L'INFLUENCE DE LA GÉOMÉTRIE DE BOLYAI—LOBATCHEVSKY SUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE AXIOMATIQUE

Par

L. KALMÁR (Szeged), correspondant de l'Académie

Plusieurs conférences faites pendant la semaine Bolyai ont mentionné l'influence de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky sur le développement de beaucoup de branches des mathématiques. Nous allons traiter dans cet article de l'influence exercée par cette géométrie sur le développement d'une méthode particulière des mathématiques: la méthode axiomatique. Il est bien connu que JEAN BOLYAI et LOBATCHEVSKY n'ont pas entrepris leurs recherches créatrices dans le but d'enrichir les mathématiques par des méthodes nouvelles, mais avec l'intention d'éliminer des mathématiques les hypothèses arbitraires et de la rendre apte à la description de la vérité objective; d'autre part, l'importance principale de leur découverte n'est pas l'influence méthodologique; mais la commémoration de l'Académie des Sciences de Hongrie du 150-ième anniversaire de la naissance de JEAN BOLYAI serait toutefois incomplète, si nous ne faisions pas mention de l'influence de BOLYAI et de son contemporain génial LOBATCHEVSKY sur le développement de la méthode axiomatique.

La création de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky forme un tournant dans l'histoire de la méthode axiomatique. Les recherches géométriques de BOLYAI et de LOBATCHEVSKY ont mis un point final aux recherches axiomatiques millénaires ayant pour but la solution du "problème des parallèles"; à savoir la démonstration de l'axiome des parallèles d'Euclide à l'aide des autres axiomes de la géométrie euclidienne. Ces recherches ont en même temps ouvert le chemin à une série de recherches modernes concernant la méthode axiomatique.

JEAN BOLYAI a déjà exprimé dans le titre de l'Appendix son opinion que le problème, si l'axiome euclidien des parallèles est valable dans l'espace réel, c'est-à-dire dans l'espace qui est la scène des mouvements de la matière ou non, est "à ne jamais résoudre a priori", par conséquent, il est uniquement résoluble par les moyens empiriques. LOBATCHEVSKY fut aussi convaincu que cette question sera résolue au cours du développement de la science, au moyen de l'expérience.

Le fait que la validité de l'axiome des parallèles dans l'espace réel ne peut être prouvé par les moyens de la logique, signifie que la géométrie d'Euclide et celle de Bolyai—Lobatchevsky sont toutes deux logiquement possibles. Ou, plus précisément: si le système d'axiomes de la géométrie euclidienne est non-contradictoire, celui de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky l'est également, tandis que si le système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky est non-contradictoire, le système d'axiomes de la géométrie euclidienne l'est également. Cette assertion fut vérifiée par BOLYAI comme par LOBATCHEVSKY par des moyens empiriques, par la déduction détaillée de la géométrie hyperbolique, dans laquelle ils ont traité toutes les questions traitées d'habitude dans la géométrie euclidienne, sans se heurter aux contradictions.

Cet argument empirique est de poids, mais non tout à fait satisfaisant. En effet on pourrait se figurer qu'au cours du développement ultérieur de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky, c'est-à-dire en suivant les déductions des axiomes de la géométrie l'on parviendrait finalement à une contradiction. Cette contradiction fournirait la démonstration indirecte de l'axiome euclidien des parallèles. Naturallement, on pourrait se figurer le contraire, c'est-à-dire que l'évolution ultérieure de la géométrie euclidienne conduira une fois à une contradiction. Cette contradiction signifierait la réfutation de l'axiome euclidien des parallèles.

