kollokviumán „Egy kombinatorikus okoskodás az axiómatikus halmazelméletben” címmel. Angol változata, kissé más beállításban, a *Publicationes Mathematicae*-ben jelenik meg.

² Lásd GÖDEL [1], 3–6. oldal. (A nevek után szögletes zárójelbe tett számok a dolgozat végén található irodalomra utalnak.)

³ A halmazelmélet itt felhasznált fogalmai, valamint a halmazelmélet antinómiái megismerhetők pl. FRAENKEL [5]-ből, vagy KALMÁR [1]-ből.

⁴ RUSSELL [1], 101–107. oldal; lásd még FRAENKEL [5], 3. kiadás, 210–213. oldal, vagy KALMÁR [1], 242–246. oldal.

⁵ ZERMELO [1], 262–267. oldal.

⁶ Zermelonál (és Fraenkelnél): Aussonderungsaxiom.

amely szerint tetszőleges H halmazhoz és tetszőleges, H elemeire értelmezett T tulajdonsághoz⁷ van olyan H' halmaz, amely a H halmaznak azokból és csak azokból az elemeiből áll, amelyeknek megvan a T tulajdonságuk. Ez az axióma sok tekintetben pótolja az említett elvet, azonban (legalább is ahhoz hasonló módon) nem vezet a halmazelmélet (ismert) antinómiáihoz⁸. Ugyanis pl. avégett, hogy ennek az axiómának segítségével az önmagukat nem tartalmazó halmazok halmazához jussunk, előbb egy olyan „majoráns” H halmazra volna szükségünk, amely minden önmagát nem tartalmazó halmazt eleme gyanánt tartalmaz, pl. az összes dolgok, vagy az összes halmazok halmazára; már pedig a ZERMELO-féle axiómák egyike sem állítja ilyen halmaz létezését, és nem is látszik semmiféle mód, ahogyan ilyen halmaz létezése következne belőlük. Hasonlóan, a BURALI-FORTI-féle antinómiát⁹ azáltal kerüli el a ZERMELO-féle axiómarendszer, hogy nem tartalmaz olyan axiómát, amely az összes rendszámok halmazának létezését állítaná és úgy látszik, hogy e halmaz létezése közvetett úton sem következik belőlük.

A ZERMELO-féle axiómarendszernek számos fogyatéka van. Mindenekelőtt használja a (definit) tulajdonság fogalmát, pedig ez a fogalom nem tartozik az axiómarendszer alapfogalmai közé és ZERMELO nem is definiálja ezt a fogalmat azok segítségével¹⁰. Továbbá a ZERMELO-féle axiómarendszer nem alkalmas bizonyos nagy, pl. $c + 2^c + 2^{2^c} + \dots$ számosságú halmazok létezésének bebizonyítására, ahol c a kontinuum számossága. Végül az a körülmény, hogy a halmazelmélet ZERMELO-féle axiómatikus felépítésében másféle összességekről nem lehet beszélni, mint halmazokról, már pedig az axiómák nem kívánják meg az összes halmazok, vagy az összes rendszámok halmazának létezését (hacsak nem lép fel a RUSSELL-féle ill. a BURALI-FORTI-féle antinómia mégis csak a ZERMELO-féle axiómatikus halmazelméletben), nehézkessé teszi a halmazelmélet felépítését a ZERMELO-féle axiómák alapján, hiszen e fel-

⁷ ZERMELO definit tulajdonságról beszél, azonban nem mondja meg világosan, mit jelent ez a jelző (lásd a 10. jegyzetet is).

⁸ Az a kérdés, hogy a ZERMELO-féle, vagy valamely másik, a halmazelmélet felépítésére alkalmas axiómarendszer más úton sem vezethet-e az ismert antinómiák valamelyikéhez, vagy pedig új antinómiához, más szóval, hogy ellentmondástalan-e, még nincs eldöntve.

⁹ BURALI-FORTI [1]; lásd még FRAENKEL [5], 3. kiadás, 210–213. oldal, vagy KALMÁR [1], 250. oldal.

¹⁰ ZERMELO következő szavai: Eine Frage oder Aussage E über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden, heißt „definit“, nem tekinthető a definit tulajdonság (kérdés, állítás) szabatos definíciójának.

Megjegyzés a halmazelmélet Gödel-féle axiómarendszeréhez¹ I.

HAJNAL ANDRÁS és KALMÁR LÁSZLÓ

1. Jelen dolgozat a halmazelmélet GÖDEL-féle axiómarendszerének² egyszerűsítésével foglalkozik; ugyanis megmutatjuk, hogy ennek az axiómarendszerének egyik axiómája felesleges, mert a többi axióma segítségével bebizonyítható. Bevezetésül ismertetjük a halmazelmélet GÖDEL-féle axiómarendszerét és viszonyát a halmazelmélet többi axiómarendszeréhez.

A halmazelmélet axiomatizálását azok a logikai ellentmondások, ún. antinómiák³ tették szükségessé, amelyek a halmazelmélet eredeti, ún. naiv felépítése során felléptek. A naiv halmazelméletben magától értetődőnek tartjuk azt az elvet, hogy minden T tulajdonsághoz létezik olyan halmaz, amely azokból és csak azokból áll, amelyeknek megvan a T tulajdonságuk. Ha pl. T gyanánt azt a tulajdonságot választjuk, amely akkor és csak akkor van meg egy x dolognak (elemnek), ha x olyan halmaz, amely a saját elemei között nem szerepel, akkor az önmagukat nem tartalmazó halmazok halmazához jutunk, amely az ismert módon az ún. RUSSELL-féle antinómiához⁴ vezet.

A halmazelmélet történetileg első, ZERMELO-féle axiómarendszerében⁵ ennek az elvnek az ún. részhalmazaxióma⁶ felel meg,

¹ Ez a dolgozat HAJNAL ANDRÁS készülő kandidátusi disszertációjának megbeszélése során keletkezett. KALMÁR LÁSZLÓ előadta 1955. szeptember 21-én a Bolyai János Matematikai Társulat balatonvilágosi számelméleti és kombinatorikai kollokviumán „Egy kombinatorikus okoskodás az axiómatikus halmazelméletben” címmel. Angol változata, kissé más beállításban, a *Publicationes Mathematicae*-ben jelenik meg.

² Lásd GÖDEL [1], 3–6. oldal. (A nevek után szögletes zárójelbe tett számok a dolgozat végén található irodalomra utalnak.)

³ A halmazelmélet itt felhasznált fogalmai, valamint a halmazelmélet antinómiái megismerhetők pl. FRAENKEL [5]-ből, vagy KALMÁR [1]-ből.

⁴ RUSSELL [1], 101–107. oldal; lásd még FRAENKEL [5], 3. kiadás, 210–213. oldal, vagy KALMÁR [1], 242–246. oldal.

⁵ ZERMELO [1], 262–267. oldal.

⁶ Zermelonál (és Fraenkelnél): Aussonderungsaxiom.

amely szerint tetszőleges H halmazhoz és tetszőleges, H elemeire értelmezett T tulajdonsághoz⁷ van olyan H' halmaz, amely a H halmaznak azokból és csak azokból az elemeiből áll, amelyeknek megvan a T tulajdonságuk. Ez az axióma sok tekintetben pótolja az említett elvet, azonban (legalább is ahhoz hasonló módon) nem vezet a halmazelmélet (ismert) antinómiáihoz⁸. Ugyanis pl. avégett, hogy ennek az axiómának segítségével az önmagukat nem tartalmazó halmazok halmazához jussunk, előbb egy olyan „majoráns” H halmazra volna szükségünk, amely minden önmagát nem tartalmazó halmazt eleme gyanánt tartalmaz, pl. az összes dolgok, vagy az összes halmazok halmazára; már pedig a ZERMELO-féle axiómák egyike sem állítja ilyen halmaz létezését, és nem is látszik semmiféle mód, ahogyan ilyen halmaz létezése következne belőlük. Hasonlóan, a BURALI-FORTI-féle antinómiát⁹ azáltal kerüli el a ZERMELO-féle axiómarendszer, hogy nem tartalmaz olyan axiómát, amely az összes rendszámok halmazának létezését állítaná és úgy látszik, hogy e halmaz létezése közvetett úton sem következik belőlük.

A ZERMELO-féle axiómarendszernek számos fogyatékossága van. Mindenekelőtt használja a (definit) tulajdonság fogalmát, pedig ez a fogalom nem tartozik az axiómarendszer alapfogalmai közé és ZERMELO nem is definiálja ezt a fogalmat azok segítségével¹⁰. Továbbá a ZERMELO-féle axiómarendszer nem alkalmas bizonyos nagy, pl. $c + 2^c + 2^{2^c} + \dots$ számosságú halmazok létezésének bebizonyítására, ahol c a kontinuum számossága. Végül az a körülmény, hogy a halmazelmélet ZERMELO-féle axiómatikus felépítésében másféle összezségekéről nem lehet beszélni, mint halmazokról, már pedig az axiómák nem kívánják meg az összes halmazok, vagy az összes rendszámok halmazának létezését (hacsak nem lép fel a RUSSELL-féle ill. a BURALI-FORTI-féle antinómia mégis csak a ZERMELO-féle axiómatikus halmazelméletben), nehézkessé teszi a halmazelmélet felépítését a ZERMELO-féle axiómák alapján, hiszen e fel-

⁷ ZERMELO definit tulajdonságról beszél, azonban nem mondja meg világosan, mit jelent ez a jelző (lásd a 10. jegyzetet is).

