

József Attila Tudományegyetem

Természettudományi Kar

**MAGASHŐMÉRSEKLETŰ SZUPRAVEZETŐK PERKOLÁCIÓS
TULAJDONSÁGAINAK MODELLEZÉSE**

Diplomamunka

Jávorfi Tamás

fizikus hallgató

Támavezető:

Gingl Zoltán

JATE, Kísérleti Fizikai Tanszék

SZEGED

1993

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS	4
2. IRODALMI ÁTTEKINTÉS	6
2.1 A szupravezetők általános tulajdonságai	6
Meissner-effektus	8
Kritikus mágneses tér, kritikus áramerősség	9
Magashőmérsékletű szupravezetők	9
BCS-elmélet	11
Josephson-effektus	12
2.2 A perkolációs elmélet alapjai	14
2.3 Szupravezető átmenet a magashőmérsékletű szupravezetőkben	19
2.4 Számítási eljárások	26
A Kirchoff-féle huroktörvény módszer	27
Gauss-elimináció	28
A Fogelholm-féle csomópont-eliminációs módszer	31
2.5 Statisztikus módszerek	33
2.6 Lehetséges technikai alkalmazások	35
2.7 A vezetőképesség származtatása a diffúziós állandóból	38

3	MODELLEK ÉS SZÁMÍTÁSI ALGORITMUSOK	40
3.1	A Kirchoff-féle hurokegyenletek módszere	40
3.2	A Fogelholm-féle csomópont-eliminációs módszer	45
4	AZ EREDMÉNYEK ISMERTETÉSE	49
4.1	Eredmények kétdimenziós esetekben	49
4.2	Az anizotrópia vizsgálata	52
4.3	Eredmények háromdimenziós esetekben	53
5	ÖSSZEFOGLALÁS	55
	Irodalomjegyzék	57
	Köszönetnyilvánítás	

1. BEVEZETÉS

Az utóbbi harminc évben, a kísérleti és elméleti fizika mellé, fokozatosan kialakult egy harmadik féle megközelítés, a számítógépes modellezések tudománya. Természetesen a valóság megközelítésének eme három ága egymással szoros kapcsolatban áll, és sokszor nem is lehet őket pontosan körülhatárolni. A számítógépes modellezéseknél gyakran ugyanazt a modellt használják, amit az elméleti fizikusok dolgoztak ki a valós fizikai rendszer leírására, és olyan vizsgálatokat végeznek rajtuk, mint a kísérleti fizikusok a valódi rendszereken. Az így nyert eredményeket aztán összevetik a kísérleti, illetve elméleti úton nyert eredményekkel (ha vannak).

A számítógépes szimulációknak több előnye is van a valódi kísérletekhez képest. Általában egy esemény tanulmányozása a számítógép segítségével sokkal egyszerűbb, mint megfelelő kísérleti berendezést építeni. Sok esetben a megfelelő kísérlet el sem végezhető, vagy csak komoly nehézségek árán. Ezenkívül a számítógép segítségével bizonyos paramétereket könnyebben kézben lehet tartani, s tanulmányozni a rendszer válaszát ezen paraméterek megváltoztatására. Szintén nagy előny, hogy az eredmények azonnal későbbi feldolgozásra alkalmas formában adódnak.

Természetesen a számítógépes szimulációknak vannak hátrányaik is a valódi rendszereken végzett kísérletekhez képest, hiszen a vizsgálatok mégis csak egy modellre vonatkoznak, amelyek nem írhatják le minden tekintetben a valódi rendszert. Ezenkívül technikai adottságok — számítási sebesség, véges memória — is határt szabnak e módszer alkalmazhatóságának.

A számítógépes szimulációk egyik fő alkalmazási területe a rendezetlen rendszerek

vizsgálata. Ezek többnyire Monte Carlo módszereken alapuló vizsgálatok [8], s itt igen jó eredményeket értek el. Ilyen rendezetlen anyagoknak tekinthetők a magashőmérsékletű szupravezetők is. Ezen típusú szupravezetőket, 1986-os felfedezésük után élénk kutatásoknak vetették alá, és megállapították, hogy az átmeneti, vagy kritikus hőmérséklet közelében perkolációs tulajdonságokat mutatnak. Ez teszi lehetővé számítógépes modellezésüket is, amivel az utóbbi években kezdtek el foglalkozni.

Diplomamunkám is ezen magashőmérsékletű szupravezetők számítógépes modellezésével foglalkozik. Modellként a valódi ötvözetek tanulmányozása során már jól bevált [22], random ellenálláshálózatokat használtuk. Célul tűztük ki az ilyen irányú kutatások alapjainak megismerését, a szupravezető átmenet közelében fellépő kritikus exponensek, valamint a modell statisztikus fluktuációinak vizsgálatát. A dolgozat első felében, az irodalmi áttekintésben, a vizsgálatok elvégzéséhez szükséges fogalmak, ismeretek vannak röviden összefoglalva. A második részben az alkalmazott modellek, illetve algoritmusok kerültek bemutatásra. Ezt követi az eredmények ismertetése és értelmezése. A dolgozatot rövid összefoglalás és irodalomjegyzék zárja.

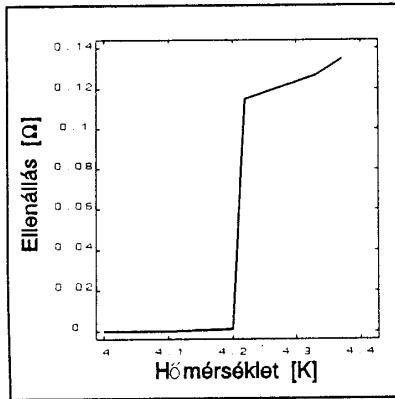
2. IRODALMI ÁTTEKINTÉS

Diplomamunkám ezen részében a felhasznált elméleti háttérrel, illetve számítási módszereket ismertetem. A magashőmérsékletű szupravezetők néhány tulajdonságát leírni hivatott modell a perkolációs elmélet alapjain nyugszik. Ezért, a szupravezetők leglényegesebb tulajdonságainak áttekintése után, először a perkolációs elmélet bemutatására kerül sor. Ezen elmélet alapján a szupravezető anyagot egy ellenálláshálózattal fogjuk modellezni. Ennek fizikai alapjairól is ebben a fejezetben esik szó. Ez felveti azt a problémát, hogy hogyan lehet egy ilyen hálózatnak az eredő ellenállását kiszámítani. Erre kétféle megoldás ismeretes. Az egyik a Kirchoff-féle huroktörvényen alapul, míg a másik, az úgynevezett Fogelholm-féle csomópont eliminációs módszer, a csomópontok számának folyamatos csökkentésével, de elektromosan az eredetivel ekvivalens hálózatok létrehozásával jut el az eredő ellenálláshoz. A Kirchoff-féle módszerrel kapcsolatban felmerült az így kapott egyenletrendszer megoldásának problémája is. Erre numerikus módszerek állnak a rendelkezésünkre. A modell alapvetően statisztikus tulajdonságokkal rendelkezik, ezért a valószínűségszámítás ide tartozó részeit is felidézzük.

2.1 A szupravezetők általános tulajdonságai

Századunk elején, 1908-ban, Heike Kamerling Onnes holland fizikusnak sikerült az utolsó makacs gázt, a héliumot cseppfolyósítani [13]. Ezzel egy új, ismeretlen alacsony hőmérséklettartomány vált hozzáférhetővé, és ez egy sor addig nem sejtett jelenség

felfedezéséhez vezetett. Ezek közül talán az egyik legfontosabb a szupravezetés, amelynek felfedezését szintén Kamerling Onnesnek tulajdonítják. A holland tudós a cseppfolyós héliummal fémek — először higany — hűtését végezte, és megállapította, hogy az abszolút nullapont közelében azok elektromos ellenállása gyakorlatilag nullára csökken. (2.1.1. ábra)



2.1.1. ábra Higany ellenállása az abszolút hőmérséklet függvényében.

Egyes források [1] azonban beszámolnak arról, hogy a szupravezetés jelensége már korábban is ismeretes volt.

1885-ben két francia fizikus Louis Paul Cailletet és Bouty, valamint tőlük függetlenül egy lengyel fizikus, Zygmund Florenty von Wroblewski, különböző fémek vezetőképességét tanulmányozták az abszolút nulla fokhoz közeli hőmérsékleten. Eközben rájöttek arra, hogy a hőmérséklet csökkenésével az ellenállás is csökken, és -273°C közelében hirtelen igen alacsony,

nem is mérhető értékre zuhan.

A fémek elemei fele (nagyon sok ötvözet, vegyület és félvezetők is) egy bizonyos hőmérsékletnél — az úgynevezett kritikus hőmérsékletnél — fázisátalakulással szupravezető állapotba megy át [15].

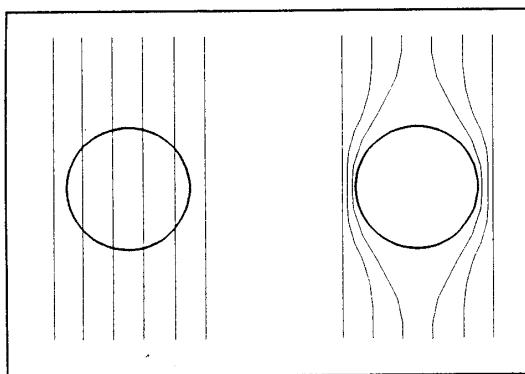
A szupravezetés kísérletileg kétféle módon mutatható ki: [4] 1) Egy közönséges áramkörbe szupravezető anyagot iktatunk be. Amikor a hőmérséklet csökkentésének köszönhetően megtörténik az átmenet a szupravezető állapotba, a potenciálkülönbség a szupravezető anyag két vége között eltűnik. 2) Szupravezető gyűrűt rá merőleges mágneses térbe helyeznek. Amikor a gyűrűt a kritikus hőmérséklet alá hűtik, a mágneses teret kikapcsolják. Ennek eredményeként nemcsökkenő elektromos áram indukálódik a gyűrűben.

Szupravezető állapotban az egyenáramú fajlagos ellenállás nulla, vagy annyira kevésbé

tér el nullától, hogy szupravezető gyűrűkben megfigyeltek már (G. Collins, 1959) olyan hosszú élettartamú áramokat, amelyek két és fél év után is — amikor a kísérletező végül is türelmét vesztette — változatlan erősséggel folytak. File és Mills a szolenoidban kialakult szupraáramok lecsengését precíziós magmágnes-rezonancia módszerekkel tanulmányozták. Arra a következtetésre jutottak, hogy a lecsengési idő legalább 100 000 év [12].

Meissner-effektus

A szupravezető anyag nem csak arról ismerszik meg, hogy elektromos ellenállása az abszolút nulla fok közelében eltűnik, hanem arról is, hogy a mágneses mező nem hatol be a szupravezető belsejébe. Ez látható a 2.1.2. ábrán.



2.1.2. ábra Állandó külső mágneses térben az átalakulási hőmérséklet alatt a mágneses indukció vonalai kiszorulnak a szupravezetőből.

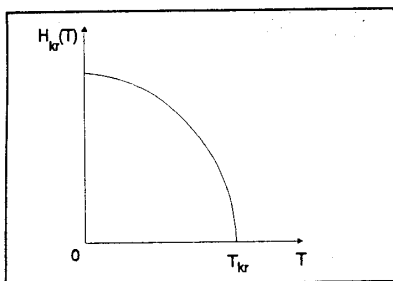
Ezt a jelenséget 1933-ban fedezte fel W. Meissner és R. Ochsenfeld, és azóta — kissé igazságtalanul csak — Meissner-effektus néven ismeretes. Ha egy mágneses térbe helyezett mintát lehűtenek, a szupravezető állapotba való átmenet pillanatában a mező kilökődik a mintából, és a mágneses indukció a mintában eltűnik. Azt

mondhatjuk, hogy a szupravezetőknek nulla a permeabilitása: $\mu=0$. Azokat az anyagokat, amelyekre $\mu < 1$, diamágneseknek nevezzük. Vagyis a szupravezetők tökéletes diamágneses anyagok. Sokszor — helytelenül — azokat az anyagokat is szupravezetőknek mondják, amelyeknél, bár az elektromos ellenállásuk eltűnik, a mágneses tér nem szorul ki az anyagból. Ilyenkor azonban csak ideális vezetőkről

beszélhetünk.

Kritikus mágneses tér, kritikus áramerősség

Ha a külső mágneses tér elég erős, akkor a szupravezető állapot megszűnik. A szupravezető állapotot megszüntető külső mágneses tér — hőmérséklettől függő — küszöbértékét kritikus térerősségnek nevezzük. Az átmeneti hőmérséklethez $H_{kr}(T_{kr})=0$ kritikus térerősség tartozik. Ahogy csökken a hőmérséklet, úgy nő a kritikus térerősség, hozzávetőlegesen a 2.1.3. ábra szerint.



2.1.3. ábra A kritikus külső mágneses térerősség a hőmérséklet függvényében.

Ez a görbe választja el egymástól a szupravezető és a normál állapotokat. Tehát a görbe alatti állapotokban a minta szupravezető, fölötté pedig normál állapotú.

Ha közös áramkörbe szupravezetőt helyezünk úgy, hogy rajta áram folyjék át, akkor növelve az áramerősséget, egy bizonyos küszöbértéknél az anyag szupravezető képessége megszűnik. Az átfolyó

áram — hőmérséklettől függő — küszöbértékét kritikus áramerősségnek nevezzük. A kritikus áram hőmérsékletfüggése hasonló a 2.1.3. ábrán látható kritikus mágneses tér hőmérsékletfüggéséhez.

