

A topológia-megőrzés elegendő feltételein alapuló 3D párhuzamos vékonyító algoritmusok*

Németh Gábor, Kardos Péter, Palágyi Kálmán

Képfeldolgozás és Számítógépes Grafika Tanszék, Szegedi Tudományegyetem
{gnemeth, pkardos, palagyi}@inf.u-szeged.hu

Absztrakt. A kiindulási 3D bináris képpel topológiailag ekvivalens vázszerű jellemzők (középvonal, középfelszín és topológiai mag) meghatározására a leghatékonyabb módszer az objektumok iteratív redukciója, a vékonyítás. A korábban közölt párhuzamos vékonyító algoritmusok esetében először a törlési feltételeiket konstruálták meg, majd a topológia-megőrző párhuzamos redukciókra adott valamely elegendő feltételek segítségével próbálták bizonyítani az adott algoritmus topológiai korrektségét. Mi megfordítottuk a sorrendet: először a topológia-megőrző párhuzamos redukciókra dolgoztunk ki olyan elegendő feltételeket, amelyek alkalmasak törlési szabályok megadására. Az új feltételeinket kombinálva a párhuzamos vékonyító stratégiákkal és az alakmegőrzésnél kulcsfontosságú végpontfeltételekkel, olyan új algoritmus-családokhoz jutottunk, amelyek garantáltan topológia-megőrzők. A jelen munkánkban összefoglaljuk a topológia-megőrzés elegendő feltételein alapuló vékonyítás terén elért eredményeinket.

1. Bevezetés

Bináris képeken az objektumok alak- és topológiai vizsgálata fontos szerepet játszik a képfeldolgozás a számítógépes látás számos területén [23, 24, 26, 27]. Hatékonyságuk miatt a vékonyító algoritmusokat gyakran használják számos alkalmazásban a vázszerű jellemzők meghatározására.

A vékonyítás a vázkijelölés egyik leggyakrabban alkalmazott módszere bináris képeken [5, 9, 24, 25], amely nem csak az objektum topológiáját, de az ún. végpontok megőrzésének köszönhetően az objektum alakját is reprezentálja. A vékonyító algoritmusok olyan redukciós képműveletekből épülnek fel, melyek iterációról iterációra újabb és újabb pontokat törölnek az objektum határáról. Az

* A cikk eredményei az alábbi publikációkban jelentek meg:

Palágyi, K. and Németh, G.: Fully Parallel 3D Thinning Algorithms Based on Sufficient Conditions for Topology Preservation. In: Brlek, S., Reutenauer, C., Provençal, X. (Eds.) DGCI 2009. LNCS, vol. 5810 (2009) pp. 481–492.

Németh, G., Kardos, P., and Palágyi, K.: Topology Preserving 2-Subfield 3D Thinning Algorithms. In Proc. 7th IASTED Int. Conf. Signal Processing, Pattern Recognition and Applications (2010) pp. 310–316.

Németh, G., Kardos, P., and Palágyi, K.: Topology Preserving 3D Thinning Algorithms Using Four and Eight Subfields. In Campilho, A. and Camel, M., editors, Image Analysis and Recognition 2010, Part I, LNCS 6111 (2010) pp. 316–325.

eljárás véget ér, ha az utolsó iterációban már nem találnak törölhető pontot a képen.

A topológia-megőrzés rendkívül fontos a vázkijelölés során, ezért többen javasoltak elegendő feltételeket párhuzamos redukciók topológia-megőrzésére [8, 11, 20]. A korábbi algoritmusoknál először törlési feltételeket határoztak meg, majd ezen elegendő feltételekkel igazolták az algoritmusok topológiai helyességét.

Jelen munkánkban olyan új elegendő feltételekből indulunk ki, amelyek alkalmasak törlési feltételek megadására. Ezen törlési szabályokat különböző végpontfeltételekkel és vékonyító stratégiákkal ötvözve újabb és újabb algoritmusokat kapunk, amelyek garantáltan topológia-megőrzők.

A cikk további részében az alapvető definíciók és jelölések a 2. fejezetben kerülnek bevezetésre, majd a topológia-megőrzés főbb tételeit ismertetjük a 3. fejezetben. A javasolt algoritmusainkat a 4. fejezetben tárgyaljuk és szemléltetjük az algoritmusok eredményeit, és végül összegezzük munkánkat.

2. Definíciók és jelölések

A digitális topológia alapvető fogalmainál Kong és Rosenfeld [7] tárgyalásmódját és jelöléseit követjük.

Egy háromdimenziós $(26,6)$ digitális bináris kép leírható a $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ rendezett négyessel. \mathbb{Z}^3 a háromdimenziós ortogonális rács egész koordinátájú pontjainak halmaza. $B \subseteq \mathbb{Z}^3$ a fekete pontok halmazát jelöli, ennek komplementere, $\mathbb{Z}^3 \setminus B$ pedig a fehér pontok halmazát adja. A három leggyakrabban használt szomszédsági relációt az 1(a) ábrán mutatjuk be. Az általunk használt definíciók szerint egy bináris kép előtérpontjait a fekete pontok, háttérpontjait a fehér pontok alkotják.

A p -vel j -szomszédos pontok halmazát $N_j(p)$ -vel jelöljük ($j = 6, 18, 26$). A p pont valódi szomszédait az $N_j^*(p) = N_j(p) - \{p\}$ halmaz tartalmazza.

Egy $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ képen a fekete, maximálisan 26-összefüggő komponenseket objektumoknak nevezzük, míg a maximálisan 6-összefüggő fehér komponensek alkotják a háttérret, alagutakat és az üregeket.

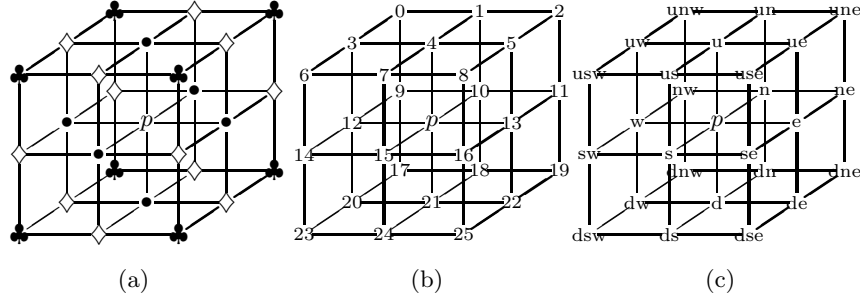
Egy p fekete pontot *határpont*nak nevezünk, ha van legalább egy fehér 6-szomszédja. Azokat a fekete pontokat, amelyek nem határpontok, *belső pont*oknak nevezzük.