⁸ Az a kérdés, hogy a ZERMELO-féle, vagy valamely másik, a halmazelmélet felépítésére alkalmas axiómarendszer más úton sem vezethet-e az ismert antinómiák valamelyikéhez, vagy pedig új antinómiához, más szóval, hogy ellentmondástalan-e, még nincs eldöntve.

⁹ BURALI-FORTI [1]; lásd még FRAENKEL [5], 3. kiadás, 210–213. oldal, vagy KALMÁR [1], 250. oldal.

¹⁰ ZERMELO következő szavai: Eine Frage oder Aussage E über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden, heißt „definit“, nem tekinthetők a definit tulajdonság (kérdés, állítás) szabatos definíciójának.

Megjegyzés a halmazelmélet Gödel-féle axiómarendszeréhez¹ I.

HAJNAL ANDRÁS és KALMÁR LÁSZLÓ

I. Jelen dolgozat a halmazelmélet GÖDEL-féle axiómarendszerének² egyszerűsítésével foglalkozik; ugyanis megmutatjuk, hogy ennek az axiómarendszerének egyik axiómája felesleges, mert a többi axióma segítségével bebizonyítható. Bevezetésül ismertetjük a halmazelmélet GÖDEL-féle axiómarendszerét és viszonyát a halmazelmélet többi axiómarendszeréhez.

A halmazelmélet axiomatizálását azok a logikai ellentmondások, ún. antinómiák³ tették szükségessé, amelyek a halmazelmélet eredeti, ún. naiv felépítése során felléptek. A naiv halmazelméletben magától értetődőnek tartjuk azt az elvet, hogy minden T tulajdonsághoz létezik olyan halmaz, amely azokból és csak azokból az elemekből áll, amelyeknek megvan a T tulajdonságuk. Ha pl. T gyanánt azt a tulajdonságot választjuk, amely akkor és csak akkor van meg egy x dolognak (elemnek), ha x olyan halmaz, amely a saját elemei között nem szerepel, akkor az önmagukat nem tartalmazó halmazok halmazához jutunk, amely az ismert módon az ún. RUSSELL-féle antinómiához⁴ vezet.

A halmazelmélet történetileg első, ZERMELO-féle axiómarendszerében⁵ ennek az elvnek az ún. részhalmazaxióma⁶ felel meg,

¹ Ez a dolgozat HAJNAL ANDRÁS készülő kandidátusi disszertációjának megbeszélése során keletkezett. KALMÁR LÁSZLÓ előadta 1955. szeptember 21-én a Bolyai János Matematikai Társulat balatonvilágosi számelméleti és kombinatorikai kollokviumán „Egy kombinatorikus okoskodás az axiómatikus halmazelméletben” címmel. Angol változata, kissé más beállításban, a *Publicationes Mathematicae*-ben jelenik meg.

² Lásd GÖDEL [1], 3–6. oldal. (A nevek után szögletes zárójelbe tett számok a dolgozat végén található irodalomra utalnak.)

³ A halmazelmélet itt felhasznált fogalmai, valamint a halmazelmélet antinómiái megismerhetők pl. FRAENKEL [5]-ből, vagy KALMÁR [1]-ből.

⁴ RUSSELL [1], 101–107. oldal; lásd még FRAENKEL [5], 3. kiadás, 210–213. oldal, vagy KALMÁR [1], 242–246. oldal.

⁵ ZERMELO [1], 262–267. oldal.

⁶ Zermelonál (és Fraenkelnél): Aussonderungsaxiom.

amely szerint tetszőleges H halmazhoz és tetszőleges, H elemeire értelmezett T tulajdonsághoz⁷ van olyan H' halmaz, amely a H halmaznak azokból és csak azokból az elemeiből áll, amelyeknek megvan a T tulajdonságuk. Ez az axióma sok tekintetben pótolja az említett elvet, azonban (legalább is ahhoz hasonló módon) nem vezet a halmazelmélet (ismert) antinómiáihoz⁸. Ugyanis pl. avégett, hogy ennek az axiómának segítségével az önmagukat nem tartalmazó halmazok halmazához jussunk, előbb egy olyan „majoráns” H halmazra volna szükségünk, amely minden önmagát nem tartalmazó halmazt eleme gyanánt tartalmaz, pl. az összes dolgok, vagy az összes halmazok halmazára; már pedig a ZERMELO-féle axiómák egyike sem állítja ilyen halmaz létezését, és nem is látszik semmiféle mód, ahogyan ilyen halmaz létezése következne belőlük. Hasonlóan, a BURALI-FORTI-féle antinómiát⁹ azáltal kerüli el a ZERMELO-féle axiómarendszer, hogy nem tartalmaz olyan axiómát, amely az összes rendszámok halmazának létezését állítaná és úgy látszik, hogy e halmaz létezése közvetett úton sem következik belőlük.

A ZERMELO-féle axiómarendszernek számos fogyatéka van. Mindenekelőtt használja a (definit) tulajdonság fogalmát, pedig ez a fogalom nem tartozik az axiómarendszer alapfogalmai közé és ZERMELO nem is definiálja ezt a fogalmat azok segítségével¹⁰. Továbbá a ZERMELO-féle axiómarendszer nem alkalmas bizonyos nagy, pl. $c + 2^c + 2^{2^c} + \dots$ számosságú halmazok létezésének bebizonyítására, ahol c a kontinuum számossága. Végül az a körülmény, hogy a halmazelmélet ZERMELO-féle axiómatikus felépítésében másféle összességekről nem lehet beszélni, mint halmazokról, már pedig az axiómák nem kívánják meg az összes halmazok, vagy az összes rendszámok halmazának létezését (hacsak nem lép fel a RUSSELL-féle ill. a BURALI-FORTI-féle antinómia mégis csak a ZERMELO-féle axiómatikus halmazelméletben), nehézkessé teszi a halmazelmélet felépítését a ZERMELO-féle axiómák alapján, hiszen e fel-

⁷ ZERMELO definit tulajdonságról beszél, azonban nem mondja meg világosan, mit jelent ez a jelző (lásd a 10. jegyzetet is).

⁸ Az a kérdés, hogy a ZERMELO-féle, vagy valamely másik, a halmazelmélet felépítésére alkalmas axiómarendszer más úton sem vezethet-e az ismert antinómiák valamelyikéhez, vagy pedig új antinómiához, más szóval, hogy ellentmondástalan-e, még nincs eldöntve.

⁹ BURALI-FORTI [1]; lásd még FRAENKEL [5], 3. kiadás, 210–213. oldal, vagy KALMÁR [1], 250. oldal.

¹⁰ ZERMELO következő szavai: Eine Frage oder Aussage E über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden, heißt „definit“, nem tekinthető a definit tulajdonság (kérdés, állítás) szabatos definíciójának.

építésben nem szabad a halmazok, vagy a rendszámok összességéről beszélni.

Az első két fogyatékoság kiküszöbölése végett FRAENKEL módosította a ZERMELO-féle axiómarendszert¹¹. Ami a (definit) tulajdonság fogalmát illeti, FRAENKEL észrevette, hogy a halmazelmélet axiómatikus felépítéséhez elég a részhalmaz-axiómát abban az esetben alkalmazni, amikor a H halmaz valamely tetszőleges x elemének T tulajdonsága abban áll, hogy valamely x -től függő $F(x)$ halmaz eleme valamely x -től függő $G(x)$ halmaznak, vagy abban, hogy $F(x)$ nem eleme $G(x)$ -nek, vagy abban, hogy $F(x)$ ugyanaz a halmaz, mint $G(x)$, vagy pedig abban, hogy $F(x)$ nem ugyanaz, mint $G(x)$, és a részhalmaz-axiómát csak ilyen tulajdonságokra mondta ki. Ezzel újabb nehézség lépett fel: definiálni kellett, mit értünk egy H halmaz valamely tetszőleges x elemétől függő $F(x)$ halmazon, más szóval, a H halmazon értelmezett, halmazelméleti értelemben vett függvényen¹². Ezt a nehézséget FRAENKEL azzal küzdötte le, hogy a függvény fogalmát rekurzív módon definiálta.¹³ Nem világos eleve, hogy az ilyen definíció jogos¹⁴; azonban matematikai logikai megfontolások mutatják, hogy ha nem is olyan értelemben jogos, mintha a függvény fogalmának a halmazelmélet alapfogalmai segítségével történő, halmazelméleti definíciója volna, de olyan értelemben elfogadható, hogy annak a definíciójához tar-

¹¹ FRAENKEL [4], továbbá [5], 3. kiadás, 285–288. oldal; [6], 253–255. és 271. oldal; [7], 103–115. oldal. A részhalmaz-axióma FRAENKEL által szabatosan kimondott alakja már FRAENKEL [3]-ban, a pótlás axiómája pedig már FRAENKEL [2]-ben (speciálisabb alakban már FRAENKEL [1]-ben) szerepel.

Annak a kérdésnek tárgyalásába, hogy mi a célja FRAENKEL azon további változtatásának, amely abban áll, hogy ZERMELO egyik axiómájának, a meghatározottság axiómájának módosításával kizárja olyan elemek létezését, amelyek nem halmazok, és hogy helyeselhető-e ez a cél, most nem megyek bele.