Magas hőmérsékletű szupravezetők

A kutatók a szupravezetők felfedezése óta azon dolgoznak, hogy minél magasabb kritikus hőmérsékletet érjenek el. A félvezetők tipikusan $0,01^\circ\text{K}$ hőmérséklet környékén

válnak szupravezetőkké. Számos fém még az 1°K -nél jóval kisebb hőmérsékleteken sem mutat szupravezetést. 1973-ban némi haladást értek el, és találtak egy olyan ötvözetet, amely már 23°K -nél is szupravezetővé vált [14]. Az igazi nagy ugrásra azonban 1986-ig kellett várni. G. Bednorz német és A. Müller svájci fizikusok, az IBM zürichi laboratóriumának munkatársai olyan, bárium- és lantántartalmú réz-oxid-kerámia anyagra bukkantak, amely már 35°K -nél (-238°C) elveszíti elektromos ellenállását [10]. Ez elvi jelentőségű áttörés volt, hiszen a kutatók nem fémekkel és ezek ötvözeteivel valószínűsítették meg ezt a jelenséget, hanem kerámiaanyagokkal. Felfedezésük nyomán lavinaszerűen megindult a kutatás az egész világon, különösen az USA-ban, Japánban, Kínában, az NSZK-ban és Svájcban. Sorra fedezték fel az újabb és újabb anyagokat. 1987-ben előállítottak olyan kerámiát, amely már 102°K -nél szupravezetővé válik [1]. Ez azért is jelentős eredmény, mert ez a minta folyékony nitrogénnel is hűthető, ami sokkal olcsóbb, mint a folyékony hélium.

Ezek a különleges, úgynevezett "nagyteljesítményű" kerámiák, — a félvezetők és a műanyagok után — a XX. század nyersanyagainak új generációját jelentik. Az új nyersanyagok kifejlesztésének egyik úttörője Günter Petzow. Ezek nemfémes, szervesetlen anyagok, amelyeknek belső szerkezeti felépítését hosszas kísérletezéssel, anyagtudományi eljárásokkal bizonyos felhasználási célokra optimalizálják, illetve teszik alkalmassá. Ilyenek pl. a különféle oxidok, nitridek, karbidok, boridok és ezek keverékei. Igen kevés közülük van a klasszikus kerámiákhoz, pl. a porcelánhoz, vagy a téglához. Viszont kitűnnek nagy szilárdságukkal, kopás-, korrózió- és hőállóságukkal. A szupravezető típusok mellett némely fajtájuk még különleges mágneses, vagy optikai tulajdonságokkal is rendelkezik. Ezen különleges nyersanyagoknak azonban, mint minden kerámiának, van egy nagy hátrányuk: ridegek, törékenyek. E téren azonban még jelentős javulás várható, mert eddig még nem vizsgálták meg a különféle anyagok sokféle keverékét.

A BCS-elmélet

A szupravezetés elméletét 1957-ben dolgozta ki három amerikai fizikus, John Barden, Leon Cooper és J. Robert Schrieffer [11]. Munkásságuk eredménye, nevük kezdőbetűiből, BCS-elmélet néven vált ismertté, és nagyvonalakban a következőképpen foglalható össze. A szupravezetés nyitja az, hogy a fémekben az elektronok, a Coulomb-taszítás ellenére, kölcsönös vonzást mutatnak, amely a szupravezető állapotban meghaladja a Coulomb-taszítást. Ennek eredményeként a vezetési elektronok, úgynevezett Cooper-párokra kapcsolódnak össze. Egy ilyen párban résztvevő két elektron ellentétesen irányított spinnel rendelkezik, vagyis a pár eredő spinje nulla. Ez a nulla spinű "részecske" sok tekintetben bozonként viselkedik.

Egy elektron, fémekben való mozgása során, deformálja a pozitív ionokból álló kristályrácsot. Ez a deformáció, mint egy pozitív töltésű "felhő" veszi körbe az elektront, és azzal együtt mozog. Az elektron, az őt körülvevő felhővel pozitív töltésű rendszert képez, s mint ilyen, egy másik elektront tud magához vonzani. Vagyis az ionrács a közvetítő szerepét tölti be, amelynek jelenléte eredményezi az elektronok közötti vonzást, illetve a Cooper-párok kialakulását.

Természetesen nem minden elektron alkot Cooper-párokat. Minél magasabb a hőmérséklet, annál nagyobb a normál elektronok aránya, s $T \geq T_c$ -nél már csak normál elektronok vannak jelen.

A Cooper-párok kialakulása módosítja a fémek spektrumát. Szupravezető állapotban egy elektronrendszer gerjesztéséhez legalább egy Cooper-párt szét kell szakítani. Ehhez minimum a Cooper-párok kötési energiájának, E_b -nek megfelelő energia szükséges. Ez az a minimális energia, amit egy szupravezető elektronrendszer fel tud venni. Ezért a szupravezető

elektronok spektrumában egy gap figyelhető meg, amely nagysága a Fermi-szinttől E_g . Ezen energiagap létét kísérletileg is sikerült kimutatni.

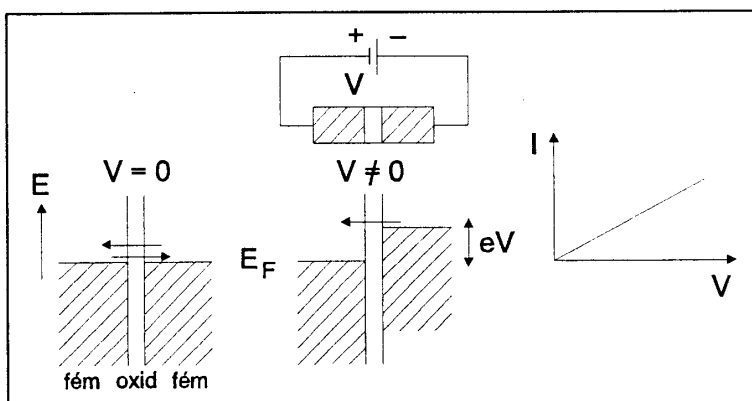
Tehát szupravezető állapotban a gerjesztett állapotok egy tiltott sávval vannak elválasztva az alapállapottól. Ezért nem lehetséges mindenféle kvantumátmenet. Az elektronok megfelelően lassú mozgása során (amely I_c -nél kisebb áramnak felel meg) az elektronrendszer nem gerjeszthető. Ez az oka annak, hogy az elektronok akadálytalanul haladhatnak, mintha az anyagnak nem lenne elektromos ellenállása.

Josephson-effektus

Ha két fémet vékony szigetelőréteg választ el, mely egy potenciálgátat jelent, a kvantummechanikai alagúteffektussal az elektronok az egyik fémből a másikba léphetnek át, ha a réteg elegendően vékony. Zérus potenciálkülönbség esetén mindkét irányú áthaladás egyenlő valószínűségű. Ha a két fém között V potenciálkülönbség van, az egyik irányú áthaladás megnő, így a potenciálgáton elektromos áram folyik. (2.1.4. ábra)

Ezt a jelenséget tunnel-effektusnak nevezik.

Az áram-feszültség karakterisztika lineáris, a tunnel-kontaktus ellenállása többek között a szigetelőréteg vastagságától, a két

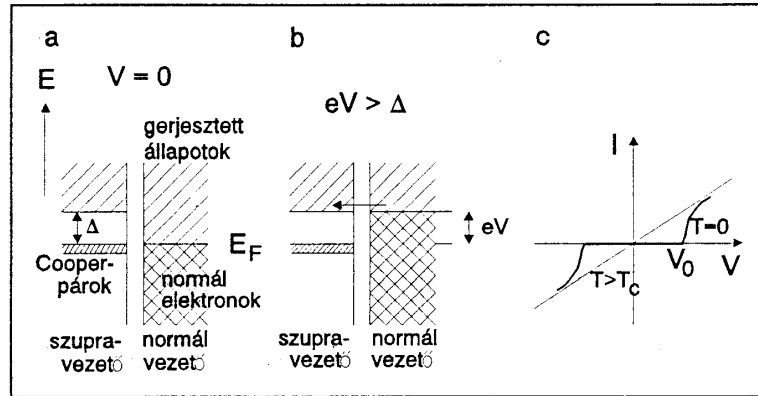


2.1.4. ábra Az energianívók a tunnel-kontaktusnál $V=0$ illetve $V \neq 0$ esetben, valamint az áram-feszültség karakterisztika

fémekben az elektronállapotok sűrűségétől függ.

Az áram-feszültség karakterisztika megváltozik, ha a tunnel-kontaktus egyik eleme normál vezető, másik eleme szupravezető, és ha $T < T_c$. A szupravezetőben a Cooper-párokból álló kondenzátum alapállapota felett Δ gap van, az üres (gerjesztett) állapotok csak $E > \Delta$ energiánál kezdődnek (2.1.5.a ábra).

Ezért $V < \Delta/e$ feszültségkülönbségnél áram nem folyhat a kontaktuson, mivel a normál fémből kilépő elektronok számára nincsen megengedett állapot



2.1.5. ábra Tunnel-effektus szupravezető és normál fém között

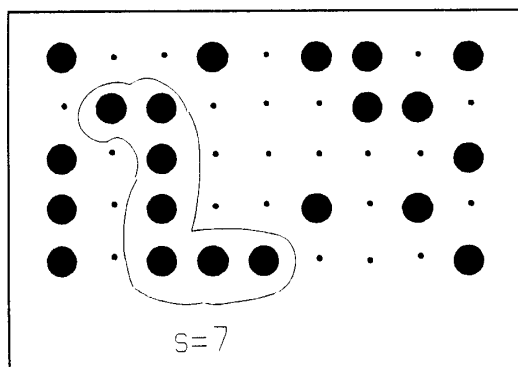
szupravezetőben ($T=0$ esetben). Az áram $V_0 = \Delta/e$ feszültségkülönbségnél indul, és rohamosan nő a feszültségkülönbség növelésével, mivel egyre több normál fémbeli elektron jut a gapnál magasabb energiára (2.1.5.b ábra). Az áram-feszültség karakterisztikát a 2.1.5.c ábra mutatja. Fordított polaritásnál a helyzet hasonló. Cooper-párok a szupravezetőből a normál fémbe nem mehetnek át, ott nincs meg a feltétel a Cooper-párok létezéséhez. Ezért először a Cooper-párokat kell felbontani, ehhez azonban 2Δ energia szükséges, tehát egy elektronra Δ energia esik. Így szimmetrikus $I-V$ karakterisztika adódik.

Tunnel-effektus lép fel két szupravezető között is, melynek az előbbiektől eltérő vonásai is vannak. Két szupravezető kontaktuson keresztül Cooper-párok is átléphetnek. Ez a Josephson-effektus. Cooper-párok tunnel-effektusa csak nagyon vékony ($< 10^{-7}$ cm) oxidrétegnél figyelhető meg. Ilyenkor a kontaktuson zérus potenciálkülönbségnél is folyhat áram, tehát a kontaktus szupravezetőként viselkedik. A Josephson-kontaktus meghatározott

kritikus árammal (I_c) rendelkezik. Ha a kontaktuson átfolyó áram kisebb I_c -nél, feszültségekülönbség nem lép fel.

2.2 A perkolációs elmélet alapjai

A perkolációs elmélet segítségével rendezetlen rendszerek tulajdonságait írhatjuk le, illetve ezekre számszerű becsléseket tehetünk [16,17]. A probléma legegyszerűbben a matematika nyelvén fogalmazható meg. Tekintsünk egy periodikus rácsot. A rácspontok külön-külön véletlenszerűen, p valószínűséggel foglaltak, vagy $1-p$ valószínűséggel üresek. Egy ilyen rácsban az egymással szomszédos foglalt rácspontok halmazát cluster-nek nevezzük. Egy egyszerű példa látható a 2.2.1. ábrán.



2.2.1. ábra Példa a pont perkolációra és a legnagyobb clusterre. A ● jelöli a foglalt rácspontokat, míg a · az üresek.

Ahogy a foglalt rácspontok koncentrációja növekszik, egyre nagyobb és nagyobb clusterek alakulnak ki. A clusterek közepes mérete a p valószínűséggel együtt növekszik, és divergál egy jól meghatározott küszöbkoncentrációnál, amit p_c -vel jelölünk.

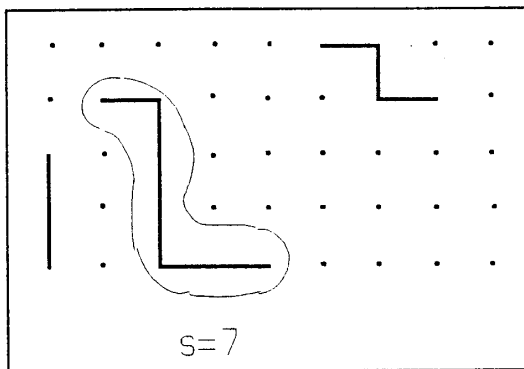
Ha a $p > p_c$, akkor létezik egy "végtelen" méretű cluster, amely bármilyen nagy minta

két áttelnes oldalához kapcsolódik.

Bár a problémát egy igen egyszerű szabállyal definiáltuk, általában mégsem oldható meg egzaktul. A modell érdekes tulajdonságokkal rendelkezik, amelyek univerzalitást mutatnak, vagyis például függetlenek a rács típusától.