Or les recherches de BOLYAI prouvent que ce dernier cas est impossible, en supposant que les axiomes de la géométrie absolue, c'est-à-dire les axiomes de la géométrie euclidienne, à l'exception de l'axiome des parallèles, forment un système non-contradictoire. BOLYAI a notamment démontré qu'en introduisant, dans les axiomes de la géométrie euclidienne, au lieu de la notion du plan, la notion de surface F (c'est-à-dire la parasphère) et au lieu de la droite, la ligne L (c'est-à-dire le paracycle), on obtient de ces axiomes, y compris l'axiome des parallèles, des théorèmes qui peuvent être démontrés au moyen de la géométrie hyperbolique. Il en résulte que cette transformation nous donne la possibilité de démontrer en s'appuyant sur les axiomes de la géométrie hyperbolique les transformés non seulement des axiomes de la géométrie euclidienne, mais aussi des théorèmes fondés sur ces axiomes mêmes.

En général cette idée peut se concevoir de la façon suivante. Soient A et B deux systèmes d'axiomes. Supposons qu'à chaque notion fondamentale du système d'axiomes A corresponde une notion définissable dans le système d'axiomes B (éventuellement une notion fondamentale de ce système). Faisons correspondre à chaque proposition T — ne contenant aucune autre notion que des notions logiques et des notions fondamentales du système d'axiomes A — une proposition T', formée de telle manière qu'on y remplace toutes les notions fondamentales par la notion correspondante, définissable dans le système d'axiomes B. Supposons, qu'au moyen de cette opération transformant T en T', tout axiome du système d'axiomes A se transforme en un théorème démontrable à l'aide du système d'axiomes B (éventuellement en un axiome du système d'axiomes B). Nous disons en ce cas, que la transformation ci-dessus qui fait correspondre à chaque notion fondamentale du système d'axiomes A une notion définissable dans le système d'axiomes B, est un *modèle* du système d'axiomes A dans le système d'axiomes B; nous appelons la transformation $T \rightarrow T'$ *l'application* de ce modèle. Or, *l'application du modèle transforme non seulement les axiomes du système A en théorèmes démontrables à l'aide du système d'axiomes B, mais elle transforme également les théorèmes démontrables à l'aide du système A en théorèmes démontrables à l'aide du système B.* Soit en effet T un théorème quelconque, démontrable à l'aide du système d'axiomes A et soit D une démonstration quelconque du théorème T dans le système d'axiomes A. Donc, D est une suite de propositions $T_1, T_2, \ldots, T_n$, dont chacune est ou bien l'un des axiomes du système d'axiomes A, ou bien une conséquence logique des propositions qui la précèdent dans cette suite, et T_n n'est autre que le théorème T. Désignons, pour $k = 1, 2, \ldots, n$, par T'_k la proposition obtenue de T_k par l'application du modèle. Nous allons maintenant démontrer que T'_k est un théorème démontrable à l'aide du système d'axiomes B. D'après notre supposition, cette assertion est valable pour les valeurs de k, pour lesquelles T'_k est un axiome du système d'axiomes A, en particulier pour $k = 1$ (car T_1 ne peut être une conséquence logique des propositions qui la précèdent dans D vu qu'il n'existe aucune proposition qui la précède, de sorte que T_1 ne peut être qu'un axiome du système d'axiomes A). Supposons maintenant que notre assertion soit valable pour tous les indices moindres que k; nous allons démontrer qu'en ce cas elle est aussi valable pour k. Il ne nous faut démontrer cette assertion que dans le cas ou T_k n'est pas un des axiomes du système d'axiomes A, en telle sorte qu'elle est la conséquence logique de quelques-unes des propositions $T_1, T_2, \ldots, T_{k-1}$. La proposition T'_k est également une conséquence logique des propositions correspondantes parmi $T'_1, T'_2, \ldots, T'_{k-1}$, l'application du modèle conservant les rapports logiques reliant les propositions. Or, les propositions $T'_1, T'_2, \ldots, T'_{k-1}$ sont, par hypothèse, des théorèmes démontrables à l'aide du système d'axiomes B; il en résulte donc que T'_k l'est également, puisque toute conséquence logique des théorèmes démontrables à l'aide du système d'axiomes B est également démontrable à l'aide du système d'axiomes B. Par conséquent, la proposition T'_n, obtenue de la proposition T par l'application du modèle, est aussi un théorème démontrable à l'aide du système d'axiomes B.