¹² Minthogy a FRAENKEL-féle axiómarendszerben nincs (és nem is lehet) szó más elemről, mint halmazról (lásd az előző jegyzetet), magától értetődik, hogy a függvények értékei is halmazok.

¹³ A függvény fogalmának az a (nem rekurzív, halmazelméleti) definíciója, amely szerint függvényen olyan halmazt értünk, amelynek minden eleme rendezett pár és nincs két olyan eleme, amelynek második komponense közös, első komponense azonban nem (e definíció az F függvénynek az összes $\langle F(x), x \rangle$ alakú rendezett párok halmazával való azonosításán alapul, ahol x átfutja az F függvény értelmezési tartományát), nem bizonyul e célra elegendőnek, mert a halmazelmélet FRAENKEL-féle axiómái nem biztosítják a részhalmaz-axióma szükséges alkalmazásainak megfelelő valamennyi, ilyen értelemben vett függvény létezését. Pl. annak a függvénynek, amely mindenütt értelmezve van és értéke az x helyen x -szel egyenlő, az összes $\langle x, x \rangle$ alakú rendezett párok összessége felelne meg; azonban ez az összesség, hasonló módon, mint az összes halmazok összessége, ellentmondásra vezetne.

¹⁴ A rekurzív definíció jogosságának halmazelméleti bizonyításához szükség van a részhalmaz-axiómára.

tozik, hogy mik a halmazelmélet axiómái. E felfogásban a részhalmaz-axióma nem egy, hanem végtelen sok axióma: bármely két (adott sorrendben megadott) F és G függvényhez négy részhalmaz-axióma tartozik. Eszerint a halmazelmélet FRAENKEL-féle axiómarendszere végtelen sok axiómából áll¹⁵.

Ami a $c + 2^c + 2^{2^c} + \dots$ és nagyobb számosságú halmazokat illeti, FRAENKEL ezek létezését egy új axiómának, a pótlás axiómájának a ZERMELO-féle axiómarendszerhez csatolásával biztosítja. Ez az axióma azt mondja ki, hogy minden H halmazhoz és minden, H elemeire értelmezett F függvényhez létezik olyan K halmaz, amely úgy keletkezik, hogy H minden egyes x elemét a megfelelő, x -től függő $F(x)$ elemmel pótoljuk. Ez az axióma szintén a függvény fogalmán alapul, tehát ismét voltaképpen végtelen sok (minden egyes F függvényhez más és más) axióma. NEUMANN rámutatott, hogy ezek az axiómák csak akkor nem bizonyíthatók be mind a többi axiómák alapján, ha a függvényfogalom rekurzív definícióját is módosítjuk; azonban megfelelő módosítás után a pótlás (végtelen sok) axiómája segítségével nemcsak az eredeti célt, a nagy számosságú halmazok létezésének bizonyítását lehet elérni, hanem a rendszámok és a számosságok elméletét is fel lehet építeni¹⁶.

A harmadik fogyatékoság az axiómarendszer FRAENKEL-féle módosítása ellenére is megmarad: a halmazok, vagy a rendszámok összességéről a FRAENKEL-féle axiómarendszerben sem lehet beszélni. Pl. a transzfinit indukcióval való bizonyítás jogosságát, vagyis azt, hogy ha valamely, tetszőleges α rendszámra vonatkozó állítás igaz a 0 rendszámra és valahányszor igaz minden olyan rendszámra, amely kisebb valamely α rendszámnál, mindannyiszor α -ra is igaz, akkor ez az állítás minden α rendszámra igaz, a halmazelmélet FRAENKEL-féle axiómatikus felépítésében nem lehet a következő egyszerű, a naiv halmazelméletből ismert módon indokolni. Tekintsük azon rendszámok összességét, amelyre a kérdéses állítás nem igaz. Ha ez az összesség nem volna üres, akkor, mint az összes rendszámok nagyság szerint jólrendezett összessége rész-

¹⁵ Hasonló értelemben végtelen sok axiómából áll pl. az aritmetika PEANO-féle axiómarendszere, hiszen a teljes indukció axiómája, az „állítás” fogalmának mint általános, az aritmetika alapfogalmai segítségével definiálható aritmetikai fogalomnak híján, minden egyes (teljes indukcióval bebizonyítandó) állításra külön-külön axióma.

¹⁶ NEUMANN [3]; a rendszámok (és a számosságok) elméletének ilyen felépítéséhez használt alapfogalat már NEUMANN [1]-ben is szerepel (a naiv halmazelmélet nyelvén). FRAENKEL még azt gondolta, hogy a (rendszámok és a számosságok) elméletének felépítéséhez további axiómákra van szükség; lásd FRAENKEL [1].

halmazának, volna legkisebb eleme, vagyis volna legkisebb olyan α_0 rendszám, amelyre a kérdéses állítás nem igaz. Ez azonban lehetetlen, mert α_0 nem lehet sem 0, hiszen a kérdéses állítás igaz a 0-ra; de 0-tól különböző rendszám sem lehet, mert akkor volna nála kisebb rendszámok, ezekre mindre igaz a kérdéses állítás (mert α_0 a legkisebb olyan rendszám, amelyre nem igaz), tehát a feltevés szerint α_0 -ra is igaz. Ehelyett a halmazelmélet axiomatikus felépítése során, ha a FRAENKEL-féle axiómákból indulunk ki, így kell okoskodnunk. Ha a kérdéses állítás pl. valamely α_1 rendszámra nem volna igaz, akkor tekintsük az α_1 -nél kisebb rendszámok H halmazát (ennek létezése, a pótlás axiómájának felhasználásával, következik a FRAENKEL-féle axiómákból). A részhalmaz-axiómából következik olyan H' halmaz létezése, amelynek elemei H -nak azok és csak azok az elemei, tehát azok és csak azok az α_1 -nél kisebb rendszámok, amelyekre a kérdéses állítás nem igaz. Ez a H' halmaz nem lehet üres, sem azért nem, mert H üres, hiszen akkor $\alpha_1 = 0$ volna, már pedig a 0 rendszámra igaz a kérdéses állítás; sem azért nem, mert az α_1 -nél kisebb rendszámokra mindre igaz a kérdéses állítás, mert akkor a feltevés szerint α_1 -re is igaz volna. A FRAENKEL-féle axiómákból következik, hogy minden olyan (létező) halmaz, amelynek minden eleme rendszám, jól-rendezett, ha elemeit nagyság szerint rendezzük; tehát H' is az és így van legkisebb eleme. Legyen ez α_0 . Akkor α_0 -ra sem igaz a kérdéses állítás, de az α_0 -nál kisebb olyan rendszámok halmaza¹⁷, amelyekre nem igaz, már üres, hiszen ezek mind kisebbek α_1 -nél is, tehát elemei H' -nek is; már pedig H' -nek nincs α_0 -nál kisebb eleme. Ez azonban éppúgy lehetetlenségre vezet, mint az előbb az a feltevés, hogy az α_1 -nél kisebb olyan rendszámok H' halmaza, amelyre a kérdéses állítás nem igaz, üres, de α_1 -re mégsem igaz a kérdéses állítás¹⁸.

¹⁷ E halmaz létezése szintén a részhalmaz-axiómából következik.

¹⁸ A fenti megfontolást valamivel egyszerűbb alakban is el lehetne mondani, ez azonban nem változtat azon a tényen, hogy a rendszámok tetszőleges összességeinek elkerülése csak nehézkesen lehetséges. — A fenti megfontolást elvileg minden állításra, amelyet transzfinit indukcióval be akarunk bizonyítani, külön-külön el kellene végezni, mert az állítás általános fogalma nem halmazelméleti fogalom, ennél fogva a transzfinit indukcióval való bizonyítás jogosságát nem lehet általános halmazelméleti tételként kimondani. Az olyan tételeket, amelyek nem mondhatók ki a halmazelmélet, vagy valamely axiomatizált diszciplína általános tételeként, de amelyek bizonyítása módját ad arra, hogy a kérdéses diszciplína végtelen sok tételét közös módon bebizonyítsuk, *metatételeknek* szokás nevezni; ilyen értelemben a transzfinit indukcióval való bizonyítás jogossága is metatétel. Sokszor általánosabban minden olyan tételt metatételnek neveznek, amely valamely axiomatizált diszciplína tételeinek összességéről állít valamit; ilyen értelemben az a tétel is metatétel, amely a kérdéses diszciplína ellentmondatalanságát mondja ki.

NEUMANN e fogyatékoság kiküszöbölése végett teljesen új módon axiomatizálta a halmazelméletet¹⁹. Abból a megjegyzésből indult ki, hogy nem az okozza az antinómiákat, hogy olyan összességeket tekintünk, mint pl. a halmazok, vagy a rendszámok összessége, hanem az, hogy ezeket más összességek *elemeinek tekintjük*. Ennélfogva (valószínűleg) úgy is ki lehet küszöbölni az antinómiákat, hogy nem minden összességről kívánjuk meg, hogy más összesség eleme lehessen, hanem csak az összességek egy speciális fajtájáról. Az ilyen speciális fajta összességeket nevezi *halmazoknak*; tetszőleges összességek számára az *osztály* kifejezést használja. Eszerint minden halmaz osztály, de fordítva nem; pl. az összes halmazok, vagy az összes rendszámok osztálya nem halmaz. Egy osztály tehát csak akkor lehet valamely osztály eleme, ha halmaz.