Annak ellenére, hogy a perkolációs problémát geometriai és statisztikai módszerekkel írtuk le, mégis számos helyen alkalmazzák a fizika különböző területein. Történetileg az első perkolációs probléma a kémiából származik, a polimerek zselésedésével kapcsolatosan, még a II. Világháború idejéből. A polimerek szerkezete általában lineáris, de ezek néha elágazhatnak. Sok elágazással rendelkező makromolekulákból kialakulhat egy "végtelen" hálózat, amelynek az oldata már nem lesz folyékony. A pudíng lehet egy példa erre az átalakulásra, vagy más néven zselésedésre. Egy másik példa a tojás főzése, amikor a kezdetben leginkább folyékony tojás egyre szilárdabb lesz, ahogy melegítjük. Ezekben az esetekben a molekulák mindig ott vannak, de a kémiai kötések közöttük vagy kialakultak, vagy szétszakadtak. A mi egyszerű rácsos esetünket tekintve ez azt jelenti, hogy módosítani kell a perkoláció leírását. Minden rácspont foglalt, de a szomszédos rácspontok között véletlenszerűen vagy van kötés (p valószínűséggel), vagy pedig hiányzik ($1-p$ valószínűséggel). Most a cluster azon szomszédos pontok halmaza, amelyek között kialakultak a kötések. Ezt a második féle perkolációs problémát kötési-perkolációnak nevezzük, míg az első esetet, amelyet korábban definiáltunk, pont-perkolációnak hívjuk. A 2.2.2. ábrán látható egy egyszerű példa a kötési perkolációra.

A történelmi háttér ellenére, nem a zselésedés leírása az az alkalmazása a perkolációs elméletnek, amin tesztelni szokták. A fizikusok fő érdeklődése a perkolációs elmélet kapcsán azon (később definiálendő) kritikus exponensekre irányul, amelyek a perkolációs küszöb, p_c közvetlen közelében lejátszódó kritikus jelenségekre



2.2.2. ábra Példa a kötési perkolációra és a legnagyobb clusterre.

jellemzők.

A perkolációs elmélet talán egyik legalapvetőbb kérdése, hogy mennyi a p_c perkolációs küszöb értéke, vagyis melyik az a p_c valószínűség, ahol egy végtelen rácásban egy végtelen cluster először kialakul. Ez a probléma egzakt matematikai módszerekkel, a megfelelő mennyiségek p szerinti, vagy $1-p$ szerinti hatványsorba fejtésével, illetve számítógépes szimulációval oldható meg. A legegyszerűbb, kettőtől négydimenziós rácstípusokra kapott eredmények az I. táblázatban¹ vannak összefoglalva.

I. Táblázat A perkolációs küszöbértékek a legismertebb rácstípusokra.

Rácstípus	Pont	Kötési
Hatszög	0.696	0.653
Négyzetes	0.593	0.500
Háromszög	0.500	0.347
Köbös	0.312	0.249
bcc	0.245	0.178
fcc	0.198	0.119
d=4	0.197	0.160

Itt a háromszög pont-, négyzetes kötési-, háromszög kötési- és a lépesmész kötési-perkolációs küszöbök egzaktak, míg a többi (általában az utolsó tizedesjegyig pontos) numerikus becslés. A táblázat adatai alapján látható, hogy minél több szomszédja van egy rácspontnak, annál kisebb a perkolációs küszöb.

A továbblépés érdekében érdemes bevezetni néhány új mennyiséget. Az első a perkolációs valószínűség, amit P_∞ -nel jelölünk, és ami azt mondja meg, hogy a rácspontok hányad része tartozik a végtelen clusterhez egy végtelen rácásban, illetve a legnagyobb clusterhez egy véges rendszerben, ha a minta mérete tart a végtelenhez. Nyilvánvalóan, azon p valószínűségekre, amelyek a küszöb p_c alatt vannak, ez a rész nulla. Ezen mennyiség helyett tekinthetjük az S közepes cluster-méretet is, amit a következőképpen határozhatunk meg: kiválasztunk egy foglalt rácspontot, leszámoljuk, hogy mekkora az a cluster, amelyhez ez a

¹ A táblázatban a *bcc* rövidítés a tércentrált köbös, az *fcc* a lapcentrált köbös, a $d=4$ a négydimenziós hiperköbös rácsot jelenti.

pont tartozik, és átlagolunk az összes így kiválasztott rácspontra. Könnyű látni, hogy ez az S közepes cluster-méret divergál, ha a p alulról közelít a p_c felé, hiszen ha $p > p_c$, akkor már jelen van egy végtelen cluster. Végül beszélhetünk még, a talán leggyakrabban előforduló mennyiségről, az úgynevezett korrelációs hosszról, amit ξ -vel jelölünk. Ez ugyanazon clusteren belül, véletlenszerűen kiválasztott két pont távolságnégyzetének átlagából vont négyzetgyök. Vagyis a ξ egy tipikus cluster sugár, ami szintén divergál, ha a p -vel alulról közelítjük meg a küszöb p_c -t.

Ezek után felmerülhet a kérdés, hogy hogyan viselkednek az előbb bevezetett mennyiségek, P_∞ , S és ξ , a perkolációs küszöb, p_c közelében? Azt találták, hogy ha p elég közel van a p_c -hez, akkor ezek a mennyiségek hatványfüggvények alakjában írhatók:

$$P_\infty \sim (p - p_c)^\beta, \quad p > p_c, \quad (1)$$

$$S \sim (p_c - p)^{-\gamma}, \quad p < p_c, \quad (2)$$

$$\xi \sim (p_c - p)^{-\nu}, \quad p < p_c. \quad (3)$$

Ezek az arányosságok asszimptotikusan érvényesek, vagyis ha $p \rightarrow p_c$. Ezen arányosságokban szereplő β , γ és ν kitevőket, valamint egyéb mennyiségekre felírható arányosságokban szereplő kitevőket hívjuk kritikus exponenseknek. A modern perkolációs kutatások nagy része ezen kritikus exponensek tanulmányozására irányul.

A fentiekhez hasonló kritikus exponenseket behatóan tanulmányozzák a kritikus jelenségek kapcsán, amelyek majdnem minden fázisátalakulás közelében feltűnnek. Itt a kritikus jelenség kifejezés az asszimptotikus tartományra utal, vagyis ha a $p \rightarrow p_c$, hosszúság $\rightarrow \infty$, idő $\rightarrow \infty$ stb., vagyis arra a tartományra, amelyre a perkolációs kutatások is koncentrálnak. Ezen kritikus exponensek nem mind függetlenek egymástól. A közöttük lévő

kapcsolatokat a skálázási elmélettel meghatározható skálatörvények írják le. A β , γ és ν exponensek értékét a II. táblázatban soroltuk fel.

II. Táblázat A perkolációs exponensek értéke kettő és háromdimenzióban, illetve magasabb dimenziókra

Exponens	d=2	d=3	d $\rightarrow\infty$
β	$5/36$	0.4	1
γ	$43/18$	1.8	1
ν	$4/3$	0.9	$1/2$
μ	1.3	2.0	3

Ellentétben az I. táblázattal, itt minden dimenzióhoz csak egy érték van feltüntetve, vagyis ugyanaz az exponens tartozik mindegyik féle rácstípushoz. Ennek az univerzitásnak köszönhető, hogy a perkolációs elmélet kritikus exponenseit élénk érdeklődés kíséri. Ez az univerzalitás az úgynevezett önhasonló struktúrák (fraktálok)

tulajdonságain alapul.

A kritikus exponensek, illetve a skálatörvények érvényessége a renormalizációs csoport elmélet segítségével is ellenőrizhető, azonban az elmélet ezen aspektusának megvilágítása meghaladja e dolgozat kereteit.

Nem csak perkolációs struktúrákról, hanem perkolációs folyamatokról is beszélhetünk. Ekkor egy időtől függő jelenséget hozunk kapcsolatba a perkolációval. Az egyik legintenzívebben tanulmányozott perkolációs folyamat egy random ellenálláshálózat vezetőképességének vizsgálata. Tétélezzük fel, hogy a kötési-perkolációs képben minden kötésnek megfelel egy vezető, míg a hiányzó kötésnek egy szigetelő (szakadás)². Elektromos áram csak a szomszédos vezetőkön keresztül folyhat. Egy ilyen hálózattal lehet modellálni pl. a valódi fém-szigetelő ötvözeteket, vagy a folyadékok áthatolását porózus közegeken stb. Egy ilyen random ellenálláshálózat vezetőképességét jelöljük Σ -val. Ez nyilvánvalóan nulla, ha $p < p_c$, és nem nulla, ha $p > p_c$, mivel csak a szomszédos vezetők végtelen hálózatának

² A probléma megfogalmazható a pont-perkolációs kép alapján is. A foglalt rácspontoknak feleltethetők meg a vezetők és az üres rácspontoknak a szigetelők.

jelenléte esetén folyhat áram a minta egyik végétől a másikig. Ha a p -vel felülről közelítjük meg a p_c -t, akkor a következő arányosságon keresztül egy új kritikus exponenst definiálhatunk:

$$\Sigma \sim (p-p_c)^\mu, \quad p > p_c. \quad (4)$$

Mivel a μ kapcsolata a statisztikus eredetű kritikus exponensekkel, mint pl. a β -val és a γ -val nem egészen tisztázott, ezért mint független kivevő került a II. táblázatba.

Ha az előbbi random ellenálláshálózatban kicseréljük a vezetőket szupravezetőkre (rövidzárakra), és a szigetelőket pedig ellenállásokra, akkor el is érkeztünk a szupravezető anyagok tanulmányozására használt modellhez³. Ebben az esetben a minta vezetőképessége végtelen, ha $p > p_c$, mivel ekkor jelen van egy végtelen szupravezető cluster. Vagyis a hálózat vezetőképessége divergál, ha a p -vel alulról közelítünk a p_c -hez. Az ehhez tartozó kritikus exponens — amit az irodalomban általában s -sel jelölnek — két dimenzióban egyenlő μ -vel, és körülbelül 0,75 háromdimenzióban.

2.3 Szupravezető átmenet a magashőmérsékletű szupravezetőkben

Magashőmérsékletű szupravezetőknek a Bednortz és Müller által 1986-ban felfedezett szupravezető kerámiákat nevezzük. Ezek a kerámiák igen rendezetlen anyagok. Atomi méretekben vizsgálódva nagyszámú inhomogenitást fedezhetünk fel bennük. Ezeknek különböző okai lehetnek: helyi sztöchiometriai eltérések, oxigénhiány, rácshibák, ikerkristályok stb. Ezen térbeli rendezetlenségeknek köszönhetően a minta úgy tekinthető,

³ Ennek fizikai alapjairól a következő pontban lesz szó.

mint véletlenszerűen egymáshoz kapcsolódó, többé-kevésbé homogén szemcsék összessége.

A magashőmérsékletű szupravezetőkben az átmenet a normál vezetőből a szupravezető állapotba a következő módon írható le. [6.] Az átmenet első felében, (ez a magashőmérsékletű rész) az anyag ellenállása leesik, ami annak tulajdonítható, hogy a szemcsék egy bizonyos T_{C0} hőmérsékletnél szupravezetőkkel válnak. Az átmenet második felében, (alacsony hőmérsékletű rész) a szomszédos szupravezető szemcsék között, a Josephson-effektus miatt, a szupraáramok akadálytalanul folyhatnak. A mikroszkópikus rendezetlenségnek köszönhetően a szemcsék közötti szupravezető-csatolás függ a szemcsék határainál lévő rendezetlenségtől. Vagyis mindegyik szupravezető szemcseparnak megvan a saját kritikus hőmérséklete, T_{ij} , amelynél létrejön közöttük a szupravezető állapot. Ahogy a hőmérsékletet csökkentjük, a szupravezető átmenetek a szemcsék között véletlenszerűen különböző helyeken alakulnak ki. Így szupravezető szigetek jönnek létre különféle méretekben és formában. Ezen szigetek közepes méretét perkolációs hosszának, (vagy korrelációs hosszának) hívjuk, és ξ -vel jelöljük a perkolációs elmélet nyelvén. Nyilvánvalóan, minél alacsonyabb a hőmérséklet, annál nagyobb lesz a ξ . Makroszkópikus szupravezető állapotról akkor beszélhetünk, ha a ξ eléri a minta méretét. Ez egy bizonyos T_C hőmérsékletnél következik be, amely nyilván alacsonyabb, mint T_{C0} .

Ezek alapján, a magashőmérsékletű szupravezetőkben a szupravezető átmenet egy átmeneti, vagy mezoszkópikus skálán leírható egy random ellenálláshálózat segítségével. Az átmenet első felében, a minta ellenállásának hőmérsékletfüggését, $R(T)$ -t, a szemcsék vezetőképességének hőmérsékletfüggése határozza meg, vagyis a hálózat ellenállásai. Az átmenet második felében a minta ellenállását a szemcsék közötti átmenetek határozzák meg. Ahogy csökkentjük a hőmérsékletet, egyre több ellenállás válik rövidzárrá a hálózatban, véletlenszerű helyeken. Ez azt jelenti, hogy a hálózat szerkezete megváltozik, és ez a

szerkezetbeli változás határozza meg a minta ellenállásának, $R(T)$ -nek a hőmérsékletfüggését. A rövidzárok lineáris méretének átlaga egyenlő a ξ perkolációs hosszal.

Tekintsük át az átmenet második felében fellépő spontán vezetési fluktuációkat egy szupravezető-normál-vezető elemeket tartalmazó perkolációs kép alapján. Ekkor a helyzet sokkal összetettebb, mint a klasszikus perkolációs problémánál, a normál-vezető elemek ellenállásának és zajának hőmérsékletfüggése miatt. A továbbiakban feltesszük, hogy a zaj spektruma, $S(f, T)$ $1/f$ szerint függ a frekvenciától, és ezért a spektrum hőmérsékletfüggését fix frekvenciánál nézzük.