Fontos lesz bevezetnünk egy rendezési relációt a \mathbb{Z}^3 -beli pontok között.

1. definíció. A \prec lexikografikus rendezés reláció a $p = (p_x, p_y, p_z)$ és a $q = (q_x, q_y, q_z)$ \mathbb{Z}^3 -beli pontok között, amely a következőképpen definiált:

$$p \prec q \Leftrightarrow (p_z < q_z) \vee (p_z = q_z \wedge p_y < q_y) \vee (p_z = q_z \wedge p_y = q_y \wedge p_x < q_x).$$

2. definíció. Egy X ponthalmaznak a p a legkisebb indexű eleme, ha $p \prec q$ teljesül bármely $q \in X \setminus \{p\}$ pontra.



1. ábra: A p -vel 6-szomszédos pontok $N_6(p)$ halmaza p -ből és a “•”-gal jelölt pontokból áll. A 18-szomszédok $N_{18}(p)$ halmaza tartalmazza a 6-szomszédokat és a “◊” szimbólummal jelölt pontokat. A 26-szomszédok $N_{26}(p)$ halmaza tartalmazza a 18-szomszédokat és a “♣” szimbólummal jelölt elemeket (a). A p pont $3 \times 3 \times 3$ -as környezetében lévő pontokat a (b) ábra szerint indexeljük és a (c) ábrán látható módon jelöljük az irányokat.

3. Topológia-megőrző párhuzamos redukciók

A párhuzamos vékonyító algoritmusok párhuzamos redukciós lépésekből épülnek fel. Egy párhuzamos redukciós operátor egyidejűleg törli a fekete pontok egy halmazát, vagyis színüket feketéről fehérre változtatja, míg a fehér pontok változatlanul maradnak. Az olyan objektumpontot, amelynek törlése topológia-megőrző redukció, vagyis nem szakít szét és nem tüntet el objektumot, nem hoz létre és nem szüntet meg üregeket vagy alagutakat, *egyszerű pontnak* nevezzük, vagyis egy egyszerű pont törlése topológia-megőrző redukció. Az egyszerűség lokális tulajdonság a $(26,6)$ képeken, amely eldönthető a pont $3 \times 3 \times 3$ -as környezetének vizsgálatával.

3. definíció. [15] *Egy p fekete pont egyszerű pont a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ képen, ha az alábbi három feltétel mindegyike teljesül:*

1. *Az $N_{26}^*(p) \cap B$ halmaz pontosan egy 26-komponensből áll.*
2. *p -nek van fehér 6-szomszédja.*
3. *p bármely két fehér 6-szomszédja 6-összefüggő az $N_{18}^*(p) \cap (\mathbb{Z}^3 \setminus B)$ halmazon belül.*

A párhuzamos redukciós operátorok még az egyszerű pontok valamely halmazának egyidejű törlésével is megváltoztathatják az objektum topológiáját. Ennek elkerülése érdekében a topológia-megőrzés elegendő feltételei kerültek kidolgozásra [8, 11, 20]. Párhuzamos redukciók topológia-megőrzésének egyik kulcsa az egyszerű halmaz definíciója.

4. definíció. [11] *Legyen $D = \{d_1, \dots, d_k\}$ fekete pontoknak egy halmaza. A D halmaz egy egyszerű halmaz a $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ képen, ha elemei egy olyan $\langle d_{i_1}, \dots, d_{i_k} \rangle$ sorozatba rendezhetők, ahol d_{i_1} egyszerű pont a \mathcal{P} képen és minden*

d_{i_j} pont egyszerű a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B \setminus \{d_{i_1}, \dots, d_{i_{j-1}}\})$ képen ($j = 2, \dots, k$). Definíció szerint az üres halmaz egyszerű halmaz.

Az egyszerű halmaz fogalmának ismeretében kimondhatunk olyan feltételeket, amelyek biztosítják a párhuzamos redukciók topológia-megőrzését. Az alábbi két tétel erre ad elegendő feltételeket.

1. tétel. [11] *Egy \mathcal{O} 3D párhuzamos redukciós operátor topológia-megőrző a $(26, 6)$ képeken, ha a következő feltételek mindegyike teljesül:*

1. \mathcal{O} csak egyszerű pontokat töröl.
2. Ha \mathcal{O} töröl két, három, vagy négy kölcsönösen 18-szomszédos fekete pontot, akkor ezen pontok egyszerű halmazt alkotnak.
3. \mathcal{O} nem töröl teljesen olyan objektumot, amelynek minden pontja kölcsönösen 26-szomszédos egymással.

2. tétel. [20] *Legyen \mathcal{O} egy párhuzamos redukciós operátor. Legyen p egy olyan fekete pont a $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ képen, amely törölhető az \mathcal{O} operátor által. Legyen \mathcal{Q} a $Q \subseteq N_{18}^*(p) \cap B$ halmazok egy családja úgy, hogy minden $q_1, q_2 \in Q$ esetében $q_1 \in N_{18}^*(q_2)$. Az \mathcal{O} operátor topológia-megőrző, ha az alábbi két feltétel mindegyike teljesül:*

1. p egyszerű a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B \setminus Q)$ képen minden $Q \in \mathcal{Q}$ esetén.
2. \mathcal{O} nem töröl teljesen olyan fekete komponens, amely befoglalható egy $2 \times 2 \times 2$ -es kockába.

Ezen elegendő feltételeket 3D párhuzamos topológiai algoritmusok topológiai korrektségének bizonyítására használták. Munkánkban azonban ezeket az elegendő feltételeket vettük alapul, és a három párhuzamos redukciós technikával ötvözve olyan új elegendő feltételeket adtunk, amely vékonyító algoritmusok törlési feltételeinek generálására is alkalmasak [17, 18, 22]. A továbbiakban ezen algoritmusokat ismertetjük.

4. Párhuzamos vékonyító algoritmusok

A háromdimenziós vékonyító algoritmusok a két vázszerű alakleíró jellemző, a középvonal vagy a középfelszín kivonására alkalmasak. A vékonyító algoritmusok olyan iteratív redukciós lépéseken alapuló eljárások, melyek során megőrizzzük azokat a pontokat, amelyek lényegesek az objektum geometriáját illetően. Ezen pontokat *végpontoknak* nevezzük. Különböző végpontfeltételek alkalmazásával más-más vázközelítéshez jutunk. Háromdimenziós objektumok esetében középfelszín kivonásához *felszín-végpontokat*, középvonal meghatározásához pedig *vonals-végpontokat* definiálhatunk.