NEUMANN azonban egyúttal ki akarta küszöbölni a függvény-fogalommal kapcsolatos nehézségeket is, amelyek miatt Fraenkelnek végtelen sok axiómára volt szüksége. Evégett sem a halmaz, sem az osztály fogalmát nem tekinti alapfogalomnak, hanem visszavezeti őket a függvény fogalmára, amennyiben az osztályokat karakterisztikus függvényükkel azonosítja²⁰. Persze a függvények sem lehetnek mindannyian valamely osztály elemei; azokat, amelyek lehetnek, valamint a nem függvény-jellegű elemeket, „I-dolgoknak“ nevezi, a „függvény“ helyett pedig a „II-dolog“ kifejezést használja. Azok a II-dolgok, amelyek nem tartoznak az I-dolgok közé, függvény értelmezési tartományának sem lehetnek elemei; tehát a II-dolgok az I-dolgok összességén értelmezett függvények. Axiómái nem halmazok és osztályok, hanem ilyen függvények, valamint I-dolgok létezését mondják ki. NEUMANN axiómarendszere a függvényfogalommal kapcsolatos nehézségek kiküszöbölése folytán már véges számú axiómából áll.

Azonban NEUMANN axiómarendszere is bonyolult és nagymértékben eltér a halmazelmélet szokásos axiómarendszereitől. BERNAYS jegyezte meg, hogy ez az eltérés felesleges, hiszen azáltal, hogy olyan osztályokat is megengedünk, amelyek nem halmazok, magától megszűnnek a függvényfogalommal kapcsolatos nehézségek, hiszen a függvény fogalmát az *osztály* fogalmára már kielégítő módon vissza lehet vezetni a 13. jegyzetben említett módon, ha halmaz helyett osztályt mondunk. (Pl. az összes $\langle x, x \rangle$ alakú

¹⁹ NEUMANN [2]; lásd még NEUMANN [4]-et is.

²⁰ Minthogy a 0 és 1 (számosság vagy rendszám) definíciója csak később (az axiómák alapján) lehetséges, NEUMANN olyan függvényt ért karakterisztikus függvényen, amely 0 és 1 helyett csak az A és B értékeket veszi fel, ahol A és B szintén alapfogalmak NEUMANN axiómarendszerében.

rendezett párok *osztálya* nem vezet ellentmondásra és reprezentálja az $y = x$ függvényt, ha nem kívánjuk, hogy halmaz legyen.) Ezért BERNAYS, NEUMANN gondolatait felhasználva, úgy axiomatizálta a halmazelméletet²¹, hogy (az elemként tartalmazás relációján kívül, amely Zermelonál és Fraenkelnél is szerepel az alapfogalmak között²²), az osztály és a halmaz fogalmát használta alapfogalom gyanánt. Bernaysnál még felesleges bonyodalom, hogy a halmazokat nem tekinti osztályoknak, hanem minden halmazhoz hozzárendel egy-egy osztályt, azt, amelynek ugyanazok az elemei, mint a kérdéses halmaznak; ezt a felesleges megkettőzést GÖDEL szüntette meg, egyúttal néhány további apró módosítást is végrehajtva a BERNAYS-féle axiómarendszeren.

2. A halmazelmélet így keletkezett GÖDEL-féle axiómarendszere a következő²³.

Alapfogalmak: osztály, halmaz, tartalmazás.

Tetszőleges osztályokat latin nagy betűvel, tetszőleges halmazokat latin kis betűvel jelölünk; 'az e célra használt betűket osztályváltozóknak ill. halmazváltozóknak nevezzük. Azt, hogy a B osztály tartalmazza az A osztályt, így jelöljük: $A \in B$, és úgy is mondjuk, hogy az A osztály eleme a B osztálynak.

Axiómák (és a rövidebb kimondásukhoz szükséges definíciók):

A1. Minden halmaz osztály.

A2. Minden olyan osztály, amely valamely osztály eleme, halmaz.

A3. (A meghatározottság axiómája.) Ha az A és B osztályoknak ugyanazok a halmazok az elemeik, akkor $A = B$ (vagyis A ugyanaz az osztály, mint B).

A4. (Pár-axióma.) Bármely két x és y halmazhoz van olyan p halmaz, hogy $x \in p$ és $y \in p$, de p -nek nincs más eleme, mint x és y .

²¹ BERNAYS [1]; lásd még BERNAYS [2], [3], [4], [5], [6] és [7] dolgozatait is.

²² Neumannnál helyett az a reláció szerepel alapfogalom gyanánt, amely egy F függvény (II-dolog), egy x I-dolog és egy y II-dolog között akkor áll fenn, ha $y = F(x)$.

²³ GÖDEL [1], 3–6. oldal. GÖDEL ezt az axiómarendszert arra használja, hogy bebizonyítsa, hogy amennyiben ebből az axiómarendszerből a kiválasztás axiómáját elhagyva ellentmondástalan axiómarendszert kapunk, akkor nemcsak akkor kapunk ellentmondástalan axiómarendszert belőle, ha ismét hozzávesszük a kiválasztás axiómáját, hanem még akkor is, ha ezenkívül az általánosított CANTOR-féle sejtést is hozzávesszük axióma gyanánt, amely szerint minden α rendszámra $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. GÖDEL bizonyításmódja azonban alkalmazható a ZERMELO–FRAENKEL-féle, a NEUMANN-féle és a BERNAYS-féle axiómarendszerre is.

Definíció. Ilyen halmaz az A_1 és A_3 axiómák folytán csak egy van; ezt a halmazt az x és y (vagy az y és x) halmazokból képezett (rendezetlen) *párnak* nevezzük és így jelöljük: $\{x, y\}$ (vagy $\{y, x\}$). Ha $x = y$, akkor a $\{x, y\} = \{x, x\}$ párt az x halmazból képezett *egyelemű halmaznak* nevezzük és így jelöljük: $\{x\}$.

Definíció. A $\{x\}$ egyelemű halmazból és a $\{x, y\}$ párból képezett $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ párt az x és y halmazokból képezett *rendezett párnak* nevezzük²⁴ és röviden így jelöljük: $\langle x, y \rangle$. Az x halmazt a $\langle x, y \rangle$ rendezett pár *első komponensének*, az y halmazt pedig *második komponensének* nevezzük.

Definíció. Az x halmazból és a $\langle y, z \rangle$ rendezett párból alkotott $\langle x, \langle y, z \rangle \rangle$ rendezett párt az x, y és z halmazokból alkotott *rendezett hármasknak* nevezzük és röviden így jelöljük: $\langle x, y, z \rangle$. Az x halmazt a $\langle x, y, z \rangle$ rendezett hármask *első komponensének*, az y halmazt a *második komponensének*²⁵, a z halmazt pedig a *harmadik komponensének* nevezzük.

Definíció. Az olyan osztályt, amelynek minden eleme rendezett pár, relációnak nevezzük. Azon, hogy egy R reláció *fennáll* az x és y halmazok között, azt értjük, hogy $\langle x, y \rangle \in R$; ehelyett röviden azt is írjuk, hogy $x R y$. Az olyan F relációt, amelyre abból, hogy $y F x$ és $y' F x$, következik, hogy $y = y'$ (tehát amelynek nincs két olyan eleme, amelyeknek második komponense közös, de első komponense nem), *függvénynek* nevezzük; általánosabban az olyan F osztályról, amelyre abból, hogy $\langle y, x \rangle \in F$ és $\langle y', x \rangle \in F$, következik, hogy $y = y'$, azt mondjuk, hogy *egyértelmű leképezést létesít*. (Eszerint minden függvény egyértelmű leképezést létesít, de fordítva nem; egyértelmű leképezést ugyanis olyan osztály is létesíthet, amelynek olyan eleme is van, amely nem rendezett pár.) Ha F függvény, továbbá valamely x halmazhoz van olyan y halmaz, hogy $y F x$, akkor azt mondjuk, hogy az F függvény

²⁴ A rendezett pár fogalmának ez a visszavezetése a halmazelmélet alapfogalmaira Kuratowskitól származik; lásd KURATOWSKI [1], 171. oldal. Könnyen látható, hogy az így definiált fogalomnak megvan az a két tulajdonsága, amit a naív halmazelmélet megkíván a rendezett pár fogalmától: bármely két x és y elemhez (azaz, a GÖDEL-féle axiomatikus halmazelméletben, halmazhoz) egy és csak egy olyan rendezett pár van, amelynek x az első és y a második komponense, továbbá két rendezett pár (akkor és) csak akkor azonos, ha első komponensük is, második komponensük is megegyezik.

²⁵ Eszerint a $\langle x, y, z \rangle = \langle x, \langle y, z \rangle \rangle$ halmaz második komponense, ha rendezett hármasknak tekintjük, akkor az y halmaz, ha pedig rendezett párnak tekintjük, akkor a $\langle y, z \rangle$ rendezett pár. Ez nem okoz félreértést, mert a jelölésből mindig látszik, minek tekintjük.