Ahogy a korábbiakban megállapítottuk, mezoszkópikus skálán, a magashőmérsékletű szupravezetőket modellezzük egy random ellenálláshálózattal. Az i -edik ellenállás vezetési zaja a következőképpen írható:

$$g_i(t) = g_i(T) + \Delta g_i(t, T) \quad , \quad r_i(t) = r_i(T) + \Delta r_i(t, T) \quad , \quad r_i(T) = 1/g_i(T) \quad (5)$$

és

$$\frac{S_{g_i}(f, T)}{g_i^2(T)} = \frac{S_{r_i}(f, T)}{r_i^2(T)} \quad , \quad (6)$$

ahol $g_i(t)$ illetve $r_i(t)$ az i -edik ellenállás vezetőképessége illetve ellenállása az idő függvényében, $g_i(T)$ és $r_i(T)$ ezek középértékei, (időátlag) a hőmérséklet függvényei, $\Delta g_i(t, T)$ illetve $\Delta r_i(t, T)$ a vezetőképesség illetve az ellenállás fluktuációjának pillanatnyi értékei, valamint $S_{g_i}(f, T)$ és $S_{r_i}(f, T)$ a megfelelő teljesítménysűrűség spektrum. A különböző ellenállások fluktuációi egymástól függetlenek:

$$\begin{aligned} \langle \Delta g_i(t,T) \Delta g_j(t,T) \rangle &= \delta_{ij} \sqrt{G_i(T) G_j(T)} \quad , \\ \langle \Delta r_i(t,T) \Delta r_j(t,T) \rangle &= \delta_{ij} \sqrt{R_i(T) R_j(T)} \end{aligned} \quad (7)$$

és középértékük nulla

$$\langle \Delta g_i(t,T) \rangle = \langle \Delta r_i(t,T) \rangle = 0 \quad , \quad (8)$$

ahol $G_i(T)$ és $R_i(T)$ a fluktuáció mértékét jelölik, δ_{ij} pedig a Kronecker-féle delta függvény.

Vizsgáljuk most a minta makroszkópikus ellenállását, $R(T)$ -t, és zaját, $S_R(T)$ -t. Kézenfekvőnek tűnik a következő egyszerűsítés, hogy az ellenállások hőmérsékletfüggése, illetve az ellenállások zajának hőmérsékletfüggése azonos a hálózat minden ellenállására.

Vagyis:

$$r_i(T) \sim r(T) \quad , \quad g_i(T) \sim g(T) \quad (9)$$

és

$$\frac{S_{g_i}(f,T)}{g_i^2(T)} \sim \frac{S_g(f,T)}{g^2(T)} \quad , \quad \frac{S_{r_i}(f,T)}{r_i^2(T)} \sim \frac{S_r(f,T)}{r^2(T)} \quad . \quad (10)$$

Az átmenet első felében (magas hőmérsékletű rész), a minta eredő ellenállásának, $R(T)$ -nek a hőmérsékletfüggését a hálózat elemeinek a hőmérsékletfüggése határozza meg. Ezért a (7)-(10) egyenletek alapján az eredő ellenállás és a normalizált zaj hőmérsékletfüggése a következők szerint írhatók:

$$R(T) \sim r(T) \quad (11)$$

és

$$\frac{S_R(f,T)}{R^2(T)} \sim \frac{S_r(f,T)}{r^2(T)} \quad . \quad (12)$$

Az átmenet második felében, (alacsony hőmérsékletű rész) nem csak $r(T)$, hanem a

hálózat szerkezete is változik, az ellenállások helyett véletlenszerűen létrejövő, egyre több rövidzár miatt. Ebben a hőmérséklettartományban mind elméleti, mind perkolációs hálózatokra kapott numerikus eredmények szerint:

$$R(T) \sim r(T)K_R[p(T)] \quad (13)$$

és

$$\frac{S_R(f,T)}{R^2(T)} \sim \frac{S_r(f,T)}{r^2(T)}K_N[p(T)] = \frac{S_g(f,T)}{g^2(T)}K_N[p(T)] , \quad (14)$$

ahol $p(T)$ a normál vezetők (ellenállások) arányát jelenti ($1-p$ pedig a szupravezető elemekét), $K_R[p(T)]$ és $K_N[p(T)]$ átmeneti függvények, amelyek az anyag ellenállásának, illetve normalizált zajának a változását írják le a p függvényében. Ezen függvények jól ismert tulajdonsága, hogy közel a T_c kritikus hőmérséklethez, $p-p_c$ hatványfüggvényeként írhatók le, ahol p_c (perkolációs küszöb) $p(T_c)$ -nek felel meg:

$$K_R[p(T)] \sim (p-p_c)^s \quad (15)$$

és

$$K_N[p(T)] \sim (p-p_c)^{-\kappa'} , \quad (16)$$

ahol s és κ' skálázó (kritikus) exponensek.

Abban a speciális esetben, ha $r(T) = konstans$ illetve $S_r(f,T)/r^2(T) = konstans^4$ (vagyis a hálózati elemek ellenállásának, illetve zajának hőmérsékletfüggése elhanyagolható) írhatjuk, hogy:

⁴ Mivel a hálózat elemeinek ellenállásának ($r(T)$) illetve zajának ($S_r(f,T)$) hőmérsékletfüggése elég gyenge, ez általában kielégítő mértékben teljesül.

$$R(T) \sim K_R [p(T)] \quad (17)$$

és

$$\frac{S_R(f, T)}{R^2(T)} \sim K_M [p(T)] \quad , \quad (18)$$

a (13), (14) egyenletek alapján. Ekkor a (13)-(16) egyenletek alapján kapjuk, hogy a normalizált zaj a minta ellenállásának hatványfüggvényeként írható:

$$\frac{S_R(f, T)}{R^2(T)} \sim R^{-l}(T) \quad , \quad (19)$$

ahol az l skálázási exponensre kapjuk:

$$l = \frac{\kappa'}{s} \quad . \quad (20)$$

A (19) egyenletnek a kísérleti ellenőrzésben van nagy szerepe, mivel általában a p értéke ismeretlen. Ebben az esetben a perkoláció detektálásának, (l meghatározásának) egy kényelmes módja az $R(T)$ és az $S_R(f, T)$ együttes mérése.

A fentebb kapott egyenletek érvényességét az utóbbi évtizedben behatóan tanulmányozták szupravezető-normál vezető elemek perkolációs problémáján [18-20]. Ezen kutatások legérdekesebb eredménye, hogy megfelelően közel a perkolációs küszöbhez, a mért mennyiségek univerzális viselkedést mutattak, vagyis végtelen rendszerekre az s , κ' és l kritikus exponensek, univerzális értéket vesznek fel. Ez azt jelenti, hogy azok a kritikus exponensek, amelyeket a rendszer térbeli dimenziószáma és szerkezete határoz meg, nem befolyásolják ezek értékét. Ez a tulajdonság a ξ perkolációs hossz kritikus viselkedésén alapul:

$$\xi \sim (p - p_c)^{-\nu} \quad . \quad (21)$$

A III. táblázatban⁵ az itt bevezetett kritikus exponensek jelenleg elfogadott értékei vannak feltüntetve egy, kettő, illetve három dimenziós esetekre [5].

III. Táblázat A kritikus exponensek, illetve a perkolációs küszöb 1, 2 és 3 dimenziós esetekben.

térdimenzió	p_c	s	κ	l	ν
$d=1$	0	1	1	1	-
$d=2$	0.5	1.297 ± 0.07	1.12 ± 0.02	0.86 ± 0.02	$4/3$
$d=3$	0.249	0.730 ± 0.01	≈ 0.66	≈ 0.9	0.89 ± 0.0

A kísérleti eredmények szerint másfajta fluktuációról is beszélhetünk, nevezetesen a szupravezető elemek részarányának fluktuációjáról. Az átmenet második felében, közel a perkolációs küszöbhez, a Josephson-effektus gyenge perturbációi is az átmenetek random ki- illetve bekapcsolódását eredményezik. Mivel most a rendszer a perkolációs tartományban van, a (15) és (17) egyenletek szerint

$$R(T) \sim (p - p_c)^s \quad (22)$$

Az átmenetek, (rövidzárok) random ki- és bekapcsolódása egy spontán fluktuációt (zajt) jelent, jelöljük $\Delta p(t)$ -vel, és ez az $R(T)$ -ben is zajt fog indukálni:

$$\Delta R(t) = \frac{dR(p)}{dp} \Delta p(t) \sim (p - p_c)^{s-1} \Delta p(t) = R^{1-1/s} \Delta p(t) \quad (23)$$

A normalizált zajteljesítmény ezért a következőképpen írható:

$$\frac{\langle \Delta R^2(t) \rangle}{R^2(T)} \sim R^{-2/s} \langle \Delta p^2(t) \rangle \quad (24)$$

Ennek megfelelően a normalizált zajspektrum:

⁵ A táblázatban p_c értéke kétdimenzióban négyzetes, háromdimenzióban köbös rácsra vonatkozik.

$$\frac{S_R(f,T)}{R^2(T)} \sim R^{-2/s}(T) S_p(f,T) , \quad (25)$$

ahol $S_p(f,T)$ a $\Delta p(t)$ zaj spektruma.

Abban az esetben, ha a p -zaj hőmérsékletfüggése gyenge az $R^{-2/s}$ mennyiség hőmérsékletfüggéséhez képest, akkor kapjuk:

$$\frac{S_R(f,T)}{R^2(T)} \sim R^{-2/s}(T) . \quad (26)$$

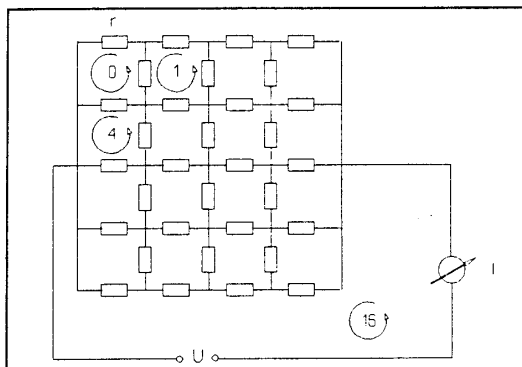
Vagyis a normalizált zaj ebben az esetben is kifejezhető a makroszkópikus ellenállás hatványfüggvényeként, azonban összehasonlítva a (19) egyenlettel, most l -től jelentősen különböző értékű kritikus exponenst kapunk. (Az s III. táblázatban feltüntetett értékét felhasználva, egy dimenzióban $-2/s = -2$, két dimenzióban $-2/s \approx -1,54$ és három dimenzióban $-2/s \approx -2,74$.)

2.4 Számítási eljárások

Az imént látottak szerint a szupravezető anyagot egy random ellenálláshálózattal fogjuk modellezni. Az átmenet második felében a szupravezető szemcséknek az egyes csomópontok, a szemcsék közötti átmeneteknek pedig a rövidzárok illetve az ellenállások felelnek meg, attól függően, hogy a Josephson-effektus összekapcsolta-e a szemcséket vagy sem.

Az egyszerűség kedvéért a hálózatot ellenállások négyzetes hálójaként vesszük fel,

ahogy az a 2.4.1. ábrán látható⁶.



2.3.1. ábra Példa az ellenálláshálózatra.

A számítási eljárás sarkalatos pontja egy ilyen, tetszőleges méretű hálózat eredő ellenállásának kiszámítása. E probléma megoldására kétféle módszer ismeretes. Az egyik: A Kirchoff-törvények alkalmazásával felírjuk a hurokegyenlet-rendszert [21]; a másik pedig az úgynevezett Fogelholm-féle

csomópont eliminációs módszer [22]. Mindkét módszernek vannak előnyei és hátrányai. Tekintsük át külön-külön mindkét módszert!

A Kirchoff-féle huroktörvény módszer

Ha, mint ahogy a 2.4.1. ábrán berajzoltuk, felvesszük a hurokáramokat (mindegyiket azonos irányítással), akkor a Kirchoff-törvények alkalmazásával, $(n-1)^2$ csatolt lineáris egyenletrendszerhez jutunk, amelyek mátrix alakban összefoglalva az

⁶ Ezt azért tehetjük meg, mivel a kritikus exponensek értékei nem függenek a rács szerkezetétől. Egyébként végeztek számításokat más rács típusokra is, és az eredmény minden esetben azonos volt.

$$\begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & \dots & R_{0n} \\ R_{10} & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ R_{n0} & \dots & \dots & R_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ U \end{pmatrix}, \quad (27)$$

vagy röviden:

$$RI=U, \quad (28)$$

alakban írhatók, ahol I_j a j -edik hurokban folyó áram erőssége, az R ellenállásmátrix elemeinek a pedig következő utasítással adunk értéket:

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{R}_{ij}\} = \begin{cases} \text{az } i\text{-edik és a } j\text{-edik hurok közös ellenállása,} & \text{ha } i \neq j; \\ \text{az } i\text{-edik hurokban lévő ellenállások összegének} & \\ -1 \text{-szerese,} & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

Az I oszlopvektor a hurokáramokat foglalja össze, az U oszlopvektor pedig a hurokban lévő feszültségforrásokat; (lévén, hogy feszültségforrás csak a főkörben van, az U oszlopvektornak csak az utolsó eleme különbözik nullától) n pedig a hurkok számát jelöli.