Az irodalomban számos végpontfeltétel ismert [1, 12–14, 16, 20, 21], azonban ezek közül algoritmusainkban csak az alábbi végpontfeltételeket használjuk. Az alábbi kilenc definícióban öt felszín- és négy vonalvégpont feltételt ismertetünk.

5. definíció. *Egy p fekete pont S1 felszín-végpont, ha az $N_6^*(p)$ halmaz nem tartalmaz belső pontot.*

6. definíció. *Egy p fekete pont S2 felszín-végpont, ha az $N_{18}^*(p)$ halmaz nem tartalmaz belső pontot.*

7. definíció. *Egy p fekete pont S3 felszín-végpont, ha az $N_{26}^*(p)$ halmaz nem tartalmaz belső pontot.*

Megjegyezzük, hogy az S1, S2 és S3 felszín-végpont feltételek felfedezhetők a Manzanera és munkatársai által közölt algoritmusokban [16].

8. definíció. *Egy p fekete pont S4 felszín-végpont, ha van két olyan fehér 6-szomszédja, amely egymásnak nem 18-szomszédai, vagyis $q, r \in N_6^*(p)$ fehér pontok esetében $q \notin N_{18}^*(r)$ és $r \notin N_{18}^*(q)$.*

Ezt a felszín-végpont feltételt Palágyi és Kuba vezette be [21].

9. definíció. [1] *Egy p fekete pont S5 felszín-végpont, ha az $N_{26}^*(p)$ halmaz legalább két fekete és legalább két fehér komponensből áll.*

10. definíció. *Egy p fekete pont C1 vonal-végpont, ha az $N_{26}^*(p)$ halmaz pontosan egy fekete pontot tartalmaz.*

11. definíció. [13] *Egy p fekete pont C2 vonal-végpont a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ képen, ha $N_{26}^*(p) \cap B = \{q\}$, továbbá*

- $N_{26}^*(q) = p$, vagy
- $N_{26}^*(q) = \{p, r\}$.

12. definíció. [13] *Egy p fekete pont C3 vonal-végpont a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ képen, ha $N_{26}^*(p) \cap B = \{q\}$, továbbá*

- $N_{26}^*(q) = p$, vagy
- $N_{26}^*(q) = \{p, r\}$ és r legfeljebb két fekete ponttal 26-szomszédos.

13. definíció. [1] *Egy p fekete pont C4 vonal-végpont, ha az $N_{26}^*(p)$ halmaz legalább két fekete komponenset tartalmaz.*

Megjegyezzük, hogy abban az esetben, ha nem alkalmazunk végpontfeltételt, akkor az általunk javasolt algoritmusok az eredeti objektumokat velük topológiai-lag ekvivalens minimális (vagyis egyszerű pontot nem tartalmazó) objektumokká zsugorítják, vagyis a *topológiai mag* előállítására alkalmasak [17, 18].

Algoritmusainkban egy topológia-megőrző törlési feltétel-rendszert veszünk alapul, és ezen párhuzamos redukciós operátort különböző végpontfeltételekkel kombináljuk, így újabb és újabb vékonyító algoritmus-családhoz juthatunk, amelyek garantáltan megőrzik a kiindulási objektum topológiáját.

A könnyebb áttekinthetőség érdekében bevezetjük az alábbi definíciót.

14. definíció. *Egy választott ε végpontfeltétel mellett egy fekete pont ε -törölhető a $(26, 6)$ képen, ha egyszerű és nem ε végpont.*

Most már definiálhatjuk a 1. és 2. tételekből származtatott törlési feltételeket.

15. definíció. *Legyen p egy fekete pont a $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ képen és ε egy választott végpontfeltétel. Legyen \mathcal{Q} a $Q \subseteq N_{18}^*(p) \cap B$ halmazok egy családja úgy, hogy minden $q_1, q_2 \in Q$ esetében $q_1 \in N_{18}^*(q_2)$. A p pont \mathcal{T}_{PK} - ε -törölhető, ha eleget tesz az alábbi feltételeknek:*

1. p ε -törölhető a \mathcal{P} képen.
2. p egyszerű marad a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B \setminus Q)$ képen bármely ε -törölhető pontokból álló Q halmaz esetén.
3. Minden $2 \times 2 \times 2$ -es kockába befoglalható p -t tartalmazó fekete komponens esetében p nem a legkisebb indexű elem.

16. definíció. *Legyen p egy fekete pont a $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ képen és ε egy választott végpontfeltétel. A p pont \mathcal{T}_{Ma} - ε -törölhető, ha p eleget tesz az alábbi feltételeknek:*

1. p ε -törölhető a \mathcal{P} képen.
2. ha p része egy két-, három- vagy négyelemű kölcsönösen 18-szomszédos ε -törölhető ponthalmaznak, akkor ez a halmaz egyszerű halmazt alkot.
3. Minden $2 \times 2 \times 2$ -es kockába befoglalható p -t tartalmazó fekete komponens esetében p nem a legkisebb indexű elem.

A fenti két definíció segítségével kimondhatjuk a következő tételeket.

3. tétel. *A \mathcal{T}_{PK} pontokat törlő párhuzamos redukciós operátorok topológia-megőrzők a $(26, 6)$ képeken.*

4. tétel. *A \mathcal{T}_{Ma} pontokat törlő párhuzamos redukciós operátorok topológia-megőrzők a $(26, 6)$ képeken.*

A fenti tételek könnyen bizonyíthatók, mivel azok kielégítik az 1. és a 2. tételek feltételeit. A 15. és a 16. definíciók tehát alkalmasak topológia-megőrző párhuzamos redukciók törlési feltételeinek megadására, mely általános feltételek az egyes párhuzamos vékonyító stratégiák és végpontfeltételek mellett jelentősen egyszerűsödnek. Pl. könnyen belátható, hogy az S1, az S2 és az S3 végpontfeltételek (lásd 5-7. definíciók) mellett a 15. és a 16. definíciókban szereplő 3. feltételek elhagyhatók, mivel akkor a $2 \times 2 \times 2$ -es kockák által tartalmazott fekete komponensek valamennyi eleme megőrzendő végpont.

A továbbiakban a 15. és 16. definíciókból származtatott és a három törlési stratégiát használó vékonyító algoritmusokat ismertetjük.

4.1. Teljesen párhuzamos algoritmusok

A teljesen párhuzamos vékonyító algoritmusok ugyanazt a párhuzamos redukciós operátort használják minden iterációs lépésben.