értelmezve van az x helyen; ebben az esetben azt, a függvény-fogalom definíciója folytán egyértelműen meghatározott halmazt, amelyre yFx , az F függvény által az x helyen *felvett értéknek* nevezzük és így jelöljük: $F(x)$. (GÖDEL ehelyett a WHITEHEAD—RUSSELL-féle $F'x$ jelölést használja.) Általánosabban, ha F olyan osztály, amely egyértelmű leképezést létesít, akkor azon, hogy az F osztály által létesített leképezés valamely x halmazhoz az y halmazt rendeli hozzá, azt értjük, hogy $\langle y, x \rangle \in F$.

B1. (A tartalmazás relációjának axiómája.) Van olyan osztály, amelynek valamely $\langle x, y \rangle$ rendezett pár akkor és csak akkor eleme, ha $x \in y$ ²⁶.

B2. (Metszet-axióma.) Bármely két A és B osztályhoz van olyan osztály, amely azokat és csak azokat a halmazokat tartalmazza, amelyek A -nak is, B -nek is elemei²⁷.

B3. (A komplementer osztály axiómája.) Bármely A osztályhoz van olyan osztály, amely azokat és csak azokat a halmazokat tartalmazza, amelyek A -nak nem elemei²⁸.

B4. (Az értelmezési tartomány axiómája²⁹.) Bármely A osztályhoz van olyan osztály, amely azokat és csak azokat az x halmazokat tartalmazza, amelyekhez van olyan y halmaz, hogy $\langle y, x \rangle \in A$.

B5. (A direkt szorzat axiómája³⁰.) Bármely A osztályhoz van olyan osztály, amelynek valamely $\langle y, x \rangle$ rendezett pár akkor és csak akkor eleme, ha $x \in A$.

²⁶ Ez az osztály nem szükségképpen reláció, hiszen nem kötöttük ki, hogy ne legyen olyan eleme, amely nem rendezett pár. Azonban a B1 axiómából (a többi axióma felhasználásával) következik olyan E reláció létezése, amelyre $x E y$ akkor és csak akkor áll, ha az x halmaz eleme az y halmaznak; ezt (a meghatározottság axiómája és a reláció-fogalom definíciója folytán egyértelműen meghatározott) E relációt a (halmazok közötti) *tartalmazás relációjának* nevezhetjük. (Az x halmaz és az A osztály közötti $x \in A$ „reláció” nyilván nem reláció az imént definiált értelemben!)

²⁷ Ilyen osztály a meghatározottság axiómája folytán csak egy van; ezt az osztályt az A és B osztályok *metszetének* nevezzük és AB -vel jelöljük.

²⁸ Ilyen osztály a meghatározottság axiómája folytán csak egy van; ezt az osztályt az A osztály *komplementerjének* nevezzük és $\neg A$ -val jelöljük.

²⁹ Ha A függvény, akkor a B4 axióma által posztulált és a meghatározottság axiómája folytán egyértelműen meghatározott osztály azokat és csak azokat az x halmazokat tartalmazza, amely x helyeken az A függvény értelmezve van; ezt az osztályt az A függvény *értelmezési tartományának* nevezhetjük. Azonban lényeges, hogy a B4 axiómát ne csak függvényekre, hanem tetszőleges osztályokra megkívánjuk.

³⁰ A B5 axiómából (a többi axióma felhasználásával) következik, hogy bármely két A és B osztályhoz van olyan C osztály, amelynek elemei azok az $\langle x, y \rangle$ rendezett párok, amelyekre $x \in A$ és $y \in B$, és csak ezek (tehát C -nek nincs olyan eleme, amely nem rendezett pár, vagyis C reláció); ez a C osztály a meghatározottság axiómája folytán egyértelműen meg van határoz-

B6. (A konverzió axiómája³¹.) Bármely A osztályhoz van olyan osztály, amelynek valamely $\langle x, y \rangle$ rendezett pár akkor és csak akkor eleme, ha $\langle y, x \rangle \in A$.

B7. (A ciklikus permutáció axiómája.) Bármely A osztályhoz van olyan osztály, amelynek valamely $\langle x, y, z \rangle$ rendezett hármas akkor és csak akkor eleme, ha a (belőle ciklikus permutációval keletkező) $\langle y, z, x \rangle$ rendezett hármas eleme A -nak³².

B8. (Az inverzió axiómája.) Bármely A osztályhoz van olyan osztály, amelynek valamely $\langle x, y, z \rangle$ rendezett hármas akkor és csak akkor eleme, ha a (belőle inverzióval, ti. utolsó két elemének felcserélésével keletkező) $\langle x, z, y \rangle$ rendezett hármas eleme A -nak.

Definíció. Az A osztályt *üresnek* nevezzük, ha nincs eleme³³. Az A és B osztályokat *egymástól idegeneknek* nevezzük, ha nincs közös elemük.

Definíció. Az A osztályt a B osztály *részenek* (vagy *részosztályának*, abban az esetben, ha halmaz, *részhalmazának*) nevezzük, ha az A osztály minden eleme a B osztálynak is eleme. A B osztály valamely A részosztályát a B osztály *valódi részenek* (valódi részosztályának, ill. ha halmaz, akkor *valódi részhalmazának*) nevezzük, ha $A \neq B$.

C1. (A végtelen halmaz axiómája.) Van olyan a halmaz, amely nem üres és amelynek bármely eleme valódi része a egy másik elemének³⁴.

va. Ezt a C osztályt az A és B osztályok *direkt* (vagy *Descartes-féle*) *szorzatának* nevezzük és így jelöljük: $A \times B$. A B5 axióma közvetlenül az összes halmazok osztálya és az A osztály direkt szorzatának létezését posztulálja. (Az összes halmazok osztályának, vagyis olyan osztálynak létezése, amelynek minden halmaz eleme, a komplementer osztály axiómájából és a metszet-axiómából következik.)

³¹ A B6 axióma által posztulált osztály nincs egyértelműen meghatározva, mert nem kötöttük ki, hogy ne legyen olyan eleme, amely nem rendezett pár, vagyis, hogy reláció legyen. Azonban a B6 axiómából (a többi axióma felhasználásával) következik olyan B reláció létezése is, amelyre $\langle x, y \rangle \in B$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle y, x \rangle \in A$; ez a reláció már egyértelműen meg van határozva. Ha A is reláció (amit nem kötöttünk ki), akkor tehát $x B y$ akkor és csak akkor áll, ha $y A x$. Az ilyen tulajdonságú B relációt az A reláció *konverzenek* nevezzük. (Ha A is, B is függvény, akkor B az A inverz függvénye.)

³² Ez az osztály nincs egyértelműen meghatározva, mert nem kötöttük ki, hogy ne legyen olyan eleme, amely nem rendezett hármas. Hasonló megjegyzés érvényes a B8 axiómára.

³³ A komplementer osztály axiómájából és a metszet-axiómából következik, hogy van üres osztály; a meghatározottság axiómájából pedig, hogy csak egy van.

³⁴ Heurisztikusan (és a végtelen halmaz fogalmának megfelelő definíciója alapján szabatosan is) könnyen be lehet látni, hogy ez az a halmaz végtelen.

C2. (Az összeshalmaz axiómája.) Bármely x halmazhoz van olyan halmaz, amelynek minden olyan halmaz eleme, amely az x halmaz valamely elemének eleme³⁵.

C3. (A hatványhalmaz axiómája.) Bármely x halmazhoz van olyan halmaz, amely az x halmaz minden részhalmazát tartalmazza³⁶.

C4. (A pótlás axiómája³⁷.) Bármely x halmazhoz és bármely olyan A osztályhoz, amely egyértelmű leképezést létesít, van olyan halmaz, amelynek azok és csak azok a halmazok az elemei, amelyeket az A osztály által létesített leképezés az x halmaz valamely eleméhez rendel hozzá.

D. (A fundáltság axiómája.) Minden olyan A osztálynak, amely nem üres, van olyan eleme, amely idegen az A osztálytól³⁸.

E. (A kiválasztás axiómája.) Van olyan A osztály, amely egyértelmű leképezést létesít, mégpedig olyant, amely minden nem üres x halmazhoz hozzárendeli x valamely elemét.

3. A továbbiakban a GÖDEL-féle axiómarendszer B1—B8 axiómaival foglalkozunk³⁹. Ezeknek az axiómáknak az a szerepe a hal-

³⁵ Ez a halmaz nincs egyértelműen meghatározva, mert nem kötöttük ki, hogy ne legyen olyan eleme, amely az x halmaz egyetlen egy elemének sem eleme. Azonban a C2 axiómából (a többi axióma felhasználásával) következik olyan halmaz létezése is, amely az x halmaz elemeinek elemeit és csak azokat tartalmazza; ezt, a meghatározottság axiómája (és az A1 axióma) folytán egyértelműen meghatározott halmazt az x halmaz *összeshalmazának*, vagy az x halmaz *elemei összegének* nevezzük.

³⁶ Ez a halmaz nincs egyértelműen meghatározva, mert nem kötöttük ki, hogy ne legyen olyan eleme, amely nem részhalmaz az x halmaznak. Azonban a C3 axiómából (a többi axióma felhasználásával) következik olyan halmaz létezése is, amely az x halmaz részhalmazait és csak azokat tartalmazza; ezt, a meghatározottság axiómája (és az A1 axióma) folytán egyértelműen meghatározott halmazt az x halmaz *hatványhalmazának* nevezzük.