A Gauss-elimináció

A fenti egyenletrendszer általában csak numerikus módszerekkel oldható meg. Erre általánosan elterjedt módszer a Gauss-elimináció. Tekintsük át ezt általános esetben [2].

Vegyük fel a megoldandó lineáris egyenletrendszert a következő alakban:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= a_{2,n+1} \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= a_{n,n+1}
\end{aligned}
\tag{29}$$

A továbbiakban feltesszük, hogy a (29) egyenletrendszer egyértelműen megoldható. A Gauss-elimináció lényege abban áll, hogy a (29) egyenletrendszer egyenleteiből, egy egyenlet kivételével, kiküszöböljük valamelyik ismeretlent. Azután kiküszöbölünk egy másik ismeretlent, egy harmadikat és így tovább. Ennek eredményeképpen eljutunk egy olyan egyenletrendszerhez, amelynek mátrixa trianguláris:

$$\begin{aligned}
b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n &= b_{1,n+1} \\
& b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = b_{2,n+1} \\
& \vdots \\
& \vdots \\
& b_{nn}x_n = b_{n,n+1}
\end{aligned}
\tag{30}$$

amely egyenletrendszer már egyszerűen megoldható:

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{b_{n,n+1}}{b_{nn}} \quad , \\
x_{n-1} &= \frac{1}{b_{n-1}}(b_{n-1,n+1} - b_{n-1,n}x_n) \quad , \\
x_1 &= \frac{1}{b_{11}}(b_{1,n+1} - b_{12}x_2 - \dots - b_{1n}x_n) \quad ,
\end{aligned}
\tag{31}$$

feltéve, hogy a b_{11} , b_{22} , ... , b_{nn} számok egyike sem nulla.

Az az eljárás, amellyel a (29) egyenletrendszerből a (30) egyenletrendszer előállítottuk, a tulajdonképpeni Gauss-elimináció. Az ebben említett ismeretlenek kiküszöbölése a következő módon történik. Tegyük fel, hogy a (29) egyenletrendszerben $a_{11} \neq 0$. Vonjuk ki az i -edik egyenletből az első egyenlet

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad (32)$$

-szeresét. Ezáltal az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= a_{2,n+1}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n &= a_{3,n+1}^{(1)} \\ &\vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= a_{n,n+1} \end{aligned} \quad (33)$$

egyenletrendszerhez jutunk, ahol

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ik} - l_{i1}a_{1k} \quad (i=2, 3, \dots, n; k=2, 3, \dots, n+1) \quad (34)$$

Ezután, feltéve, hogy a (33) egyenletrendszerben $a_{22}^{(1)} \neq 0$, a második egyenlet

$$l_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad (i=3, 4, \dots, n) \quad (35)$$

-szeresét kivonjuk az i -edik egyenletből, aminek eredményeképpen a (33) egyenletrendszer

az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= a_{2,n+1}^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= a_{3,n+1}^{(2)} \\ &\vdots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n &= a_{n,n+1}^{(2)} \end{aligned} \quad (36)$$

egyenletrendszerbe megy át, ahol

$$a_{ik}^{(2)} = a_{ik}^{(1)} - l_{i2}a_{2k}^{(1)}, \quad (i=3, 4, \dots, n; k=3, 4, \dots, n+1) \quad (37)$$

A fenti eljárást $n-1$ -szer ismételve, a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1} \\
a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= a_{2,n+1}^{(1)} \\
a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= a_{3,n+1}^{(2)} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
a_{nn}^{(n-1)}x_n &= a_{n,n+1}^{(n-1)}
\end{aligned} \tag{38}$$

ahol

$$l_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}}, \quad (j=1, 2, \dots, n-1; \quad i=j+1, j+2, \dots, n) \tag{39}$$

$$a_{ik}^{(j)} = a_{ik}^{(j-1)} - l_{ij} a_{jk}^{(j-1)}, \quad (k=j+1, j+2, \dots, n+1; \quad a_{ik}^{(0)} = a_{ik})$$

feltéve, hogy a diagonális elemek, vagyis a_{11} , $a_{22}^{(1)}$, $a_{33}^{(2)}$, \dots , $a_{nn}^{(n-1)}$ zérustól különböző számok. Bevezetve a (38) egyenletrendszerben a

$$b_{ik} = a_{ik}^{(i-1)}, \quad (i=1, 2, \dots, n; \quad k=i, i+1, \dots, n+1) \tag{40}$$

jelölést, a kívánt (30) egyenletrendszert kapjuk.

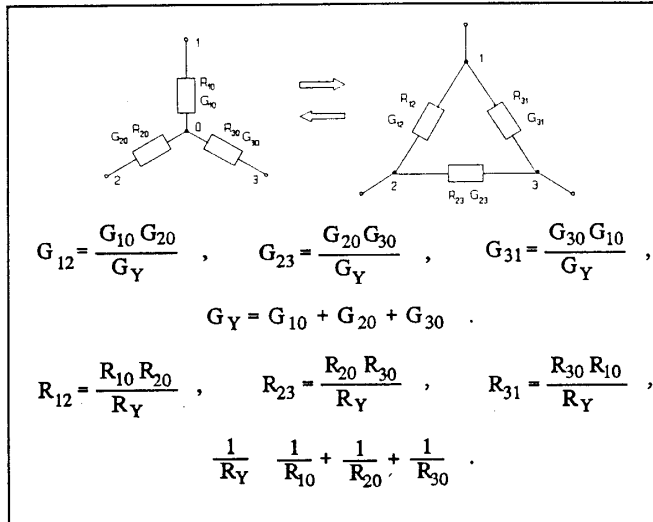
Az eredő ellenállás kiszámításához a (31) szerinti visszahelyettesítéseket nem is kell elvégeznünk, ugyanis az eredő ellenállást (ebben az esetben) $a_{nn}^{(n-1)}$ fogja szolgáltatni.

Az eredő ellenállás kiszámításának ez a módszere a perkolációs határtól távol is használható, és számítógéppel viszonylag egyszerűen elvégezhető. Azonban, nagy memóriagénye miatt, csak kisebb mintákra használható. Másik hátránya, hogy háromdimenzióra csak igen bonyolultan általánosítható.

A Fogelholm-féle csomópont eliminációs módszer

Az elektromos áramkörök elméletéből ismeretes, hogy egy hálózat belső csomópontja

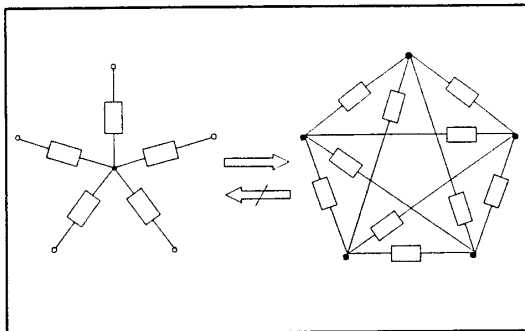
megszüntethető, ha új ellenállásokat iktatunk be azon pontok közé, amelyekkel az eliminálandó pont közvetlen összeköttetésben volt. Jól ismert példa erre az úgynevezett csillag-delta átalakítás, amely a 2.4.2. ábrán látható.



2.3.2. ábra Csillag-delta átalakítás

Ez az eljárás általánosítható 3-nál több ellenállást tartalmazó áramkörökre is. Például ötszögre a 2.4.3. ábrán látható az átalakítás. Ekkor azonban az átalakítás már nem ekvivalens, abban az értelemben, hogy a "deltából" a "csillag" itt már nem állítható vissza. Ezt ugyanis

csak akkor tehetjük meg, ha a két kapcsolás szabad paramétereinek (ellenállásainak) száma megegyezik, vagyis, ha $n = n(n-1)/2$. Ez pedig csak $n=3$ estén áll fenn⁷. Nekünk azonban a visszaalakításra nincs is szükségünk.



2.4.3. ábra A "csillag-delta" átalakítás általános esetben

A hálózat eredő ellenállásának kiszámítása tehát a következőképpen történik: megszüntetjük a hálózat összes belső csomópontját. Ha a megszüntetendő csomópont, jelöljük A_0 -al, az A_1, A_2, \dots, A_n pontokkal van közvetlen összeköttetésben g_1, g_2, \dots, g_n vezetőképességű

⁷ Az egyenlet $n=0$ estben is teljesül, azonban ez nyilván nem jelent fizikailag valós esetet.

ellenállásokon keresztül, akkor először kitöröljük az A_0 pontot és a g_1, g_2, \dots, g_n ellenállásokat, majd minden szomszédos A_i, A_j csomópontpár közé beillesztünk új,

$$g_{ij} = \frac{g_i g_j}{g_1 + g_2 + \dots + g_n} \quad (41)$$

vezetőképeségű ellenállásokat. Ekkor előfordulhat, hogy némelyik szomszéd között kettős kötés jön létre (ha már előzőleg is volt közöttük ellenállás), azonban, nyilvánvalóan ez a két ellenállás helyettesíthető párhuzamos eredőjükkel. Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg csak két csomópont marad (a terminál pontok) és közöttük egy ellenállás, a hálózat eredő ellenállása.

Ez a módszer nem hatékony akkor, ha a kötések (ellenállások) száma túl nagy, vagyis a perkolációs küszöbtől távol, mivel az elimináció során nagyon felszaporodnának az új ellenállások, és a számítási idő is jelentősen megnő.

Számítógépes megvalósítása azonban számos előnyt rejt magában. Nem kell ugyanis előre felépíteni az egész hálózatot, és utána eliminálni a csomópontokat, hanem ezt a két lépést felváltva is lehet végezni. Vagyis generálunk a hálózatból egy oszlopot, (kétdimenziós esetben)⁸ ez az úgynevezett frontoszlop, és utána az előző oszlopban lévő pontokat elimináljuk, majd megint generálunk egy oszlopot, (ez lesz az új frontoszlop) és a korábbi frontoszlopot elimináljuk, és így tovább, amíg az egész hálózatot "létre nem hoztuk". Ez a szukcesszív eljárás azért jó, mivel ekkor a kitörölt csomópontok által a tárban foglalt helyet fel lehet szabadítani, és így lényegesen "megnő" a rendelkezésre álló memória. (Hiszen nem az egész hálózatot kell egyszerre tárolni, hanem csak két oszlopot.) Így nagyságrendekkel megnövekszik a vizsgálható minták mérete.

⁸ A módszer n dimenziós esetben is működik, csak ekkor $n-1$ dimenziós "síkokat" kell generálni, és az előző "síkot" eliminálni.

A Fogelholm-féle csomópont eliminációs módszer további nagy előnye, hogy mindenféle perkolációs problémára könnyen alkalmazható, tekintet nélkül a dimenziószámra és a rács típusára, ahol a kötések nagy számban hiányoznak, vagyis a perkolációs határhoz közel.

2.5 Statisztikus módszerek

Mint ahogy az előző pontban is utaltunk rá, a hálózat eredő ellenállása statisztikus ingadozást mutat. Ezért a számítógépes modellezéseknél ugyanolyan paraméterekkel többször generáltunk egy-egy hálózatot, és az eredő ellenállások átlagával dolgoztunk. Mindvégig számtani közepeket számoltunk, az alábbi összefüggés szerint:

$$R = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R_i \quad , \quad (42)$$

ahol k a vizsgált minták száma, R_i az i -edik hálózat eredő ellenállása. Az R_i -k tehát R körül ingadoznak. Az ingadozás mértékét a szórással, illetve praktikussági okokból, a szórásnégyzettel jellemezhetjük:

$$D^2(R_i) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (R_i - R)^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R_i^2 - R^2 \quad . \quad (43)$$

Erre azért van szükségünk, mivel a szórásnégyzet arányos a spektrummal, és a szórásnégyzet, a feladat jellegéből adódóan, számunkra könnyebben kezelhető.

$$D^2(R_i) \sim S_R(f) \quad . \quad (44)$$

Ugyanis, ha az R_i értékek fluktuációját időbeli folyamatként tekintjük, akkor R az

$$R = \langle R(t) \rangle_t = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R_i \quad (45)$$

alakban adódik, vagyis egyenlő az R_i -k számtani közepével, ahol a $\langle \rangle_t$ időbeli átlagolást jelent. Ezt szokás elsőrendű időátlagnak is nevezni. A négyzetes időátlag:

$$\langle R^2(t) \rangle_t = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R_i^2, \quad (46)$$

pedig arányos a teljesítménnyel. Ha az átlagtól való eltérés teljesítményére vagyunk kíváncsiak, akkor az összteljesítményből le kell vonni az átlagteljesítményt:

$$\langle (R(t) - \langle R(t) \rangle_t)^2 \rangle_t = \langle R^2(t) \rangle_t - (\langle R(t) \rangle_t)^2, \quad (47)$$

amely a szórásnégyzettel egyenlő. Az $S_R(f)$ spektrum éppen ezt a teljesítményt adja meg frekvencia szerinti felbontásban.

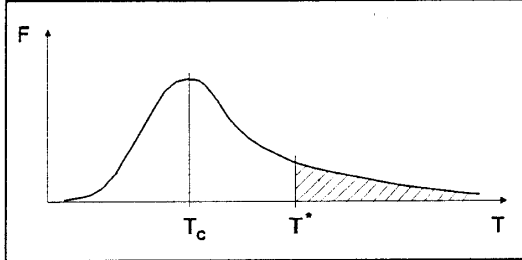
2.6 Lehetséges technikai alkalmazások

Mint ahogy a 2.3 részben feltettük, a magashőmérsékletű szupravezetőket úgy tekinthetjük, mintha szupravezető szemcsékből állnának, közöttük nem szupravezető rétegekkel [5,23]. Feltesszük még, hogy a szomszédos szupravezető szemcséket összekapcsoló Josephson-energia, (E), statisztikusan egy $f(E)$ eloszlásfüggvénnyel írható le. Az $f(E)$ eloszlásfüggvény ismeretében a minta átmeneti tartománybeli makroszkópikus viselkedése származtatható.