Egy választott $\mathcal{T}_i - \varepsilon$ törlési feltételt alkalmazó teljesen párhuzamos vékonyító algoritmus pszeudo-kódja az alábbi módon írható le ($i = PK, Ma$):

1. algoritmus. $FP-\mathcal{T}_i - \varepsilon$ teljesen párhuzamos vékonyító algoritmus

Input: $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, X)$

Output: $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, Y)$

$Y = X$

repeat

$D = \{p \mid p \in Y \text{ FP-}\mathcal{T}_i - \varepsilon\text{-törölhető}\}$

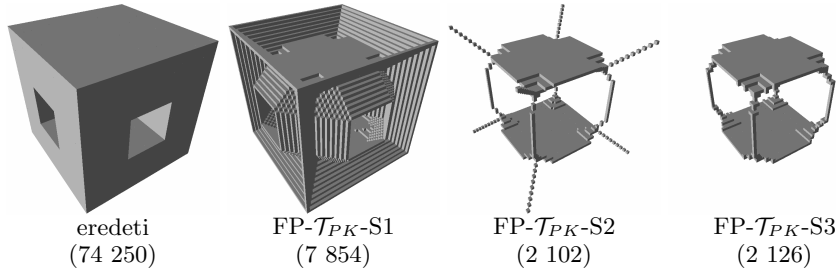
$Y = Y \setminus D$

until $D = \emptyset$

Az $FP-\mathcal{T}_{PK} - \varepsilon$ -törölhető és $FP-\mathcal{T}_{Ma} - \varepsilon$ -törölhető pontok feltételei rendre meg-
egyeznek a 15. és 16. definíciókban megadott feltételekkel.

Ezt az algoritmust Palágyi és Németh az $FP-\mathcal{T}_{PK} - \varepsilon$ törlési feltétellel és S1, S2, S3 végpontfeltételekkel mutatta be [22].

Az $FP-\mathcal{T}_{PK} - S1$, $FP-\mathcal{T}_{PK} - S2$ és $FP-\mathcal{T}_{PK} - S3$ algoritmus eredményeit a 2. ábra szemlélteti.



2. ábra: Az S1, S2 és S3 végpontfeltételeket alkalmazó teljesen párhuzamos vékonyító algoritmusok eredményei egy $45 \times 45 \times 45$ méretű testképre. A zárójelben lévő számok az objektumpontok számát tükrözik.

Megjegyezzük, hogy ezen algoritmushoz más végpontfeltételeket is alkalmazhatunk, de bizonyos végpontfeltételekkel az eredmény számos nemkívánatos váz-
ágot fog eredményezni.

4.2. Irány-szekvenciális algoritmusok

Az irány-szekvenciális eljárások esetében egy iterációs lépést k aliterációra osztunk fel, amelyekhez egy-egy meghatározott törlési irányt rendelünk [2, 3, 10, 20,

21]. Az egyes aliterációkban azokat a határpontokat töröljük, amelyek megfelelnek az aktuális törlési iránynak (lásd 1(c) ábra). A továbbiakban a törlési irányok sorrendjét a $\Delta_k = \langle \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k \rangle$ szekvencia jelöli. Munkánkban a hat főirányt, U -t, D -t, N -t, S -t, E -t, és W -t vesszük alapul (lásd 1(c) ábra) [19], tehát $\Delta_6 = \langle U, D, N, S, E, W \rangle$.

Mivel az irány-szekvenciális algoritmusok esetében egy aliterációban csak egy adott δ_i irányból törölünk, ezért meg kell különböztetnünk a határpontokat a Δ_k szekvenciában szereplő irányok szerint ($k > 1, i = 0, \dots, k$). Nevezzük δ -határpontnak azokat a pontokat, amelyek az aktuális δ törlési irány szerint határpontnak tekinthetők. A hat főirányra a következőképpen definiálhatjuk a δ -határpontokat. Egy p fekete pont U -határpont, ha U -szomszédja fehér. Ez a definíció hasonlóan alkalmazható a N, E, S, W, D főirányokra is. Azt mondjuk, hogy a p fekete pont UN -határpont, ha az U -szomszédja, vagy pedig az N -szomszédja fehér. A definíció hasonlóan alkalmazható a többi mellékirányra is (lásd 1(c) ábra).

Az általunk javasolt 6-irányú, \mathcal{T} topológia-megőrző törlési feltételt és ε végpontot alkalmazó algoritmusunk a 2. algoritmus szerint vázolható fel.

2. algoritmus. DIR- \mathcal{T} - Δ_k - ε irány-szekvenciális párhuzamos vékonyító algoritmus

Input: $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, X), \Delta_k = \langle \delta_1, \dots, \delta_k \rangle$

Output: $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, Y)$

$Y = X$

repeat

for $i = 1$ **to** k **do**

$D_i = \{p \mid p \in Y \text{ DIR-}\mathcal{T}\text{-}\delta_i\text{-}\varepsilon\text{-törölhető}\}$

$Y = Y \setminus D_i$

until $D_1 \cup \dots \cup D_k = \emptyset$

Megjegyezzük, hogy a DIR- \mathcal{T} - δ - ε -törölhető pontok a 15. és 16. tételek speciális változatai.

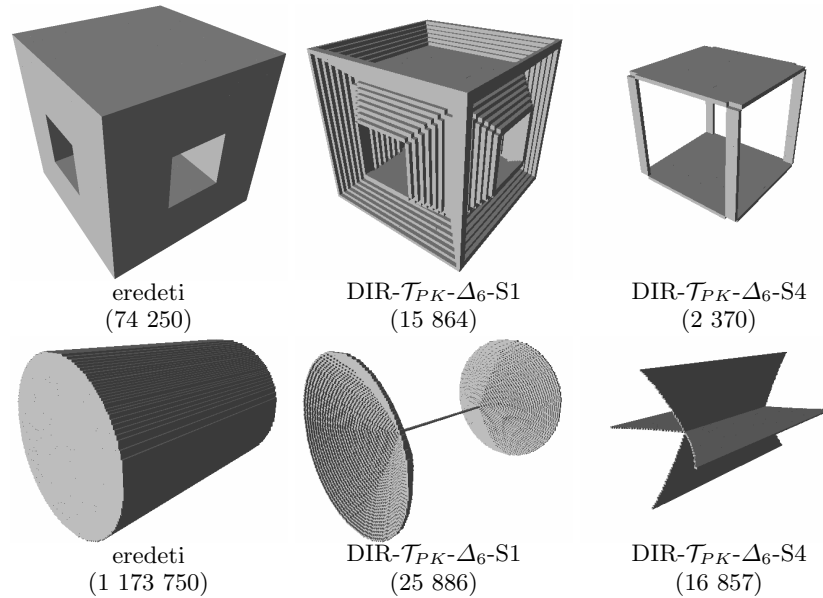
17. definíció. Legyen p egy fekete δ -határpont a $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ képen a δ törlési irány szerint, és ε egy választott végpontfeltétel. A p pont DIR- \mathcal{T}_{PK} - δ - ε -törölhető, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

1. p ε -törölhető a \mathcal{P} képen.
2. p egyszerű a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B \setminus Q)$ képen bármely ε -törölhető δ -határpontokból álló, p -vel és egymással kölcsönösen 18-szomszédos elemeket tartalmazó Q halmazra.
3. p nem a legkisebb indexű eleme egyetlen $2 \times 2 \times 2$ -es kockába befoglalható 2-, 3- vagy 4-elemű, 26-összefüggő, de nem 6-összefüggő fekete komponensnek sem.