³⁷ Ez az axióma nemcsak a FRAENKEL-féle axiómarendszer pótlás-axiómájának szerepét veszi át, hanem bizonyos tekintetben a részhalmaz-axióma szerepét is. Ugyanis nem kötöttük ki, hogy az x halmaz minden v eleméhez legyen egy olyan u halmaz, hogy $\langle u, v \rangle \in A$; így lehetséges, hogy a C4 axióma által posztulált halmaz nem az x halmaznak, hanem egy részhalmazának valamely egyértelmű leképezés által létesített képe.

³⁸ Ez az axióma kizárja olyan A osztály létezését, amelynek minden eleme tartalmazza az A osztály valamelyik elemét. Ha volna ilyen osztály, akkor annak egy x_1 elemét választva, majd x_1 -nek olyan x_2 elemét, amely A -nak is eleme, majd annak ismét olyan x_3 elemét, amely A -nak is eleme, és így tovább, A olyan $x_1, x_2, x_3, \dots$ elemeihez jutnánk, amelyek „egymásba vannak skatulyázva“ (azaz $x_2 \in x_1, x_3 \in x_2, \dots$), de amelynek „melyén nincs semmi“; az ilyen osztály nem volna „fundálva“ (megalapozva).

³⁹ Ezek az axiómák, B2 és B3 kivételével, felhasználják a rendezett pár és a rendezett hármas fogalmát, ezek a fogalmak pedig a rendezett pár fogalmán alapulnak; a rendezetlen pár fogalmát viszont olyan definícióval vezetjük be, amelynek jogosultságát az A1, A3 és A4 axióma segítségével láttuk be. Ilyen értelemben a B1—B8 axiómák feltételezik az A1, A3 és A4 axiómákat is.

mazelmélet GÖDEL-féle axiómatikus felépítésében, hogy ezeknek az axiómáknak segítségével tudjuk bizonyos osztályok létezését bebizonyítani. Mégpedig, mint látni fogjuk, ezek az axiómák elegendők ahhoz, hogy — amennyiben a tulajdonság-fogalmat egy bizonyos szabatosan elhatárolt, de azért a halmazelmélet axiómatikus felépítésének céljaira elegendő tág értelemben értjük, — bebizonyítsuk, hogy minden ilyen elhatárolt értelemben vett T tulajdonsághoz van olyan osztály, amelynek elemei azok és csak azok a halmazok, amelyeknek megvan a T tulajdonságuk⁴⁰. A C1—C4 axiómák segítségével aztán ezeknek az osztályoknak egy részéről, mégpedig mindazokról, amelyekre szükség van a halmazelmélet axiómatikus felépítéséhez, be lehet bizonyítani, hogy halmazok (de azokról, amelyeknek halmaz-volta antinómiához vezetne, pl. az összes halmazok, összes rendszámok, vagy az összes számosságok osztályáról, nem⁴¹).

Bár az a körülmény, hogy a B1—B8 axiómák segítségével, tehát *véges számú* axióma segítségével sikerült tetszőleges adott (az említett elhatárolt értelemben vett) tulajdonságú halmazok osztályának létezését bebizonyítani, magában véve nagy teljesítmény,⁴²

⁴⁰ Majoráns halmazra most nincs szükség, mert nem olyan *halmaz*, csak olyan *osztály* létezését állítjuk, amelynek azok és csak azok a halmazok az elemei, amelyeknek megvan a T tulajdonságuk. (Egyébként majoráns *osztály* mindig létezik, hiszen minden halmaz eleme az összes halmazok osztályának, lásd a 30. jegyzetet.) Hogy az ilyen osztály létezése nem vezet antinómiára, azt legkönnyebben a RUSSELL-féle antinómia példáján láthatjuk. A T tulajdonságot úgy választva, hogy egy halmaznak akkor és csak akkor legyen meg a T tulajdonsága, ha nem eleme önmagának, bebizonyíthatjuk az önmagukat nem tartalmazó *halmazok osztályának*, vagyis olyan R osztálynak létezését, amelyre, bármely r halmaz esetén, akkor és csak akkor áll $r \in R$, ha $r \notin r$. Ha feltételezzük, hogy R halmaz, akkor, R -et választva r gyanánt, adódik, hogy $R \in R$ akkor és csak akkor áll, ha $R \notin R$, ami az ismert módon ellentmondásra vezet. Ez azonban csak azt mutatja, hogy R *nem halmaz* és ennél fogva az A2 axióma szerint nem lehet eleme semmiféle osztálynak sem, így önmagának sem. Ebből azonban nem adódik a szokott módon ellentmondás, hiszen R csak az összes önmagukat nem tartalmazó *halmazok*, nem pedig az önmagukat nem tartalmazó *osztályok* osztálya; tehát abból, hogy R önmagát nem tartalmazó *osztály*, nem következik, hogy eleme R -nek (mint ahogy következne, ha R önmagát nem tartalmazó *halmaz* volna, vagy ha R , az A2 axiómával ellentétben, nemcsak az önmagukat nem tartalmazó *halmazokat*, hanem azokat az önmagukat nem tartalmazó *osztályokat* is tartalmazná, amelyek nem halmazok).

⁴¹ Ez úgy értendő, hogy *nem ismeretes* olyan mód, amelynek segítségével a C1—C4, vagy akár az A1—A4, B1—B8, C1—C4, D és E axiómák alapján be lehetne bizonyítani pl. az összes rendszámok osztályának halmaz-voltát. Az az állítás, hogy *nincs* is ilyen bizonyítás, ekvivalens azzal a még bebizonyítatlan állítással, hogy a GÖDEL-féle axiómarendszer ellentmondástalan.

⁴² Ez a teljesítmény lényegében Neumanntól származik; de már az is előfutárjának tekinthető, hogy Fraenkelnak véges számú lépésben sikerült olyan függvény-fogalmat definiálnia, hogy a részhalmaz-axióma azon fogalmazása,

mégis feltűnő, hogy Gödelnek ehhez két olyan jellegű axiómára van szüksége, mint B7 és B8. GÖDEL maga megemlíti, hogy BERNAYS azért tudja a B7 és B8 axiómákat egyetlen axiómával pótolni⁴³, mert külön axiómában megkívánja az összes egyelemű, azaz $\{x\}$ alakú halmazok osztályának létezését. Ebből látszik, hogy GÖDEL nem gondolt arra, hogy — mint ebben a dolgozatban megmutatjuk — a B8 axióma nélkülözhető, amennyiben a Gödel-féle axiómarendszer többi axiómája (nevezetesen az A1, A3 és A4, valamint a B1—B7 axiómák) alapján bebizonyítható. Hogy erre eddig nem gondoltak, az abból is látható, hogy MARKOV bebizonyította⁴⁴, hogy a B6 axióma nélkülözhető, amennyiben bebizonyítható a B4, B5 és B8 axiómák alapján, de ő sem tesz említést a B8 axióma nélkülözhetőségéről⁴⁵.

4. A B8 axióma azt mondja ki, hogy bármely A osztályhoz van olyan B osztály, amelynek valamely $\langle x, y, z \rangle$ rendezett hármas akkor és csak akkor eleme, ha komponensei, x , y és z , eleget tesznek a $\langle x, z, y \rangle \in A$ feltételnek. A rendezett hármas, majd a rendezett pár fogalmának definíciója szerint

$$\langle x, z, y \rangle = \langle x, \langle z, y \rangle \rangle = \{\{x\}, \{x, \langle z, y \rangle\}\} = \{\{x\}, \{x, \{\{z\}, \{z, y\}\}\}\};$$

tehát a $\langle x, z, y \rangle \in A$ feltétel így is írható:

$$\{\{x\}, \{x, \{\{z\}, \{z, y\}\}\}\} \in A.$$

Jelöljük sorra a $\{x\}, \{z\}, \{z, y\}, \{\{z\}, \{z, y\}\} (= \langle z, y \rangle), \{x, \{\{z\}, \{z, y\}\}\}$

hogy bármely H halmazhoz és bármely két F és G függvényhez létezik négy olyan halmaz, amelynek elemei sorra a H halmaznak azok és csak azok az x elemei, amelyekre $F(x) \in G(x)$, $F(x) \notin G(x)$, $F(x) = G(x)$ ill. $F(x) \neq G(x)$, e függvényfogalom alkalmazása esetén elegendő a halmazelmélet axiómatikus felépítéséhez.

⁴³ BERNAYS azon c(3) axiómája, amely az ő axiómarendszerében a GÖDEL-féle B7 és B8 axiómák szerepét átveszi, úgy szól, hogy bármely olyan A osztályhoz, amelynek elemei mind $\langle a, \langle b, c \rangle \rangle$ alakú rendezett párok (azaz, a rendezett hármas fogalmának fenti, GÖDEL-féle definícióját alkalmazva, rendezett hármasok), van olyan osztály, amelynek elemei azok és csak azok az $\langle \langle a, b \rangle, c \rangle$ alakú rendezett párok, ahol a, b és c olyan halmazok, amelyekre $\langle a, \langle b, c \rangle \rangle \in A$.

⁴⁴ MARKOV [1].

⁴⁵ MARKOV eredményéből és a jelen dolgozat eredményéből korántsem következik, hogy a B6 és B8 axiómák egyidejűleg nélkülözhetők, mert MARKOV felhasználja a B8 axiómát a B6 axióma bebizonyításához, mi viszont felhasználjuk a B6 axiómát a B8 axióma bebizonyításához. — A B8 axióma nélkülözhetőségét sejtteni lehet abból, hogy, mint BERNAYS utólag bebizonyította (BERNAYS [7], 94. oldal), az összes egyelemű halmazok osztályának létezését kimondó b(1) axiómája nélkülözhető az ő axiómarendszerében. (Ebből azonban, a GÖDEL-féle axiómarendszer eltérései miatt a BERNAYS-féle axiómarendszerből, nem adódik közvetlenül a B8 axióma nélkülözhetősége a GÖDEL-féle axiómarendszerben.)