Il en résulte donc que si le système d'axiomes A possède un modèle dans le système d'axiomes B, et si le système d'axiomes B est non-contradictoire, le système d'axiomes A l'est également. En effet, si le système d'axiomes A était contradictoire, c'est-à-dire s'il existait deux propositions T et $\overline{T}$, toutes deux théorèmes démontrables à l'aide du système d'axiomes A, et dont

$\overline{T}$ était la négation de la proposition T (c'est-à-dire qu'elle affirme que T n'est pas vraie), nous obtiendrions, par l'application du modèle, les propositions T' et $\overline{T}'$, qui seraient toutes deux des théorèmes démontrables à l'aide du système d'axiomes B, et dont $\overline{T}'$ serait la négation de la proposition T' (puisque le fait qu'une proposition est la négation d'une autre est conservé dans l'application du modèle). En ce cas, le système d'axiomes B serait de même contradictoire. En d'autres termes, si nous réussissons de donner un modèle du système d'axiomes A dans le système d'axiomes B, cela signifie que nous avons ramené la question de la non-contradiction du système d'axiomes A à la même question concernant le système d'axiomes B. On peut alors s'exprimer de cette façon aussi : nous avons démontré la non-contradiction *relative* du système d'axiomes A par rapport au système d'axiomes B.

Du fait que JEAN BOLYAI construisit un modèle du système d'axiomes de la géométrie euclidienne dans le système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky, il résulte que si le système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky est non-contradictoire, le système d'axiomes de la géométrie euclidienne l'est également. Ce n'est pas dans ce but que BOLYAI construisit un modèle du système d'axiomes de la géométrie euclidienne dans le système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky — car en ce temps-là, la possibilité de la contradiction de la géométrie euclidienne ne venait même pas à l'esprit — mais dans le but d'accélérer l'établissement de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky. En effet, au moyen de cette méthode beaucoup de théorèmes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky ont été déduits d'un seul coup, à savoir tous les théorèmes qui résultent des théorèmes de la géométrie euclidienne en y remplacant les notions du plan et de la droite, par les notions respectives de la surface F, et de la ligne L. Cependant, c'est sans doute le mérite de BOLYAI d'avoir introduit dans la géométrie la première application *de la méthode des modèles.*

Cette méthode nous a conduit à la solution du problème mentionné ci-dessus et laissé sans résolution par BOLYAI (et par LOBATCHEVSKY) : à savoir la réduction de la non-contradiction du système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky à la non-contradiction du système d'axiomes euclidien. On n'avait besoin à ce but que de la construction d'un modèle du système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky dans le système d'axiomes de la géométrie euclidienne. Un tel modèle fut établi pour la première fois par CAYLEY et par FELIX KLEIN d'une part et par JULES KÖNIG de l'autre. Le modèle de JULES KÖNIG, peu connu, présente un intérêt particulier. Il est basé sur le fait qu'il est facile de construire, dans le système d'axiomes de l'espace euclidien à quatre dimensions, un modèle du système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky ; pour cela, il suffit de considérer, dans cet espace à quatre dimensions, une hypersurface à trois dimensions ayant une courbure négative constante, d'en substituer les points aux points de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky, les lignes géodétiques aux droites de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky, et les surfaces géodétiques à deux dimensions aux plans de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky ; les notions d'incidence, d'ordre et d'égalité se transforment en elles-mêmes. D'autre part, il n'est pas difficile, en s'appuyant sur le fait que les droites de l'espace forment une configuration à quatre dimensions, de construire dans le système d'axiomes de la géométrie euclidienne à trois dimensions, un modèle du système d'axiomes de la géométrie euclidienne à quatre dimensions (les droites de la géométrie à trois dimensions correspondent dans ce modèle aux points de la géométrie à quatre dimensions). Par la réunion de ces deux modèles, JULES KÖNIG réussit à obtenir un modèle du système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky dans le système d'axiomes de la géométrie euclidienne, modèle dans lequel certaines droites de la géométrie euclidienne correspondent aux points de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky, à savoir les droites qui relient les points d'une hyperbole équilatère aux points d'une hyperboloïde à une enveloppe formée par la rotation d'une autre hyperbole équilatère. Le modèle de Cayley—Klein, tout aussi bien que celui de J. König, prouve que si le système d'axiomes de la géométrie euclidienne est non-contradictoire, le système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky l'est également.