18. definíció. Legyen p egy fekete δ -határpont a $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ képen a δ törlési irány szerint és ε egy választott végpontfeltétel. A p pont DIR- \mathcal{T}_{Ma} - δ - ε -törölhető, ha p eleget tesz az alábbi feltételeknek:

1. p ε -törölhető a \mathcal{P} képen.
2. ha p része egy két-, három- vagy négyelemű kölcsönösen 18-szomszédos ε -törölhető δ -határpont halmaznak, akkor ez a halmaz egyszerű halmazzt alkot.
3. p nem a legkisebb indexű eleme egyetlen $2 \times 2 \times 2$ -es kockába befoglalható 2-, 3- vagy 4-elemű, 26-összefüggő, de nem 6-összefüggő fekete komponensnek sem.

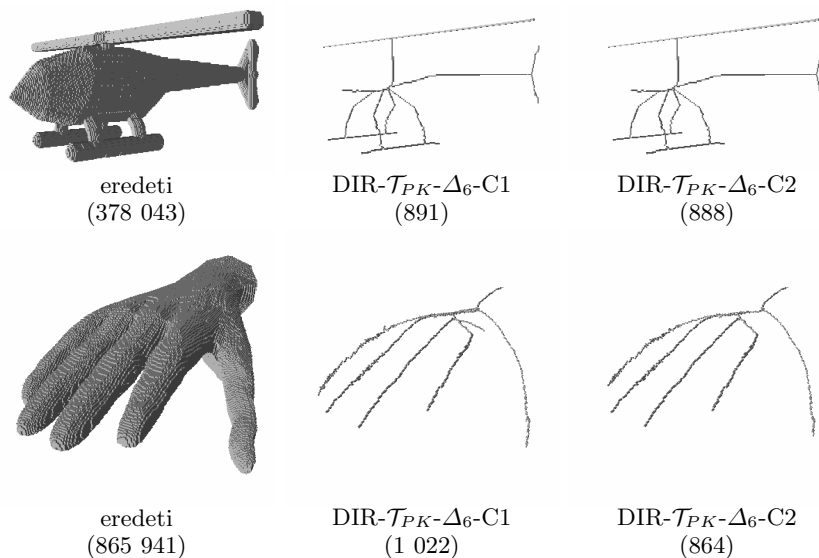
A hat főirányból törülő algoritmusaink mind középfelszín, mind pedig középvonal kivonására is alkalmasak. Ezen topológia-megőrző algoritmusok eredményeit két felszín-végpontra a 3. és két vonal-végpont a 4. ábra mutatja be.



3. ábra: A hat főirányból törülő, középfelszínre vékonyító algoritmusaink eredményei S1 és S4 végpontok esetén egy $45 \times 45 \times 45$ méretű lyukas kockára (felső sor) és egy $104 \times 104 \times 152$ méretű hengerre (alsó sor). A törlési irányokat tekintve a $\Delta_6 = \langle U, D, N, S, E, W \rangle$ irány-szekvenciát alkalmaztuk. A zárójelben lévő számok az objektumpontok számát jelölik.

4.3. Almező-szekvenciális algoritmusok

Az almező-szekvenciális algoritmusok esetében a diszkrét teret k almezőre partícionáljuk. Az almező-szekvenciális vékonyító algoritmusok egy iterációs lépésében az almezőket egymás után aktiváljuk, és az i -edik aliterációs lépés során csak az aktív, $S_k(i)$ almezőben lévő egyszerű pontokat törölhetünk, ($i = 0, \dots, k - 1$).



4. ábra: A hat főirányból törülő, középvonalat kinyerő vékonyító algoritmusaink eredményei C1 és C2 végpontok esetén egy $304 \times 96 \times 261$ méretű helikopter és egy $174 \times 103 \times 300$ méretű kéz képére. A törlési irányokat tekintve a $\Delta_6 = \langle U, D, N, S, E, W \rangle$ irány-szekvenciát alkalmaztuk. A zárójelben lévő számok az objektumpontok számát jelölik.

Az eljárás akkor ér véget, ha az utolsó iterációs lépésben már egyik almezőben sem találtunk törölhető pontot.

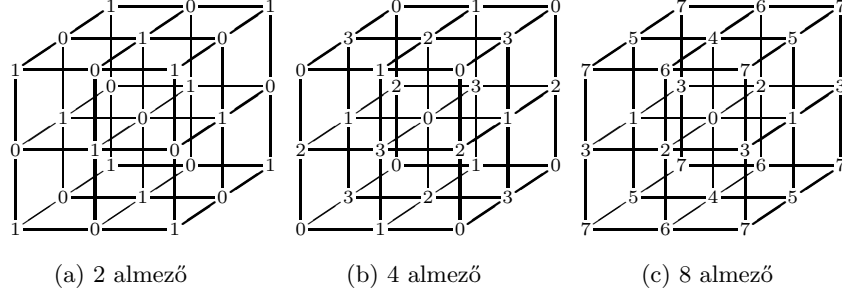
A háromdimenziós teret 2-, 4- és 8-almezőre szokás partícionálni az 5. ábra szerint. Az i -edik almezőbe tartozó pontok $S_k(i)$ halmaza az alábbi módon határozható meg ($k = 2, 4, 8; i = 0, \dots, k - 1$):

$$\begin{aligned} S_2(i) &= \{q = (x, y, z) \mid (x + y + z) \bmod 2 = i\} \\ S_4(i) &= \{q = (x, y, z) \mid 2((z + y) \bmod 2) + ((y + x) \bmod 2) = i\} \\ S_8(i) &= \{q = (x, y, z) \mid 4(z \bmod 2) + 2(y \bmod 2) + (x \bmod 2) = i\} \end{aligned}$$

Ahogy az előző algoritmusoknál is tettük, az almező-szekvenciális algoritmusok sémájába is beépíthetünk különböző törlési- és végpontfeltételeket. A \mathcal{T} törlési feltételt és ε végpontot alkalmazó k -almezős topológia-megőrző eljárásaink sémáját a 3. algoritmus mutatja be.