Ugyanis az átlagtér-elmélet alapján kimutatható, [6,7] hogy a szemcsék között a fáziscsatolás akkor jön létre, ha

$$kT < \frac{Ez}{2}, \quad (48)$$

ahol k a Boltzman-állandó, z pedig egy szemcse legközelebbi szomszédainak az effektív száma.



2.6.1. ábra Az $F(T)$ eloszlásfüggvény

Tegyük fel, hogy az $f(E)$ eloszlásfüggvény a 2.6.1. ábrán látható módon adott, illetve az ennek megfelelő hőmérséklettől függő eloszlásfüggvény:

$$F(T)dT = f\left(\frac{E}{k}\right) \frac{dE}{k} \quad (49)$$

Egy adott T^* hőmérsékletnél a fáziszárt Josephson-átmenetek száma (amelyek szupraáramot hordoznak), arányos a görbe alatti területtel ($T > T^*$ -ot véve):

$$p(T) = B \int_T^{\infty} F(T') dT' \quad (50)$$

ahol B konstans, és a $p(0) = 0$ feltételből határozható meg. Ahogy a hőmérséklet csökken, egyre több átmenet válik szupravezetővé. A T_c kritikus hőmérsékletnél a fáziszárt átmenetek elérik a minta lineáris méretét, vagyis ekkor alakul ki a makroszkópikus szupravezetés. A T_c kritikus hőmérséklet kapcsolata a perkolációs elmélet p_c kritikus valószínűségével a következő. A perkolációs átmenet, az itt vázolt gondolatmenet alapján, a hőmérséklet megváltozásának köszönhető, vagyis az

$$R \sim (p_c - p)^s \quad (51)$$

összefüggésben szereplő p , a hőmérséklet függvénye:

$$p=p(T) \quad . \quad (52)$$

Vagyis

$$p_c=p(T_c) \quad . \quad (53)$$

Mivel p az a valószínűség, amely szerint egy adott átmeneten a Josephson-effektus miatt szupraáram folyik, ezért

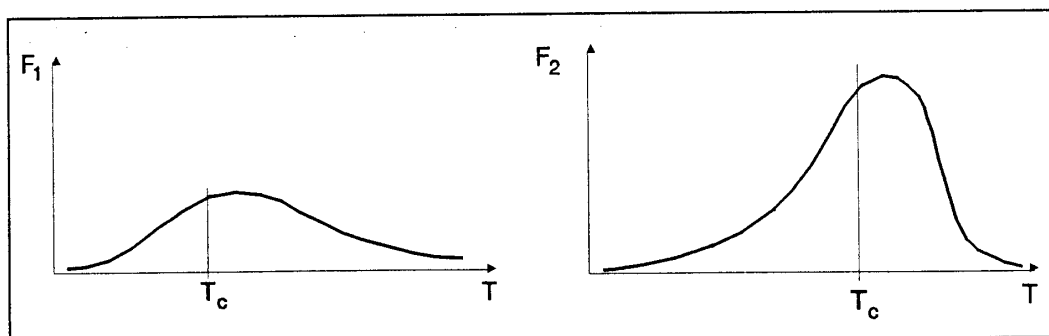
$$p_c-p(T)=B\int_{T_c}^T F(T')dt' \quad . \quad (54)$$

Az (51) és (54) egyenletek alapján kapjuk, hogy

$$F(T)=\frac{1}{sB}R^{\frac{1-s}{s}}\frac{\partial R}{\partial T} \quad . \quad (55)$$

A $\partial R/\partial T$ függvény az $R(T)$ méréséből határozható meg. Mivel az s exponens elég jól ismert, ezért az $F(T)$ függvény kísérletileg meghatározható.

Az $F(E)$ (illetve az $F(T)$) eloszlásfüggvény ismerete hozzásegíthet minket magasabb kritikus hőmérsékletek eléréséhez. Hasonlítsuk össze a 2.6.2. ábrán látható két eloszlásfüggvényt, $F_1(T)$ -t és $F_2(T)$ -t.

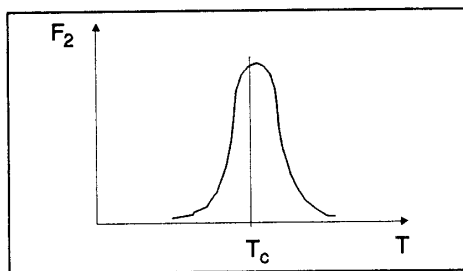


2.6.2 ábra Különböző eloszlásfüggvények hatása a kritikus hőmérsékletre

A két függvény által leírt anyag viselkedése eléggé eltérő. A perkolációs kép, illetve a

függvények alatti területek alapján látható, hogy az $F_2(T)$ által leírt minta magasabb hőmérsékletnél válik szupravezetővé, mint az $F_1(T)$ -vel jellemezhető minta. Vagyis az $F_2(T)$ -hez hasonló eloszlásfüggvények létrehozásával magasabb kritikus hőmérsékletet érhetünk el.

A kritikus áramsűrűség a magashőmérsékletű szupravezetőkben több nagyságrenddel kisebb, mint a közönséges szupravezetőkben. Különösen alacsony a kritikus áramsűrűség a kritikus hőmérséklet közelében. Ez a perkolációs kép alapján egyszerűen magyarázható, sőt még egy lehetséges megoldást is kínál a problémára. A perkolációs küszöbnél, vagyis $T=T_c$ -nél, csak néhány út létezik a mintában, amelyen keresztül supraáram folyhat. Ahhoz, hogy megnöveljük ezen szupravezető utak számát, egyre több Josephson-átmenetet kell szupravezetővé tenni. Vagyis, hogy magas hőmérsékleten is nagyobb kritikus áramsűrűséget érjünk el, az $F(T)$ eloszlásfüggvénynek élesen csökkennie kell.



2.6.3 ábra Nagyobb kritikus áramot eredményező eloszlásfüggvény

A 2.6.3. ábrán látható $F_3(T)$ pl. nagyobb kritikus áramsűrűséget eredményez, mint az $F_1(T)$ vagy az $F_2(T)$. Általában a magasabb kritikus hőmérséklethez nagyobb $\langle E \rangle$ -kell, míg a nagyobb kritikus áramsűrűséghez kisebb $D(E) = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ elérése szükséges.

2.7 A vezetőképesség származtatása a diffúziós állandóból

Végezetül érdemes még megemlíteni, hogy a vezetőképesség tanulmányozására a perkolációs elmélet alapján egy másik út is kínálkozik. Ez tulajdonképpen a diffúzió modellezésén alapul.

A pontperkolációs képből helyezzünk egy részecskét, vagy egy "hangyát" egy foglalt pontra. A hangya minden lépésben kiválaszt egyet közvetlen szomszédai közül. Ha az foglalt, akkor a hangya átlép oda, míg ha üres, akkor a helyén marad. A következő lépésben ismét kiválasztja az egyik szomszédját, és odalép, ha az foglalt. Ezt a folyamatot kellően sokszor ismételve kapjuk a diffúzió modelljét. Ebből a modelltől meghatározható a D diffúziós állandó, amiből a

$$D = \frac{kt}{e} \mu_e \quad (56)$$

Einstein-féle összefüggés alapján a μ_e mozgékonyág kiszámítható. (k a Boltzman állandó, e az elektron töltése) A mozgékonyág a

$$\underline{j} = \sigma \underline{E} \quad (57)$$

differenciális Ohm-törvénnyel a következő kapcsolatban áll:

$$\sigma = en \mu_e \quad (58)$$

ahol \underline{j} az áramsűrűség vektor, \underline{E} az elektromos térerősség, σ a fajlagos vezetőképesség, illetve n az elektronok koncentrációja. Vagyis

$$\sigma = \frac{e^2 n}{kT} D \quad (59)$$

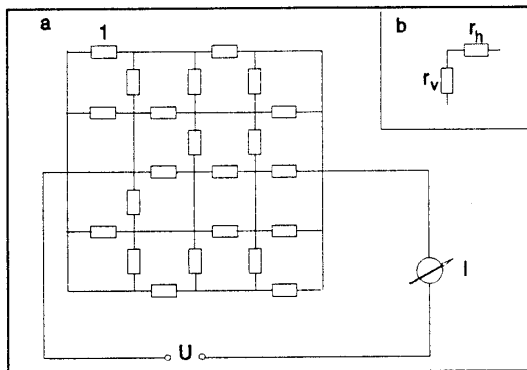
tehát

$$\sigma \sim D \quad (60)$$

Az ilyen, "hangya a labirintusban" jellegű problémák, különböző jelenségekkel kapcsolatban, beható kutatások tárgyát képezik.

3. MODELLEK ÉS SZÁMÍTÁSI ALGORITMUSOK

A 2.3 pontban említették képezik a fizikai alapjait annak, hogy a magashőmérsékletű szupravezető anyagokat egy ellenálláshálózattal modellezzük, amelyben véletlenszerűen kiválasztott helyeken az ellenállások helyett rövidzárok szerepelnek. (3.1.a ábra)



3.1. ábra Egy 5×5 -ös ellenálláshálózat ($n=5$, $p=0,3$), illetve az "elemi cella"

Az algoritmus kritikus pontja egy ilyen hálózat eredő ellenállásának kiszámítása. Erre, a 2.4 pontban látottak szerint, kétféle módszer is ismeretes, amelyek megvalósításra is kerültek. Mivel ez a két módszer mind a hálózat generálása, mind a hálózat generálása, mind pedig az ellenállás kiszámítása terén erősen eltér egymástól,

először ezen két eljárás gyakorlati kivitelezéséről lesz szó.

3.1 A Kirchoff-féle hurokegyenletek módszere

Először a Kirchoff-féle hurokegyenletes módszer került megvalósításra. Az algoritmus három lényeges pontból áll: a hálózat generálása, az R ellenállásmátrix felírása s végül Gauss-eliminációval az eredő ellenállás kiszámítása. Tekintsük át külön-külön ezeket a lépéseket!

A 3.1.a ábrán látható hálózat a 3.1.b ábrán látható elemekből, mint elemi cellákból lett felépítve. Minden csomópontoz tartozik egy ilyen elem. Az r_h , illetve az r_v ellenállások

csak a 0 vagy 1 értékeket vehetik fel, egymástól függetlenül. Ezt minden egyes csomópont esetében egy véletlenszám-generátor segítségével határozzuk meg. A véletlenszámok a 0 és 1 közötti tartományba estek. Ha a generált véletlenszám értéke kisebb egy előre megadott, rögzített p számnál, akkor az illető ellenállás értéke 0, vagyis egyszerűen rövidzár kerül a helyébe, míg ha a véletlenszám nagyobb, vagy egyenlő p -vel, akkor az ellenállás az 1 értéket veszi fel. Így érjük el azt, hogy a hálózatban p valószínűséggel szerepeljenek a rövidzárak, illetve $1-p$ valószínűséggel az ellenállások. Ezzel a módszerrel, soronként felépítjük az egész hálózatot. Ezután még létre kell hoznunk a hálózat főkörhöz való csatlakozási pontjait. Ezt egyszerűen úgy oldottuk meg, hogy az első és az utolsó oszlop csomópontjaihoz tartozó r_v ellenállásokat kinulláztuk (már ahol eredetileg nem nulla volt)⁹. Ezzel létrehoztunk egy, a 3.1.a ábrán láthatóhoz hasonló felépítésű hálózatot.

Ezután következik az ellenállásmátrix felírása. Ez, ha a minta lineáris mérete n , akkor egy $(n-1)^2 \times (n-1)^2$ -es mátrixot jelent, illetve a számítógép tárkapacitásának szempontjából egy ugyanekkora méretű (kétdimenziós) tömböt. Alkalmazva a Gauss-eliminációt a mi problémánkra, vagyis a (28)-as egyenletrendszerre, a következő megállapításokat tehetjük. Az egyenletrendszer megoldható, hiszen a hálózat a főkör szempontjából mindig helyettesíthető eredőjével. Azonban előfordulhat, hogy egyes mátrixelemek a főátlóban nullák, amit mi a fenti levezetésben kizártunk. Ilyen eset akkor fordul elő, ha pl. az i -edik hurokban minden ellenállás helyébe rövidzár kerül. Ekkor azonban az i -edik hurokban minden ellenállás helyébe rövidzár kerül. Ez azt jelenti, hogy az i -edik huroknak semelyik másik hurokkal nincs közös ellenállása, tehát az egész i -edik sor az \mathbf{R} mátrixban nulla, (s mivel az \mathbf{R} szimmetrikus mátrix, ezért az i -edik oszlop is nulla) vagyis a Gauss-elimináció szempontjából ezzel a sorral

⁹ Bár igazából nem számított bele a hálózatba, de a rend kedvéért az utolsó oszlop (a kontaktus oszlop) csomópontjaihoz tartozó r_h ellenállásokat is kinulláztuk, valamint a legelső sor r_v ellenállásait is, hasonlóképpen.

semmi teendőnk nincs, léphetünk a következő sorra. A Gauss-elimináció elvégzése után kapjuk a következő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
 R_{00}I_0 + R_{01}I_1 + R_{02}I_2 + \dots + R_{0,(n-1)^2}I_{(n-1)^2} &= 0 \\
 R_{11}^{(1)}I_1 + R_{12}^{(1)} + \dots + R_{1,(n-1)^2}^{(1)}I_{(n-1)^2} &= 0 \\
 R_{22}^{(2)}I_2 + \dots + R_{2,(n-1)^2}^{(2)}I_{(n-1)^2} &= 0 \\
 &\vdots \\
 R_{(n-1)^2,(n-1)^2}^{(n-1)^2}I_{(n-1)^2} &= U
 \end{aligned} \tag{61}$$

Az U értéke nem változott meg a transzformáció során, mivel minden lépésben nullát adtunk hozzá. Az eredő ellenállás (61) utolsó egyenlete alapján éppen R_{nn} , mivel I_n a főkörben folyó áramot jelenti.