Le fait qu'il fut possible de ramener la question de la non-contradiction du système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky à la question correspondante du système d'axiomes de la géométrie euclidienne, a soulevé la question de la non-contradiction de la géométrie euclidienne. HILBERT réussit à ramener cette question à la non-contradiction du système d'axiomes de l'arithmétique des nombres réels, également à l'aide de la méthode des modèles. Dans ce but, il lui fallut construire un modèle du système d'axiomes de la géométrie euclidienne dans le système d'axiomes de l'arithmétique des nombres réels. Cela était facile, en utilisant l'idée fondamentale de la géométrie analytique de Descartes. Il fit correspondre, aux points de la géométrie euclidienne, des triples de nombres réels, aux plans de la géométrie euclidienne, des équations linéaires à trois inconnues (plus précisément, l'ensemble des équations formées par multiplication d'une équation linéaire à trois inconnues par une constante), et aux droites de la géométrie euclidienne, des systèmes d'équations formées par deux équations linéaires à trois inconnues (plus précisément, l'ensemble des équations formées par multiplication par des constantes et par addition de deux équations linéaires à trois inconnues, n'étant pas contradictoires entre elles) ; à l'incidence, la relation suivant laquelle un triple de nombres vérifie une équation linéaire à trois inconnues, respectivement qu'une équation linéaire à trois inconnues résulte par multiplication par des constantes et par addition de deux équation linéaires à trois inconnues ; enfin, à la notion d'ordre et à celle d'égalité des segments, les relations arithmétiques qui expriment ces notions géométriques dans la géométrie analytique.

La réduction de la question de la non-contradiction du système d'axiomes de la géométrie, à la question correspondante du système d'axiomes des nombres réels, a soulevé la question de la non-contradiction du système d'axiomes des nombres réels. La méthode des modèles n'est pas applicable pour résoudre cette question, car elle ne fournit que des démonstrations de non-contradiction relatives, mais il ne s'agit plus ici d'une telle démonstration. HILBERT prouva la possibilité en principe de démontrer, dans "le sens absolu", la non-contradiction d'un système d'axiomes. Il nous faut, pour cela, savoir exactement, ce que nous entendons par proposition ainsi que par démonstration et par contradiction, à ce but, il est nécessaire d'autre part, de définir d'une façon précise la condition sous laquelle on peut affirmer qu'une proposition est une conséquence logique d'autres propositions, où bien qu'elle est la négation d'une autre proposition. On a réussi de définir de façon précise ces notions par l'application des méthodes de la logique mathématique. Il fut de plus nécessaire de considérer, en dehors de la transformation que nous désignons application d'un modèle, d'autres transformations, qui transforment les démonstrations en de nouvelles démostrations (éventuellement en démonstrations appartenant au même système d'axiomes). HILBERT a établi une théorie complète pour la démonstration absolu de la non-contradiction des systèmes d'axiomes; cette théorie est connue sous le nom de Théorie des démonstrations d'Hilbert. Par l'application de cette théorie, NOVIKOV et GENTZEN ont réussi — indépendamment l'un de l'autre — à démontrer, que le système d'axiomes des nombres naturels est non-contradictoire; en outre, la non-contradiction du système d'axiomes des nombres rationnels ou celui des nombres algébriques ainsi que celle du système d'axiomes de la géométrie euclidienne ou de celui de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky peut être également ramenée à la non-contradiction du système d'axiomes des nombres naturels si nous supprimons l'axiome de continuité de DEDEKIND, et le remplaçons par quelques axiomes qui affirment l'existence des points communs des droites et des circonférences, axiomes qui rendent possibles les constructions au sens euclidien. Quoiqu'il en soit, nous sommes encore très loin de la démonstration de la non-contradiction de l'arithmétique des nombres réels.