3. algoritmus. SF- k - \mathcal{T} - ε almező-szekvenciális párhuzamos vékonyító algoritmus

Input: $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, X)$
 Output: $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, Y)$
 $Y = X$



5. ábra: A háromdimenziós tér almezőkre partícionálása. Az (a) ábrán a 3D teret 2 almezőre bontottuk. Az egymással 18-szomszédos pontok tartoznak egy almezőbe. A (b) ábrán a 3D teret 4 almezőre osztottuk fel, ekkor csak az egymással 26-szomszédos pontok esnek egy almezőbe. Végül a (c) ábrán a 3D teret 8 almezőre partícionáltuk, ekkor a pontok $3 \times 3 \times 3$ -as környezetén belül nincs másik olyan pont, amely ugyanabba az almezőbe esne.

```

repeat
  for  $i = 0$  to  $k - 1$  do
     $D_i = \{p \mid p \in Y \cap S_k(i) \text{ SF-}k\text{-}\mathcal{T}\text{-}i\text{-}\varepsilon\text{-törölhető}\}$ 
     $Y = Y \setminus D_i$ 
until  $D_0 \cup \dots \cup D_{k-1} = \emptyset$ 
    
```

Az SF- k - \mathcal{T} - i - ε -törölhető pontok meghatározásához a 15. és 16. definíciókból indulunk ki, azonban az almezőkre bontás miatt a törlési feltételek jelentősen leegyszerűsödnek.

19. definíció. Legyen a $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ kép 2-almezőre partícionálva. A p fekete határpont SF-2- \mathcal{T}_{Ma} - i - ε -törölhető ($i = 0, 1$) a \mathcal{P} képen, ha az alábbi feltételek mindegyike teljesül:

1. A $p \in B \cap S_2(i)$ ε -törölhető,
2. Bármely $q \in (N_{18}^*(p) \setminus N_6^*(p)) \cap B$ ε -törölhető pontra p egyszerű a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B \setminus q)$ képen és q egyszerű a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B \setminus p)$ képen,
3. p nem a lexicografikusan legkisebb eleme egy, két vagy három, egymással 18-szomszédos, de nem 6-szomszédos pontból álló fekete komponensnek.

20. definíció. Legyen a $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ kép 2-almezőre partícionálva. A p fekete határpont SF-2- \mathcal{T}_{PK} - i - ε -törölhető ($i = 0, 1$) a \mathcal{P} képen, ha az alábbi feltételek mindegyike teljesül:

1. A $p \in B \cap S_2(i)$ ε -törölhető.
2. p egyszerű marad bármely $q \in (N_{18}^*(p) \setminus N_6^*(p)) \cap B$ ε -törölhető pont törlése után.
3. p nem a lexicografikusan legkisebb eleme egy, két vagy három, egymással 18-szomszédos, de nem 6-szomszédos pontból álló fekete komponensnek.

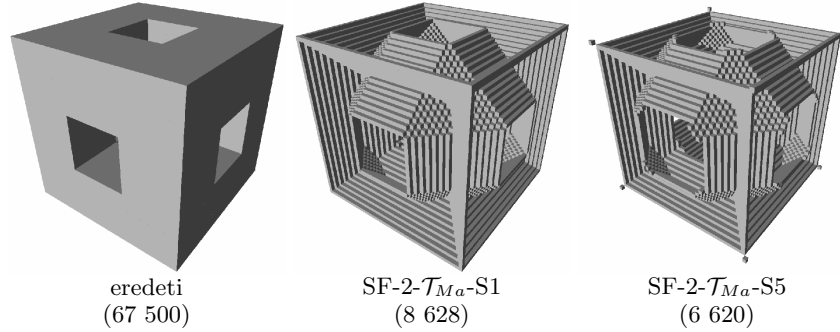
21. definíció. Legyen a $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ kép 4-almezőre partícionálva. A p fekete határpont SF-4- \mathcal{T}_{PK} - i - ε -törölhető vagy SF-4- \mathcal{T}_{Ma} - i - ε -törölhető ($i = 0, \dots, 3$) a \mathcal{P} képen, ha az alábbi feltételek mindegyike teljesül:

1. A $p \in B \cap S_4(i)$ ε -törölhető.
2. p nem a lexicografikusan legkisebb eleme egy két, egymással 26-szomszédos, de nem 18-szomszédos pontból álló fekete komponensnek.

22. definíció. Legyen a $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ kép 8-almezőre partícionálva. A p fekete határpont SF-8- \mathcal{T}_{PK} - i - ε -törölhető vagy SF-8- \mathcal{T}_{Ma} - i - ε -törölhető ($i = 0, \dots, 7$) a \mathcal{P} képen, ha az alábbi feltétel teljesül:

1. A $p \in B \cap S_8(i)$ ε -törölhető.

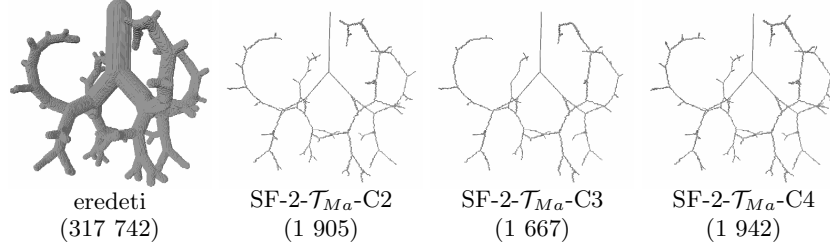
Megjegyezzük, hogy az SF-2- $\mathcal{T}_{Ma-\varepsilon}$ ($\varepsilon \in \{S1, S5, C2, C3, C4\}$) algoritmusainkat a [17]-ben közöltük. A 2-almezős vékonyító algoritmusunk eredményei a 6. és 7. ábrákon láthatók.



6. ábra: A 2-almezős, középfelszínre vékonyító algoritmusaink eredményei egy $45 \times 45 \times 45$ méretű tesztképre. A zárójelben lévő számok a képen lévő objektumpontok számát jelzik.

Bizonyos végpontfeltételeket figyelembe véve, a klasszikus 4- és 8-almezős algoritmusok nemkívánatos vázágakat hagyhatnak hátra (lásd 8. ábra). A jelenség a 2-almezős algoritmusok esetében kevésbé észrevehető, a bemutatott végpontokra nem figyelhető meg. A 4- és 8-almezős algoritmusok esetében azonban az utolsó aliterációk során már olyan pontok is végpontokká válhatnak, amelyek az iteráció elején még nem voltak azok. Ezt elkerülendő, javasoltuk ezen algoritmusoknál az iteráció-szintű végpont-ellenőrzést [18].