Ha felírjuk egy, a 3.1. ábrán láthatóhoz hasonló hálózatra az ellenállásmátrixot, akkor azonkívül, hogy ez egy szimmetrikus mátrix, még könnyen észrevehetjük, hogy a főátlótól csak $\pm(n-1)$ elemnyi távolságon belül eső elemek különbözhetnek 0-tól, vagyis az ezen a sávon kívül eső elemek mindegyike nulla. Ezeknek a mátrixelemeknek, mivel már most nullák, a Gauss-elimináció szempontjából nincs szerepük, tehát nem is szükséges tárolni őket. Helyette elég, ha csak a főátló $\pm(n-1)$ szélességű sávját, vagyis $(n-1)^2 \times (2n-1)$ számú elemet tárolunk. Ezáltal a szükséges tömbméret nem n^4 szerint nő a minta lineáris méretével, hanem csak n^3 szerint. Ekkor azonban az új tömb (jelöljük R^* -gal) elemeit át kell indexelnünk. Az R és az R^* tömbök (mátrixok) elemei közötti megfeleltetés:

$$\begin{aligned}
 R_{ij} &= R_{ik}^* \quad , \\
 k &= j + (n - (i + 1)) \quad ,
 \end{aligned} \tag{62}$$

vagyis pl. az R tömb $(0,0)$ indexű eleme az R^* tömb $(0,n-1)$ indexű elemének felel meg, vagyis az R főátlója az R^* $n-1$ -edik oszlopa (mivel az R^* indexei is nullától kezdődnek). Az R^* azon

elemeinek, amelyeknek nincs R -beli megfelelőjük (pl. az R^*_{00} vagy az $R^*_{(n-1):(2n-1)}$ elemek), az értéke nulla.

A Gauss-elimináció ezek után a (62) transzformációs képlet figyelembevételével, a 2.4 pontban említettek szerint egyszerűen végrehajtható. Nézzük meg ezt egy kicsit részletesebben először az eredeti mátrixon. Az elimináció abból áll, hogy a főátló alatti elemeket oszloponként kinullázzuk. Mivel azonban a j -edik oszlopban a $j+n-1$ -edik elem alatt (ha van ilyen) már csak nullák állnak, ezért nem kell az egész oszlopon végigmenni. Tehát a (39) formulában szereplő l_{ij} most:

$$l_{ij} = \frac{R_{ij}^{(j)}}{R_{jj}^{(j)}}, \quad (j=0, 1, \dots, m-1; i=j+1, j+2, \dots, \min(j+n-1, m)) \quad (63)$$

Ezen kívül, amikor az i -edik egyenletből kivonjuk a j -edik egyenlet l_{ij} -szeresét, akkor is csak a j -edik elemtől kell az új mátrixelemeket képezni, mivel a j -edik egyenlet első $j-1$ elemét már a korábbi lépésekben kinulláztuk, valamint a j -edik egyenlet $j+n-1$ -nél nagyobb indexű elemei (ha vannak) már eleve nullák voltak, tehát ezekből nem kapunk újabb járulékot. Ezért

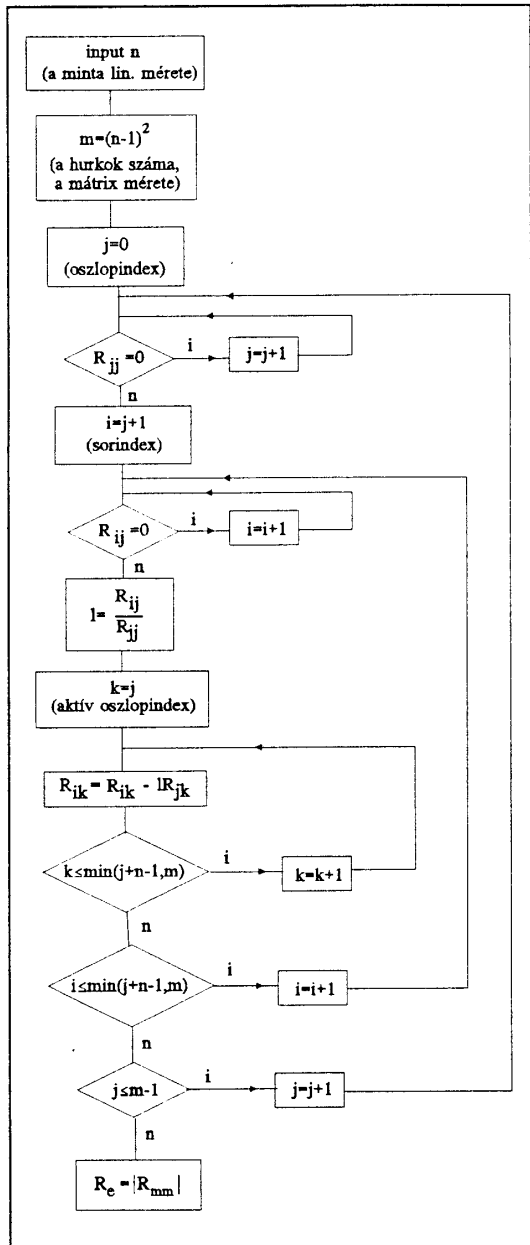
$$R_{ik}^{(j+1)} = R_{ik}^{(j)} - l_{ij} R_{jk}^{(j)}, \quad (k=j, j+1, \dots, \min(j+n-1, m)) \quad (64)$$

Ez látható a 3.2. ábrán vázolt folyamatábrán.

Itt már csak be kell helyettesíteni minden R_{ij} helyére a neki megfelelő R^* -beli elemet. Ezt a C nyelvben igen egyszerűen, a program elejére írt makróval meg lehet oldani. Ez azt csinálja, hogy amikor a program az R_{ij} értékhez nyúl, akkor valójában az $R^*_{i,j+(n-i)}$ elemmel dolgozik.¹⁰

Azzal, hogy az elemek tárolását így oldottuk meg, nemcsak helyet sikerült

¹⁰ Megtehettük volna, hogy az egész programban következetesen az összes R_{ij} helyére a megfelelő R^* -beli elemet írjuk, ám így ezt csak egyszer kellett megtennünk, és a program is áttekinthetőbb maradt.



3.2 ábra A Gauss-elimináció folyamatábrája

megtakarítanunk (a szükséges memóriaterület n negyedik hatványa helyett csak a harmadik hatvánnyal nő), hanem a futási időben is jelentős javulást értünk el. Ugyanis a Gauss-elimináció, ha az eredeti R mátrixra alkalmazzuk, a mátrix lineáris méretének harmadik hatványával (vagyis n^6 -nal) arányos művelet elvégzését jelenti, míg az R^* -ra alkalmazva csak n^4 -nel arányos a műveletek száma. Ez 10×10 -es minta esetén 100-szoros sebességnövekedést eredményez.

Mivel ugyanazon n és p értékek mellett generált hálózatoknak az eredője általában különböző lesz, ezért a fenti lépéseket — a hálózat generálása, megoldása — a kívánt számban megismételjük, és az eredő ellenállások átlagát, szórását, stb. vizsgáljuk.

Az algoritmus tesztelése igen egyszerűen elvégezhető. Ha ugyanis minden

ellenállás értéke 1 (kivéve a kontaktus- oszlopokat), akkor a hálózat eredője papíron is könnyen kiszámolható. Látható ugyanis, hogy ebben az esetben a függőleges ellenállásoknak nincs jelentőségük az eredő ellenállás szempontjából, mivel az ugyanazon oszlopban lévő

csomópontok ekvipotenciálisak, vagyis akár össze is köthetők. Ekkor n db ellenállás van párhuzamosan kötve, ennek eredője $1/n$, és ez ismétlődik $n-1$ -szer, vagyis az egész hálózat eredő ellenállása $(n-1)/n$.¹¹ Ez a minden vizsgált n -re igaznak bizonyult.

3.2 A Fogelholm-féle csomópont-eliminációs módszer

Ennek a módszernek a bemutatásánál (a 2.4 fejezetben) megjegyeztük, hogy akkor alkalmazható, ha a perkolációs hálózatban a kötések nagy számban hiányoznak. A mi esetünkben, a perkolációs küszöbhez közel, az ellenállások jelentős hányada helyett rövidzárak szerepelnek a hálózatban. Mivel azok a pontok, amelyek közt rövidzárak vannak, ekvipotenciálisak, s így nyilvánvalóan összevonhatók. Ezáltal a megszüntetendő csomópontok, illetve a csomópontokból kiinduló ellenállások száma jelentősen csökken.

A hálózat generálása, és az eredő ellenállás kiszámítása az alábbi lépésekből áll:

- 1.) A kontaktus csomópont létrehozása.
- 2.) Egy oszlop létrehozása, véletlen kötésekkel a kontaktus-csomópont, illetve egymás felé. Ezt az oszlopot frontoszlopnak hívjuk.
- 3.) A következő oszlop létrehozása, véletlen kötésekkel a frontoszlop felé. Ez fogja átvenni a frontoszlop szerepét. Azok a csomópontok, amelyek nem tartoznak sem a kontaktushoz, sem pedig a frontoszlophoz, azok belső pontok. A kontaktus és a frontoszlop közti hálózattal elektromosan ekvivalens hálózatot kapunk, ha a belső csomópontokat elimináljuk.

¹¹ Az ellenőrzés kedvéért a hálózat valamennyi r_i ellenállását valóban ki is cseréltük rövidzárakra, és a fenti összefüggés akkor is teljesült.

4.) Elimináljuk a belső pontokat.

A 3-as és 4-es lépések ismétlésével felépítjük a kívánt hálózatot.

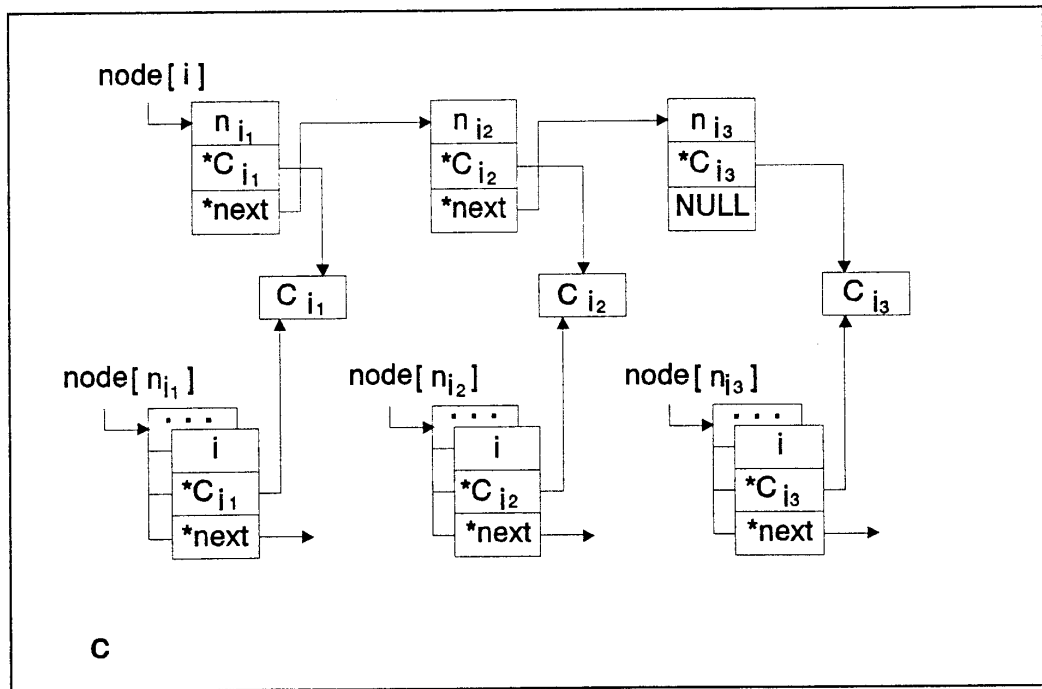
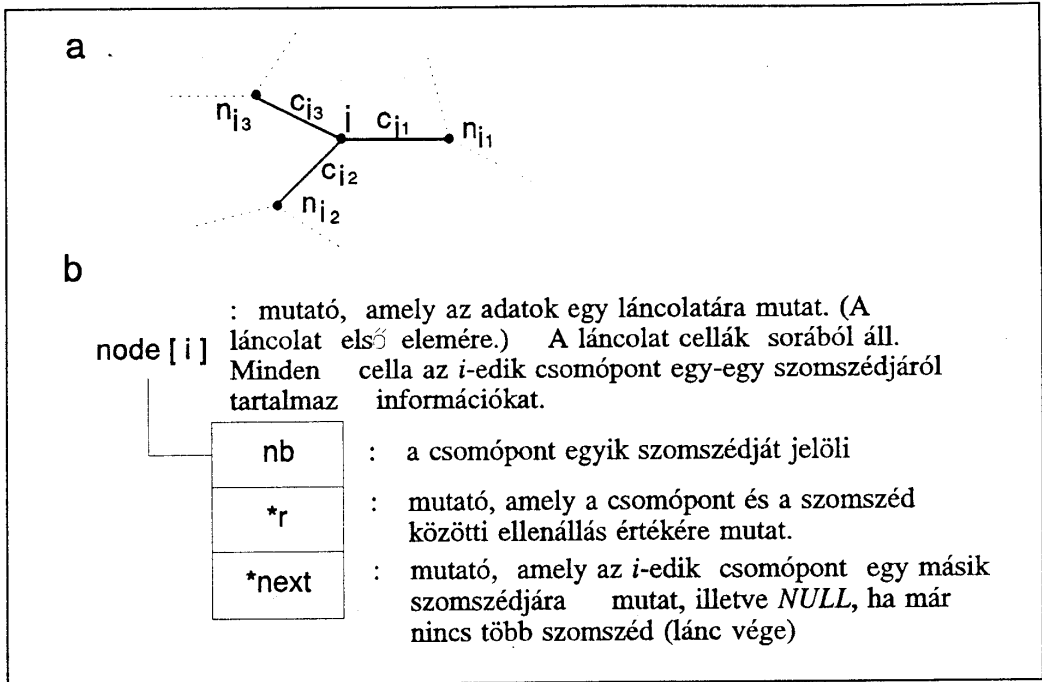
5.) A frontoszlopot összevonjuk a második kontaktuspontba.