En dehors de son application à la non-contradiction des systèmes d'axiomes, il existe encore beaucoup d'autres applications de la méthode des modèles. Dans beaucoup de cas la construction du modèle prend la forme d'une définition. La définition des nombres réels d'après DEDEKIND (ou WEIERSTRASS, ou CANTOR) en montre un exemple typique, si l'on la considère du point de vue qui suit. Pour la construction de l'analyse nous avons besoin des propriétés des nombres réels qui caractérisent leur ensemble comme un corps continu au sens de DEDEKIND et pourvu d'un ordre archimédien. Ces propriétés forment un système d'axiomes. La définition des nombres réels par les coupures de DEDEKIND n'est rien d'autre que la construction d'un modèle pour ce système d'axiomes dans le système d'axiomes de l'arithmétique et de la théorie des ensembles des nombres rationnels (où donc on n'exige que l'existence des ensembles dont les éléments sont des nombres rationnels).

Parmi les récentes applications de la méthode des modèles il faut de mentionner la démonstration due à GÖDEL de ce que si le système d'axiomes de la théorie des ensembles est non-contradictoire, l'hypothèse de CANTOR concernant le problème du continu ne peut être réfutée à l'aide de ce système d'axiomes. GÖDEL le démontre en construisant, dans le système d'axiomes de la théorie des ensembles, un modèle du système d'axiomes que l'on obtient en y ajoutant l'hypothèse de CANTOR. On arrive à ce modèle lorsqu'on remplace la notion d'*ensemble* par la notion d'*ensemble construisible* (par les méthodes de la logique mathématique et de la théorie des ensembles, dans un certain sens précisément défini). La relation de contenir se transforme en elle-même.

La géométrie de Bolyai—Lobatchevsky eut une influence sur le développement de la méthode axiomatique non seulement par la méthode des modèles. Le fait que la géométrie euclidienne et celle de Bolyai—Lobatchevsky sont simultanément non-contradictoires, peut être formulé de la façon suivante: l'axiome euclidien des parallèles ne peut être ni démontré, ni réfuté à l'aide des axiomes communs à ces deux géométries. C'est cela que nous avons l'habitude d'exprimer en disant que l'axiome euclidien des parallèles est *indépendant* des autres axiomes de la géométrie euclidienne. En général, un certain axiome P est appelé indépendant des axiomes d'un système d'axiomes A dans le cas où ni P ni sa négation ne peuvent être démontrés dans le système d'axiomes A. Le fait que l'axiome euclidien des parallèles est indépendant des autres axiomes de la géométrie euclidienne fut le premier exemple non banal de l'indépendance de l'un des axiomes d'un système d'axiomes des autres axiomes de ce même système. La méthode que l'on applique ici à démontrer l'indépendance d'un axiome peut être formulée dans la forme générale que suit: *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un axiome P, appartenant au système d'axiomes non-contradictoire A, soit indépendant des autres axiomes du système A, est que le système d'axiomes formé à partir de A en remplacent P par $\bar{P}$ soit également non-contradictoire.* Or, nous pouvons traiter cette question en utilisant la méthode des modèles, car nous supposons ordinairement dans l'étude de l'indépendance, que le système en question n'est pas contradictoire. La découverte de l'indépendance de l'axiome euclidien des parallèles des autres axiomes de la géométrie fut le point de départ d'une série d'études sur l'indépendance. Ces recherches nous ont conduit à des notions importantes, comme par exemple dans l'algèbre, la notion du corps non-archimédien, ou bien la notion du corps de caractéristique p.