Az iteráció-szintű végpont-ellenőrzést alkalmazó almező-szekvenciális algoritmus pseudo-kódja a 4. algoritmusban látható.



7. ábra: A 2-almézös középvonalat meghatározó algoritmusaink eredményei egy $300 \times 300 \times 300$ méretű tesztképre. A zárójelben lévő számok a képen lévő objektumpontok számát jelzik.

4. algoritmus. SF- k - \mathcal{T} -IL- ε almező-szekvenciális párhuzamos vékonyító algoritmus

Input: $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, X)$

Output: $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, Y)$

$Y = X$

repeat

$E = \{p \mid p \in Y \text{ határpont és nem } \varepsilon\text{-végpont}\}$

for $i = 0$ **to** $k - 1$ **do**

$D_i = \{p \mid p \in Y \cap S_k(i) \cap E \text{ SF-}k\text{-}\mathcal{T}\text{-}i\text{-}\varepsilon\text{-törölhető}\}$

$Y = Y \setminus D_i$

until $D_0 \cup \dots \cup D_{k-1} = \emptyset$

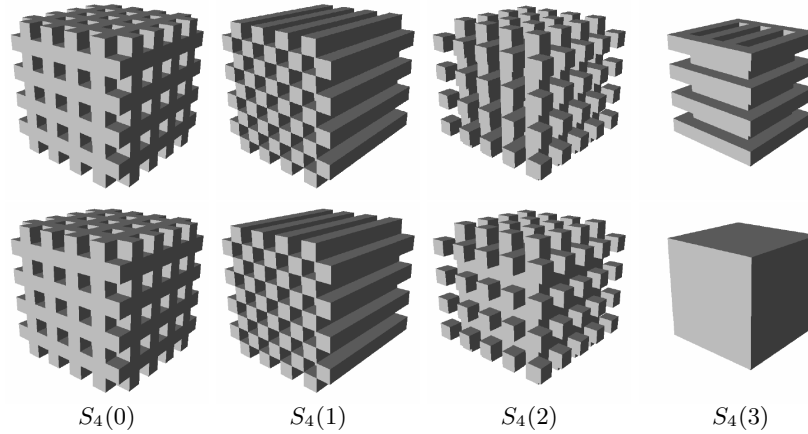
A 4- és 8-almézös vékonyító algoritmusaink eredményeit a 9. és 10. mutatják be.

5. Összefoglalás

A korábban közölt 3D párhuzamos vékonyító algoritmusok esetében először a törlési feltételeket fogalmazták meg, majd a javasolt eljárások topológiai korrektségét bizonyították (hosszadalmasan és nemegyszer hibásan) a párhuzamos redukciók topológia-megőrzésére adott elegendő feltételek segítségével. Jelen cikkünkben olyan új elegendő feltételeket fogalmaztunk meg, amelyek alkalmasak 3D párhuzamos redukciók törlési szabályainak generálására. A párhuzamos vékonyító stratégiák és az alakmegőrzésben kulcsfontosságú végpontkritériumok segítségével az új elegendő feltételeinkből olyan vékonyító algoritmus-családokhoz jutottunk, amelyeknek garantált a topológiai korrektsége.

Köszönetnyilvánítás

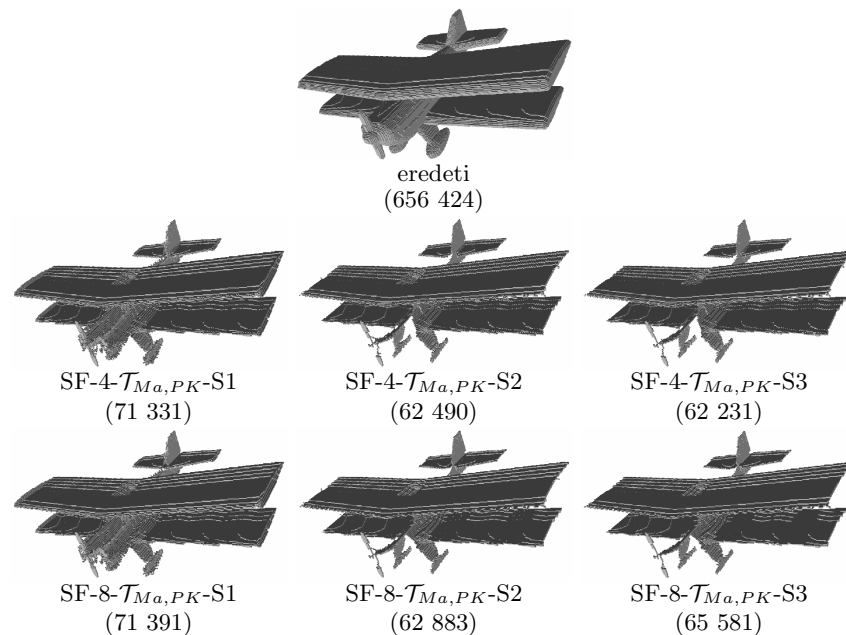
Ez a cikk nem jöhetett volna létre, a Nemzeti Fejlesztési Ügynökség TÁMOP-4.2.2/08/1/2008-0008 programja nélkül.



8. ábra: A 4-almezős vékonyítás egy iterációs lépése. A felső sorban a hagyományos, az alsóban pedig az általunk javasolt iteráció-szintű végpont-ellenőrzést alkalmazó algoritmus folyamata látható. $S_4(i)$ ($i = 0, \dots, 3$) jelöli az aktív almezőt. Az egyszerűség kedvéért most nem őrzünk meg semmilyen határpontot. A hagyományos 4-almezős algoritmus aliterációi során létrejöhetnek újabb és újabb végpontok, amelyekből zavaró, hamis vázágak nőhetnek.