$\{z, y\}\}\} (= \{x, \langle z, y \rangle\})$, $\{\{x\}, \{x, \{\{z\}, \{z, y\}\}\}\} (= \langle x, z, y \rangle)$ halmazokat p -vel, q -val, r -rel, s -sel, t -vel és u -val:

$$p = \{x\},$$

$$q = \{z\},$$

$$r = \{z, y\},$$

$$s = \{\{z\}, \{z, y\}\} = \{q, r\},$$

$$t = \{x, \{\{z\}, \{z, y\}\}\} = \{x, s\},$$

$$u = \{\{x\}, \{x, \{\{z\}, \{z, y\}\}\}\} = \{p, t\}.$$

Az egyelemű halmaz és a rendezetlen pár fogalmának definíciója alapján (az A1 axiómának és a meghatározottság axiómájának felhasználásával) könnyen adódik, hogy pl. p az egyetlen olyan halmaz, amely eleget tesz annak a feltételnek, hogy $x \in p$ és hogy nincs olyan v halmaz, amely eleme p -nek és különböző x -től, és pl. r az egyetlen olyan halmaz, amely eleget tesz annak a feltételnek, hogy $z \in r$ és $y \in r$ és hogy nincs olyan v halmaz, amely eleme r -nek és különböző z -től is, y -től is. Ez a feltétel a matematikai logikában használatos $\&$ (és), $\neg$ (nem igaz, hogy) és (Ev) (van olyan v , ti. olyan v halmaz, hogy) jelölések segítségével⁴⁶ így írható fel rövidebben:

$$(1) \quad x \in p \& \neg (Ev) (v \in p \& v \neq x),$$

ill.

$$(2) \quad z \in r \& y \in r \& \neg (Ev) (v \in r \& v \neq z \& v \neq y).$$

Hasonlóan, a q, s, t és u halmazokat a következő feltételek jellemzik egyértelműen:

$$(3) \quad z \in q \& \neg (Ev) (v \in q \& v \neq z),$$

$$(4) \quad q \in s \& r \in s \& \neg (Ev) (v \in s \& v \neq q \& v \neq r),$$

$$(5) \quad x \in t \& s \in t \& \neg (Ev) (v \in t \& v \neq x \& v \neq s),$$

ill.

$$(6) \quad p \in u \& t \in u \& \neg (Ev) (v \in u \& v \neq p \& v \neq t).$$

A páraxióma szerint léteznek ilyen p, q, r, s, t és u halmazok; mégpedig u a $\langle x, z, y \rangle$ halmaz. Ennélfogva a $\langle x, z, y \rangle \in A$ feltétel akkor

⁴⁶ A matematikai logika jeleit csak rövidség kedvéért használjuk; ezek nélkül az egyes feltételeket több oldalas mondatban kellene kimondani. Egyetlen matematikai logikai tételre sem hivatkozunk; sőt, még az $\&$, $\neg$ és (Ev) jelekkel jelölt műveleteknek a matematikai logikában szokásos szabatos definícióját sem használjuk fel.

és csak akkor teljesül, ha vannak olyan p, q, r, s, t és u halmazok, amelyek az (1)–(6) feltételen kívül még az $u \in A$ feltételnek is eleget tesznek, vagyis, ha az x, y és z halmazok eleget tesznek a következő feltételnek⁴⁷:

$$(7) \quad (Ep)(Eq)(Er)(Es)(Et)(Eu)(x \in p \& \neg(Ev)(v \in p \& v \neq x) \& \\ \& z \in q \& \neg(Ev)(v \in q \& v \neq z) \& \\ \& z \in r \& y \in r \& \neg(Ev)(v \in r \& v \neq z \& v \neq y) \& \\ \& q \in s \& r \in s \& \neg(Ev)(v \in s \& v \neq q \& v \neq r) \& \\ \& x \in t \& s \in t \& \neg(Ev)(v \in t \& v \neq x \& v \neq s) \& \\ \& p \in u \& t \in u \& \neg(Ev)(v \in u \& v \neq p \& v \neq t) \& u \in A).$$

A (7) feltételben a tartalmazás fogalmán kívül halmazok különbözőségének fogalma is szerepel; ezt azonban kiküszöbölhetjük belőle. Valóban, a meghatározottság axiómája (és az A1 axióma) folytán két halmaz akkor és csak akkor különböző egymástól, ha van olyan halmaz, amelyik a két halmaz közül az egyiknek eleme, a másiknak nem. Ennélfogva pl. ahelyett, hogy $v \neq x$, ezt írhatjuk:

$$(Ew)((w \in v \& w \notin x) \vee (w \in x \& w \notin v)),$$

ahol a $\vee$ jel a „vagy” szó rövidítése. Ez utóbbi jelet is kiküszöbölhetjük, hiszen ahelyett, hogy $w \in v$ és $w \notin x$ vagy $w \in x$ és $w \notin v$, azt is mondhatjuk, hogy nem igaz az, hogy sem az nem igaz, hogy $w \in v$ és $w \notin x$, sem az, hogy $w \in x$ és $w \notin v$; ha itt még pl. $w \notin x$ helyett azt írjuk, hogy $\neg w \in x$ (nem igaz, hogy $w \in x$), akkor tehát ahelyett, hogy $v \neq x$, ezt írhatjuk:

$$(Ew)\neg(\neg(w \in v \& \neg w \in x) \& \neg(w \in x \& \neg w \in v)).$$

Hasonlóan járva el a (7) feltételben szereplő $v \neq z, v \neq y, v \neq q, v \neq r, v \neq s, v \neq p$ és $v \neq t$ állításokkal, a (7), vagyis az $\langle x, z, y \rangle \in A$

⁴⁷ E feltétel nyilván valóban csak az x, y és z halmazokra, valamint az A osztályra vonatkozik: vagyis az, hogy teljesül-e, vagy nem, csak az x, y, z halmazoktól és az A osztálytól függ. Ugyanis a feltételben szereplő p, q, r, s, t, u és v halmazváltozók látszólagos, más néven *kötött* változók. Általában, ha egy w halmazváltozó csak az (Ew) jeleken és olyan zárójeleken belül szerepel valamely feltételben, amelyek előtt (Ew) jel áll, akkor az, hogy e feltétel teljesül-e, nem függ a w halmaztól: w a kérdéses feltételben kötött változó. Azokat a halmazváltozókat, amelyek valamely feltételben nem kötöttek, tehát az, hogy a kérdéses feltétel teljesül-e, függ attól, hogy e változók mely halmazokat jelentenek, valamint a feltételben szereplő osztályváltozókat, e feltétel szabad változóinak nevezzük. (A továbbiak szempontjából fontos, hogy kötött osztályváltozókat nem használunk, vagyis pl. az (EX) jelet nem használjuk abban az értelemben, hogy van olyan X osztály, amelyre valamilyen állítás teljesül.)

feltételt a következő alakban is írhatjuk:

$$(8) \quad (Ep)(Eq)(Er)(Es)(Et)(Eu)(x \in p \& \neg(Ev)(v \in p \& \\ \& (Ew)\neg(\neg(w \in v \& \neg w \in x) \& \neg(w \in x \& \neg w \in v))) \& \\ \& z \in p \& \neg(Ev)(v \in q \& \\ \& (Ew)\neg(\neg(w \in v \& \neg w \in z) \& \neg(w \in z \& \neg w \in v))) \& \\ \& z \in r \& y \in r \& \neg(Ev)(v \in r \& \\ \& (Ew)\neg(\neg(w \in v \& \neg w \in z) \& \neg(w \in z \& \neg w \in v))) \& \\ \& (Ew)\neg(\neg(w \in v \& \neg w \in y) \& \neg(w \in y \& \neg w \in v))) \& \\ \& q \in s \& r \in s \& \neg(Ev)(v \in s \& \\ \& (Ew)\neg(\neg(w \in v \& \neg w \in q) \& \neg(w \in q \& \neg w \in v))) \& \\ \& (Ew)\neg(\neg(w \in v \& \neg w \in r) \& \neg(w \in r \& \neg w \in v))) \& \\ \& x \in t \& s \in t \& \neg(Ev)(v \in t \& \\ \& (Ew)\neg(\neg(w \in v \& \neg w \in x) \& \neg(w \in x \& \neg w \in v))) \& \\ \& (Ew)\neg(\neg(w \in v \& \neg w \in s) \& \neg(w \in s \& \neg w \in v))) \& \\ \& p \in u \& t \in u \& \neg(Ev)(v \in u \& \\ \& (Ew)\neg(\neg(w \in v \& \neg w \in p) \& \neg(w \in p \& \neg w \in v))) \& \\ \& (Ew)\neg(\neg(w \in v \& \neg w \in t) \& \neg(w \in t \& \neg w \in v))) \& u \in A).$$

Az $\langle x, z, y \rangle \in A$ feltételt azért hoztuk ilyen látszólag bonyolult alakra, hogy lássuk, hogy az $u \in A$ állításból, valamint $k \in l$ alakú állításokból, ahol k és l helyett tetszőleges halmazváltozók állhatnak, az $\&$, $\neg$ és (Ek) jeleknek, ahol k helyett ismét tetszőleges halmazváltozó állhat, ismételt (véges számú) alkalmazásával felírható. Ennélfogva ahelyett, hogy magát B8 axiómát bizonyítanók be az A1, A3 és A4, valamint B1–B7 axiómák segítségével, eleget az az általánosabb metatételt⁴⁸ megmutatnunk, hogy vala-

⁴⁸ Lásd a 18. jegyzetet. Valóban metatételről van szó, mert azt állítjuk, hogy az olyan osztály létezése, amelynek valamely $\langle x, y, z \rangle$ rendezett hármas akkor és csak akkor eleme, ha a $\Phi(x, y, z, A)$ feltétel teljesül, e feltétel minden egyes (a szövegben pontosan megadott módon való) választása esetén egy-egy tétel a pusztán az A1, A3, A4, valamint a B1–B7 axiómák által axiomatizált diszciplínának.