Le fait que l'axiome des parallèles ne dépend nullement des autres axiomes de la géométrie nous prouve encore, qu'en supprimant du système d'axiomes de la géométrie euclidienne l'axiome des parallèles, nous obtenons un système d'axiomes *incomplet*, et ceci en deux sens. D'une part, il existe une proposition pouvant se formuler au moyen des notions fondamentales du système d'axiomes de la géométrie, par exemple l'axiome même des parallèles qui, de même que sa négation, ne peut être démontré dans le système d'axiomes en question. D'autre part, il existe deux modèles du système d'axiomes, déduit du système d'axiomes de la géométrie euclidienne en supprimant l'axiome des parallèles (par exemple dans le système d'axiomes de l'arithmétique des nombres réels), qui ne sont pas isomorphes dans un sens précisément définissable (l'un pouvant se construire sur le modèle de la géométrie analytique euclidienne, l'autre sur celui de la géométrie analytique hyperbolique). La propriété d'après laquelle toute assertion T qui ne contient que les notions fondamentales d'un système d'axiomes A et les notions de la logique ou bien elle-même, ou bien sa négation $\overline{T}$, doit être démontrable dans le système d'axiomes A, est appelée *catégoricité* du système d'axiomes A. Tandis que le fait exigeant que deux modèles quelconques d'un système d'axiomes A (par exemple deux modèles arithmétiques) soient isomorphes est nommé *monomorphisme* du système d'axiomes A.

La découverte d'après laquelle le système d'axiomes de la géométrie euclidienne est incomplet sans l'axiome des parallèles (bien qu'en espérant de pouvoir y démontrer par la suite l'axiome euclidien des parallèles, on l'ait considéré comme complet), plus exactement, le fait qu'il n'est ni monomorphe, ni catégorique, a donné naissance à l'étude du monomorphisme, et de la catégoricité de divers systèmes d'axiomes. Dans ces études aussi, on a tout d'abord prouvé ces propriétés d'une façon relative, c'est-à-dire qu'on a supposé qu'autres systèmes d'axiomes les possèdent. Ces recherches ont obtenu des résultats en apparence positifs; HILBERT, par exemple, a démontré que si le système d'axiomes de l'arithmétique des nombres réels est monomorphe, le système d'axiomes de la géométrie l'est également. Mais lorsque l'on a commencé à examiner la question de ces propriétés au sens absolu, les recherches ont abouti à des résultats négatifs. SKOLEM, par exemple, a démontré que les systèmes d'axiomes qui ont à caractériser les ensembles indénombrables (comme par exemple les systèmes d'axiomes de l'arithmétique des nombres réels, de la géométrie, de la théorie des ensembles) ne sont pas monomorphes pourvu qu'ils soient non-contradictoires, car ils possèdent en ce cas un modèle dans lequel le rôle des éléments des ensembles qu'ils caractérisent est joué par des nombres naturels, c'est-à-dire qu'ils possèdent un modèle "dénombrable". Ce résultat de SKOLEM, qui est une application d'un théorème de la logique mathématique dû à LÖWENHEIM, n'exclut pas la possibilité du monomorphisme des systèmes d'axiomes qui ont à caractériser des ensembles dénombrables.

Mais SKOLEM a démontré en même temps, que même l'arithmétique des nombres naturels ne possède pas de système d'axiomes monomorphe (système contenant un nombre fini ou dénombrable d'axiomes), car on peut construire, pour chacun de ces systèmes d'axiomes, un modèle dans lequel le rôle des nombres naturels est joué par certaines fonctions arithmétiques qui ne sont pas ordonnées suivant le type ω.

Les recherches sur la catégoricité des systèmes d'axiomes ont également abouti à un résultat négatif. GÖDEL a démontré que, si un système d'axiomes est suffisamment expressif pour qu'on y puisse définir certaines notions arithmétiques et en même temps assez régulier pour qu'on y puisse caractériser, d'une certaine façon arithmétique, la condition pour qu'une proposition soit la conséquence logique d'autres propositions, si d'autre part ce système est non-contradictoire, il ne peut être catégorique.