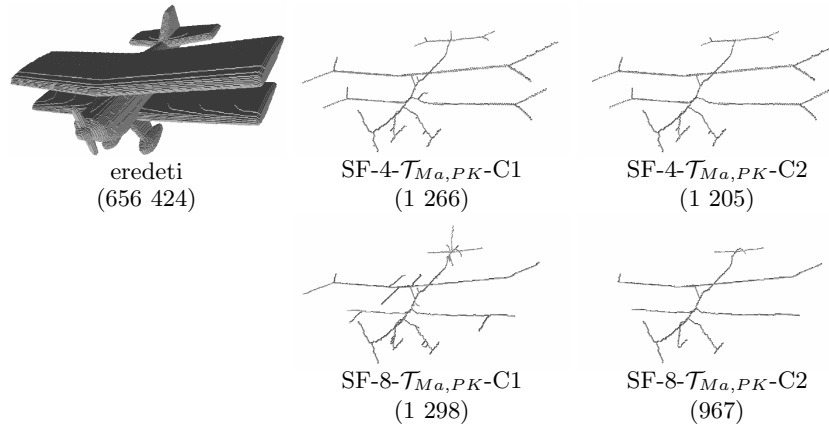
Irodalom

- Bertrand, G. and Aktouf, Z. A 3D Thinning Algorithm Using Subfields. In: SPIE Proc. of Conf. on Vision Geometry, pp. 113–124 (1994)
- Chaussard, J. and Couprie, M. Surface Thinning in 3D Complexes In Wiederhold, P. and Barneva, R. P., editors, IWCIA 2009, LNCS 5852, pp. 135 - 148, (2009)
- Gong, W.X., Bertrand, G. A simple parallel 3D thinning algorithm. In: Proc. 10th Int. Conf. on Pattern Recognition, pp. 188-190 (1990)
- Hall, R. W., Kong, T. Y., Rosenfeld, A. Shrinking Binary Images. In Kong, T. Y. and Rosenfeld, A., editors, Topological Algorithms for Digital Image Processing, pp. 31–98 (1996)
- Hall, R. Parallel Connectivity-Preserving Thinning Algorithms. In Kong, T. Y. and Rosenfeld, A., editors, Topological Algorithms for Digital Image Processing, pp. 145–179 (1996)
- Kardos, P., Németh, G., and Palágyi, K. An Order-Independent Sequential Thinning Algorithm. In Wiederhold, P. and Barneva, R. P., editors, IWCIA 2009, LNCS 5852, pp. 162–175, (2009)
- Kong, T. Y. and Rosenfeld, A. Digital Topology: Introduction and survey. Computer Vision, Graphics, and Image Processing 48, pp. 357–393 (1989)
- Kong, T. Y. On Topology Preservation in 2-d and 3-d Thinning Int. Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence 9, pp. 813–844 (1995)
- Lam, L., Lee, S.-W., and Suen, C. Y. Thinning Methodologies – A Comprehensive Survey. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence 14, pp. 869–885 (1992)
- Lee, T.C., Kashyap, R.L., and Chu, C.N. Building skeleton models via 3-D medial surface/axis thinning algorithms CVGIP: Graphical Models and Image Processing 48, pp. 462 - 478 (1994)



9. ábra: A 4- és 8-almezős, középfelületre vékonyító algoritmusaink eredményei egy $217 \times 304 \times 98$ méretű tesztképre. A zárójelben lévő számok a képen található objektumpontok számát jelzik.

11. Ma, C.M. On Topology Preservation in 3D Thinning. *CVGIP: Image Understanding* 59, pp. 238–339 (1994)
12. Ma, C.M. and Wan, S.Y. A Medial-Surface Oriented 3-d Two-Subfield Thinning Algorithm. *Pattern Recognition Letters* 22, 1439–1446 (2001)
13. Ma, C.M. and Wan, S.Y., and Chang, H.K. Extracting Medial Curves on 3D Images. *Pattern Recognition Letters* 23, 895–904 (2002)
14. Ma, C.M., Wan, S.Y., and Lee, J.D. Three-dimensional Topology Preserving Reduction on the 4-Subfields. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 24, 1594–1605 (2002)
15. Malandain, G., Bertrand, G. Fast characterization of 3D simple points. In: *Proc. 11th IEEE Internat. Conf. on Pattern Recognition*, pp. 232–235 (1992)
16. Manzanera, A., Bertrand, T. M., Prêteux, F., and Longuet, B. nD Skeletonization: a Unified Mathematical Framework. *Journal of Electronic Imaging* 11, pp. 25–37 (2002)
17. Németh, G., Kardos, P., and Palágyi, K. Topology Preserving 2-Subfield 3D Thinning Algorithms. In: *Proc. 7th IASTED Int. Conf. Signal Processing, Pattern Recognition and Applications*, pp. 310–316 (2010)
18. Németh, G., Kardos, P., and Palágyi, K. Topology Preserving 3D Thinning Algorithms Using Four and Eight Subfields. In Campilho, A. and Camel, M., editors, *Image Analysis and Recognition 2010, Part I, LNCS 6111*, pp. 316–325 (2010)
19. Németh, G., Kardos, P., and Palágyi, K. *6-irányú algoritmus* Submitted to the IWCIA 2011 conference.



10. ábra: A 4- és 8-almezős, középvonalat kinyerő algoritmusaink eredményei egy $217 \times 304 \times 98$ méretű tesztképre. A zárójelben lévő számok a képen található objektumpontok számát jelzik.

20. Palágyi, K. and Kuba, A. A parallel 3D 12-Subiteration Thinning Algorithm. *Graphical Models and Image Processing* 61, pp. 199–221 (1999)
21. Palágyi, K., Kuba, A. Directional 3D thinning using 8 subiterations. In: *Proc. 8th 305 306 Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery, DGCI'99, Lecture Notes in 306 307 Computer Science, Vol. 1568. Springer, pp. 325–336 (1999)*
22. Palágyi, K. and Németh, G. Fully Parallel 3D Thinning Algorithms Based on Sufficient Conditions for Topology Preservation. In: *Brek, S., Reutenauer, C., Provençal, X. (Eds.) DGCI 2009. LNCS, vol. 5810, pp. 481–492 (2009)*
23. Palágyi, K., Tschirren, J., Hoffman, E.A., and Sonka, M. Quantitative Analysis of Pulmonary Airway Tree Structures. *Computers in Biology and Medicine* 36, pp. 974–996 (2006)
24. Siddiqi, K. and Pizer, S. M., editors *Medial Representation. Mathematics, Algorithms, and Applications Series in Computational Imaging, Springer (2008)*
25. Suen, C. Y. and Wang, P. S. P., editors. *Thinning Methodologies for Pattern Recognition. Series in Machine Perception and Artificial Intelligence (8), World Scientific, (1994)*
26. Sundar, H., Silver, D., Gagvani, N., and Dickinson, S. Skeleton Based Shape Matching and Retrieval. In: *Proc. Int. Conf. Shape Modeling and Applications, pp. 130–139 (2003)*
27. Wan, M., Liang, Z., Ke, Q., Hong, L., Bitter, I., and Kauffman, A. Automatic Centerline Extraction for Virtual Colonoscopy. *IEEE Transaction on Medical Imaging* 21, pp. 1450–1460 (2002)