Arra a közelfekvő kérdésre, miért ezt a metatételt bizonyítjuk be ahelyett a speciális esete helyett, amikor $\Phi(x, y, z, A)$ a (8) feltételt jelenti, könnyen válaszolhatunk: könnyebb ezt a metatételt általánosan bebizonyítani, mint közvetlenül a kérdéses speciális esetét; de természetesen e metatétel bizonyítása alapján meg lehetne adni a kérdéses speciális eset bizonyítását is, vagyis a B8 axióma halmazelméleti bizonyítását az A1, A3, A4, valamint a B1–B7 axiómák alapján, csak nagyon sokszor kellene ismételni a metatétel bizonyításában sze-

hányszor $\Phi(x, y, z, A)$ bizonyos, $k \in A$ és $k \in I$ alakú állításokból, ahol k és I helyett tetszőleges halmazváltozók állhatnak, az $\&$, $\neg$ és (Ek) jeleknek, ahol k helyett ismét tetszőleges halmazváltozó állhat, ismételt alkalmazásával felírható olyan feltétel, amelyben az A osztályváltozón kívül csak az x, y és z szabad változók szerepelnek, akkor az a halmazelméleti tétel, hogy bármely A osztályhoz van olyan osztály, amelynek valamely $\langle x, y, z \rangle$ rendezett hármas akkor és csak akkor eleme, ha komponensei, x, y és z , eleget tesznek a $\Phi(x, y, z, A)$ feltételnek, bebizonyítható az A1, A3 és A4, valamint B1—B7 axiómák alapján.

rendezett párok *osztálya* nem vezet ellentmondásra és reprezentálja az $y = x$ függvényt, ha nem kívánjuk, hogy halmaz legyen.) Ezért BERNAYS, NEUMANN gondolatait felhasználva, úgy axiomatizálta a halmazelméletet²¹, hogy (az elemként tartalmazás relációján kívül, amely Zermelonál és Fraenkelnél is szerepel az alapfogalmak között²².) az osztály és a halmaz fogalmát használta alapfogalom gyanánt. Bernaysnál még felesleges bonyodalom, hogy a halmazokat nem tekinti osztályoknak, hanem minden halmazhoz hozzárendel egy-egy osztályt, azt, amelynek ugyanazok az elemei, mint a kérdéses halmaznak; ezt a felesleges megkettőzést GÖDEL szüntette meg, egyúttal néhány további apró módosítást is végrehajtva a BERNAYS-féle axiómarendszeren.

2. A halmazelmélet így keletkezett GÖDEL-féle axiómarendszere a következő²³.

Alapfogalmak: osztály, halmaz, tartalmazás.

Tetszőleges osztályokat latin nagy betűvel, tetszőleges halmazokat latin kis betűvel jelölünk; az e célra használt betűket osztályváltozóknak ill. halmazváltozóknak nevezzük. Azt, hogy a B osztály tartalmazza az A osztályt, így jelöljük: $A \in B$, és úgy is mondjuk, hogy az A osztály eleme a B osztálynak.

Axiómák (és a rövidebb kimondásukhoz szükséges definíciók):

A1. Minden halmaz osztály.

A2. Minden olyan osztály, amely valamely osztály eleme, halmaz.

A3. (A meghatározottság axiómája.) Ha az A és B osztályoknak ugyanazok a halmazok az elemeik, akkor $A = B$ (vagyis A ugyanaz az osztály, mint B).

A4. (Pár-axióma.) Bármely két x és y halmazhoz van olyan p halmaz, hogy $x \in p$ és $y \in p$, de p -nek nincs más eleme, mint x és y .

²¹ BERNAYS [1]; lásd még BERNAYS [2], [3], [4], [5], [6] és [7] dolgozatait is.

²² Neumannnál ehelyett az a reláció szerepel alapfogalom gyanánt, amely egy F függvény (II-dolog), egy x I-dolog és egy y II-dolog között akkor áll fenn, ha $y = F(x)$.

²³ GÖDEL [1], 3–6. oldal. GÖDEL ezt az axiómarendszert arra használja, hogy bebizonyítsa, hogy amennyiben ebből az axiómarendszerből a kiválasztás axiómáját elhagyva ellentmondástalan axiómarendszert kapunk, akkor nemcsak akkor kapunk ellentmondástalan axiómarendszert belőle, ha ismét hozzávesszük a kiválasztás axiómáját, hanem még akkor is, ha ezenkívül az általánosított CANTOR-féle sejtést is hozzávesszük axióma gyanánt, amely szerint minden α rendszámra $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. GÖDEL bizonyításmódja azonban alkalmazható a ZERMELO—FRAENKEL-féle, a NEUMANN-féle és a BERNAYS-féle axiómarendszerre is.

Definíció. Ilyen halmaz az A_1 és A_3 axiómák folytán csak egy van; ezt a halmazt az x és y (vagy az y és x) halmazokból képezett (rendezetlen) *párnak* nevezzük és így jelöljük: $\{x, y\}$ (vagy $\{y, x\}$). Ha $x = y$, akkor a $\{x, y\} = \{x, x\}$ párt az x halmazból képezett *egyelemű halmaznak* nevezzük és így jelöljük: $\{x\}$.

Definíció. A $\{x\}$ egyelemű halmazból és a $\{x, y\}$ párból képezett $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ párt az x és y halmazokból képezett *rendezett párnak* nevezzük²⁴ és röviden így jelöljük: $\langle x, y \rangle$. Az x halmazt a $\langle x, y \rangle$ rendezett pár *első komponensének*, az y halmazt pedig *második komponensének* nevezzük.

Definíció. Az x halmazból és a $\langle y, z \rangle$ rendezett párból alkotott $\langle x, \langle y, z \rangle \rangle$ rendezett párt az x, y és z halmazokból alkotott *rendezett hármasknak* nevezzük és röviden így jelöljük: $\langle x, y, z \rangle$. Az x halmazt a $\langle x, y, z \rangle$ rendezett hármask *első komponensének*, az y halmazt a *második komponensének*²⁵, a z halmazt pedig a *harmadik komponensének* nevezzük.

Definíció. Az olyan osztályt, amelynek minden eleme rendezett pár, relációnak nevezzük. Azon, hogy egy R reláció *fennáll* az x és y halmazok között, azt értjük, hogy $\langle x, y \rangle \in R$; ehelyett röviden azt is írjuk, hogy $x R y$. Az olyan F relációt, amelyre abból, hogy $y F x$ és $y' F x$, következik, hogy $y = y'$ (tehát amelynek nincs két olyan eleme, amelyeknek második komponense közös, de első komponense nem), *függvénynek* nevezzük; általánosabban az olyan F osztályról, amelyre abból, hogy $\langle y, x \rangle \in F$ és $\langle y', x \rangle \in F$, következik, hogy $y = y'$, azt mondjuk, hogy *egyértelmű leképezést létesít*. (Eszerint minden függvény egyértelmű leképezést létesít, de fordítva nem; egyértelmű leképezést ugyanis olyan osztály is létesíthet, amelynek olyan eleme is van, amely nem rendezett pár.) Ha F függvény, továbbá valamely x halmazhoz van olyan y halmaz, hogy $y F x$, akkor azt mondjuk, hogy az F függvény

²⁴ A rendezett pár fogalmának ez a visszavezetése a halmazelmélet alapfogalmaira Kuratowskitól származik; lásd KURATOWSKI [1], 171. oldal. Könnyen látható, hogy az így definiált fogalomnak megvan az a két tulajdonsága, amit a naív halmazelmélet megkíván a rendezett pár fogalmától: bármely két x és y elemhez (azaz, a GÖDEL-féle axiomatikus halmazelméletben, halmazhoz) egy és csak egy olyan rendezett pár van, amelynek x az első és y a második komponense, továbbá két rendezett pár (akkor és) csak akkor azonos, ha első komponensük is, második komponensük is megegyezik.

²⁵ Eszerint a $\langle x, y, z \rangle = \langle x, \langle y, z \rangle \rangle$ halmaz második komponense, ha rendezett hármasknak tekintjük, akkor az y halmaz, ha pedig rendezett párnak tekintjük, akkor a $\langle y, z \rangle$ rendezett pár. Ez nem okoz félreértést, mert a jelölésből mindig látszik, minek tekintjük.