Ces recherches nous ont conduit à reconnaître que la méthode axiomatique n'est pas applicable ni à la caractérisation univoque à un isomorphisme près des notions fondamentales ni à la décision définitive au moyen des axiomes donnés de tous les problèmes d'une discipline non banale. Par d'autres mots, pour la caractérisation complète des notions reproduisant correctement la réalité il nous faut constamment développer nos méthodes, nos systèmes d'axiomes, et le fait de vouloir connaître de degré en degré la réalité dans sa totalité nous contraint, lui aussi, au développement de ces systèmes. D'après le point de vue du matérialisme dialectique cela semble être naturel, mais il est quand même très important de pouvoir atteindre cette connaissance sans aucune hypothèse philosophique, par les moyens seuls de la mathématique. (En fin de compte, cela est tout naturel, car les assertions du matérialisme dialectique ne sont pas fondées sur des hypothèses particulières, mais sur les résultats des sciences.) C'est un mérite impérissable de JEAN BOLYAI et de NICOLAS IVANOVITCH LOBATCHEVSKY que leurs recherches concernant le système d'axiomes de la géométrie, donc un système d'axiomes particulier, ont conduit finalement à cette connaissance générale concernant la méthode axiomatique.

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ БОЯИ—ЛОБАЧЕВСКОГО НА РАЗВИТИЕ АКСИОМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА

Л. КАЛЬМАР (Сегед)

(Резюме)

Автор показывает, каким образом открытие геометрии Бояи—Лобачевского привело к современным исследованиям, относящимся к непротиворечивости, независимости и полноте систем аксиом. Бояи уже в заглавии своего „Аппендикс" выразил мысль, что вопрос о том, имеет-ли место евклидова аксиома параллельности в действительном пространстве (в котором происходит движение материи) „a priori никогда не может быть решен". Это значит, что геометрии Евклида и Бояи—Лобачевского логически одинакого возможны, то есть непротиворечивы одновременно. Бояи указал и метод, с помощью которого Кэли, Клейн и Дьюла Кёниг впоследствии привели непротиворечивость геометрии Бояи—Лобачевского к соответствующему вопросу, относящемуся к евклидовой геометрии: это — метод моделей, хотя сам Бояи применил его не для исследовании, относящихся к непротиворечивости, а для более простое построение гиперболической геометрии. Автор излагает результаты, достигнутые впоследствии методом моделей, вплоть до теоремы Гёделя о неопровержимости гипотезы Кантора относительно проблемы континуума; он указывает границы метода моделей, приведшие к необходимости применения новых методов в исследованиях вопросов непротиворечивости и приводит новейшие результаты, достигнутые этими методами.

Тот факт, что геометрия Бояи—Лобачевского является непротиворечивым одновременно с евклидовой, означает, что аксиома параллельности является независимой от остальных аксиом геометрии. Это обстоятельство открыло дорогу исследованиям относительно независимости дальнейших аксиом; эти исследования привели между прочим к открытию таких важных алгебраических понятий, как неархимедово поле, или как поле с характеристикой p.

Независимость аксиомы параллельности от остальных аксиом геометрии показывает также, что система аксиом геометрии без аксиомы параллельности неполна в двух отношениях: она некатегорическая, т. е. существует такое предложение формулируемое с помощью основных понятий данной системы аксиом и логических понятий, которое в этой системе аксиом нельзя ни доказать, ни опровергнуть, и она немономорфна, т. е. имеет две неизоморфные модели. Это открытие дало толчок исследованиям, относящимся к категоричности и мономорфизму систем аксиом и приведшим после положительных, но относительных результатов к отрицательным в абсолютном смысле результатам, в том числе к теореме Лёвенгейма—Сколема и к теореме Гёдела о существовании проблем неразрешимых в данной (достаточно выразительной и достаточно правильной) системе аксиом. Эти отрицательные результаты привели к тому результату, — который с точки зрения диалектического материализма естестбенен — что для полной характеристики понятий, правильно отражающих действительность, и для полного познания действительности, необходимо непрерывное развитие наших методов, в том числе—развитие систем аксиом.