6.) A maradék csomópontok megszüntetése. Ezáltal a két kontaktus között egyetlen ellenállás marad vissza (vagy rövidzár), s ez lesz a hálózat eredő ellenállása.

Az imént vázolt leírásban a véletlen kötések létrehozása azt jelenti, hogy a két pont között egy véletlenszám-generátor segítségével eldöntjük, hogy 0 vagy 1 Ohm értékű ellenállás van-e. (ha a nulla és egy közé eső véletlenszám értéke egy rögzített p számnál kisebb, akkor az ellenállás értéke nulla, különben egy.

A csomópontok eliminálása két lépésben történik. Először összevonjuk azokat a pontokat, amelyek között rövidzár van, majd aztán a maradék csomópontokat kiiktatjuk, miközben újabb ellenállásokat iktatunk be a rendszerbe. Ha ezáltal két pont közé két ellenállás kerül, akkor azokat párhuzamos eredőjükkel helyettesítjük.

Az egész algoritmus kritikus pontja az adatstruktúra felépítése, vagyis a csomópontok és a szomszédai felé irányuló kötések tárolása. Minden csomópontoz a cellák egy láncolata tartozik, amely cellák minden információt tartalmaznak a csomópont szomszédjáról. A 3.2.1.a ábrán egy teszőleges hálózat egy darabja látható. Az ehhez tartozó adatláncolat a 3.2.1.c ábrán van feltüntetve, míg a lác egy cellája, a benne tárolt információ tartalommal a 3.2.1.b ábrán került bemutatásra. Az adatstruktúra ilyen felépítésének köszönhetően egy csomópont egyik szomszédjának törlése viszonylag egyszerűen megvalósítható. Ez ugyanis egy cella kitörlését jelenti a láncból. Pontosabban kettőét, mivel pl. az i és j pontok közötti összeköttetés az i és j pontokhoz tartozó adatláncban is szerepel. Egy cella törlése pedig úgy történik, hogy az előző cella *next* pointerét (amely a törlendő cellára mutat) átállítjuk a láncban utána következő cellára (vagy *NULL*-ra, ha a láncban az volt az utolsó elem).



3.2.1. ábra a) A hálózat egy részlete b) Az adatlánc egy cellája c) Az a ábrán látható hálózathoz tartozó adatlánc-részlet

Az algoritmus tesztelése ugyanolyan módon történt, mint a Kirchoff-módszer esetében, vagyis csupa 1 értékű ellenállás esetére visszakaptuk az analitikusan kiszámolt eredményeket. (Ezt itt csak $n < 15$ esetre próbáltuk ki, mivel nagyobb méret esetén a sok ellenállás miatt a futási idő és a tárigény is jelentősen megnő) Háromdimenziós köbös hálózatra az eredő ellenállás ebben az esetben $(n-1)/n^2$ szerint adódott.

A Kirchoff-módszert kétdimenziós hálózatok tanulmányozására használtuk, miközben a p paramétert széles tartományban változtattuk. A futási idő, és a rendelkezésre álló memória szempontjából a 40×40 -es hálózatok tűntek a legalkalmasabbnak a vizsgálódásokra. A háromdimenziós minták tanulmányozása a Fogelholm-módszerrel történt. Ez azonban csak a perkolációs küszöb közelében használható.

4. AZ EREDMÉNYEK ISMERTETÉSE

Az alábbiakban, a harmadik fejezetben ismertetett algoritmusok felhasználásával, a modellből nyert eredmények ismertetésére kerül sor. A számítógépes programok C programnyelven lettek megírva, és AT 486-os PC-n, illetve IBM 3090-es számítógépeken lettek futtatva.

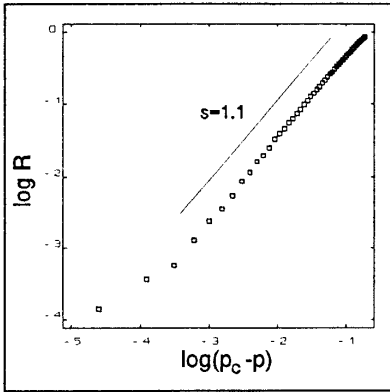
4.1 Eredmények kétdimenziós esetekben

Először a hálózat eredő ellenállásának a p -tól való függését vizsgáltuk, ahol a p a hálózatban előforduló rövidzárak valószínűségét jelenti. Mivel a hálózatot szabályos négyzetes rácsként vettük fel, ezért a p_c értéke 0,5. Mivel a szükséges memória, és a futási idő a hálózat lineáris méretének növelésével drasztikusan emelkedik, ezért 40×40 -es mintákat vettünk alapul. A p paramétert 0-tól, 0,1-es lépésekben növeltük egészen 0,5-ig. A statisztikus ingadozások csökkentése érdekében p minden értékénél 100-100 mintát generáltunk (ezek eredője R_i), s ezek átlagait $R(p)$ -vizsgáltuk. Azt találtuk, hogy az ellenállás a p_c-p különbség hatványfüggvényeként változik:

$$R \sim (p_c - p)^s, \quad (65)$$

ami nem meglepő, mivel a kísérleti eredmények is ezt bizonyították. Az s kitevőt az (65) arányosság log-log skálán történő ábrázolása útján határoztuk meg. Mint a 4.1. ábrán is látható, a kapott pontokra igen jó közelítéssel lehet egyenest illeszteni, s ennek az egyenesnek

a meredeksége adja az s értékét, ami ebben az esetben 1,1-nek adódott.



4.1. ábra Az eredő ellenállás változása a rövidzárok valószínűségének függvényében

Ha s -nek az általunk kapott értékét összehasonlítjuk a 2.3 pont III táblázatában fellelhető értékkel, akkor megállapíthatjuk, hogy mi kb. 18%-kal kisebb értéket kaptunk.

Az azonban végtelen mintaméretre vonatkozó, a p_c közvetlen közelében érvényes adat, egy 40×40 -es hálózat pedig közel sem tekinthető végtelennek, s nem is csak a p_c közelében néztük az ellenállást. Straley és

Kirkpatrick is hasonló eredményre jutottak $n=50 \dots 100$ -

as lineáris méretű normál vezető-szigetelő hálózatok számítógépes szimulálásakor [22]. A másik észrevétel, amit tehetünk, hogy p_c -nél az ellenállás nem válik nullává. Ez szintén a véges mintaméret következménye.

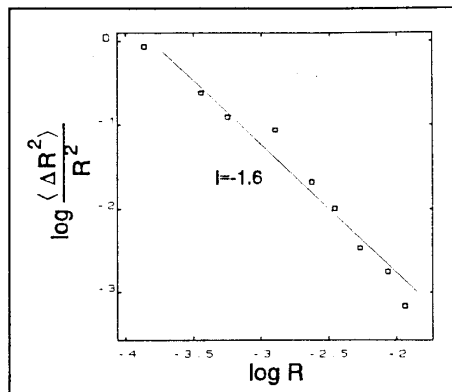
Ezzel párhuzamosan a mintákon vizsgáltuk még az eredő ellenállások statisztikus ingadozásait is, pontosabban azok szórásnégyzetének és átlagnégyzetének a hányadosát (ez, mint a 2.6 pontban láttuk arányos a spektrummal). Azt találtuk, hogy ez a mennyiség az $R(p)$ hatványfüggvényének alakjában változik:

$$\frac{\langle \Delta R^2 \rangle}{R^2} \sim R^{-l} \quad (66)$$

Ezt, szintén log-log skálán ábrázolva, a 4.2. ábrán láthatjuk. A pontokra illesztett egyenes meredeksége adja a $-l$ -et, ami jelen esetben 1,61-nek adódott. Az, hogy az l értéke a III. táblázatban szereplő értéktől különbözik, a 2.3 pontban említett (19) és (26) összefüggésekkel leírt fluktuációknak köszönhető. Az l kitevő a mérési adatok szerint is széles tartományban változott [24,25]. Mindkét esetben a hatványfüggvény szerinti skálázódás egyértelműen

megállapítható.

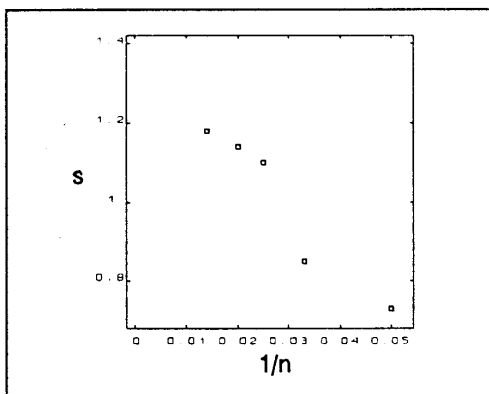
Második lépésben az átmeneti tartományt vizsgáltuk meg közelebbről. Ez azt jelenti, hogy (még mindig 40×40 -es mintánál maradva) a p -t 0,4 és 0,5 között változtattuk, 0,05-ös lépésekben. Ahogy a p -vel közelítünk a p_c -hez, a statisztikus ingadozás egyre jelentékenyebbé válik. Ezért most minden p -hez 1000 mintát generáltunk. Az



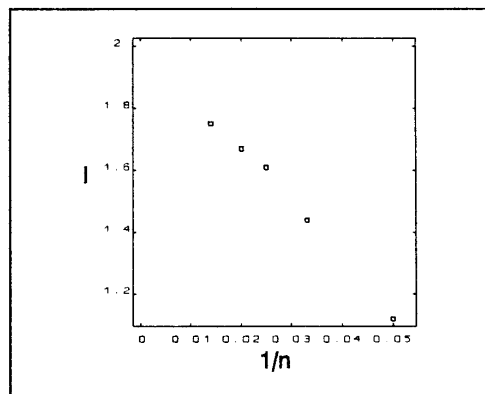
4.2. ábra A normalizált fluktuáció az eredő ellenállás függvényében

eredmények ebben az esetben is hatványfüggvény szerint változtak, hasonlóan mint a 4.1., illetve a 4.2. ábrán látható esetben. Az s kitevőt ebben a tartományban 1,12-nek találtuk, míg az l -re 1,53 adódott.

Annak igazolására, hogy a fent említett kitevőkre kapott eredmények valóban a kis mintaméret miatt térnek el az elméleti úton nyert (és kísérletileg is alátámasztott) értékektől, elvégeztük az átmeneti tartományra vonatkozó vizsgálatokat $n=20, 30, 50$ és 70 lineáris mérettel rendelkező mintákra is.



4.3. ábra Az s függése a mintamérettől.



4.4. ábra Az l függése a mintamérettől

(Ezekben az esetekben 0,1-es lépésekben változtattuk a p -t, és csak 100 mintát generáltunk

minden p -hez.) Az s kitevő változása a mintaméret függvényében a 4.3. ábrán látható. Pontosabban az s az $1/n$ függvényeként lett ábrázolva, s így leolvasható, hogy végtelen mintaméret esetén ($1/n \rightarrow 0$) az s 1,3 körüli értéket vesz fel, megegyezésben a tapasztalattal. Hasonlóan, az l változását a mintaméret reciprokával, a 4.4. ábrán láthatjuk. Leolvasható, hogy végtelen mintaméretre extrapolálva, az l értéke körülbelül 2.

4.2 Az anizotrópia vizsgálata

Ezek után megpróbáltunk anizotrópiát vinni a rendszerbe. Ez azt jelenti, hogy megvizsgáltuk, hogyan változnak a kitevők, ha a vízszintes és függőleges irányban lévő ellenállások értéke különbözik. A vízszintes és a függőleges ellenállásokat külön-külön változtattuk meg. A számításokat most is 40×40 -es mintákra végeztük el, a perkolációs küszöb közelében, vagyis a p -t 0,4 és 0,5 között változtattuk. Minden esetben 100 mintát generáltunk. Az eredmények a IV. táblázatban vannak összefoglalva.

IV. Táblázat A kitevők függése a hálózat ellenállásaitól

		s		l	
$r_v=1$	$r_h=2$	1.08	1.38		
$r_v=1$	$r_h=10$	1.13	1.21		
$r_h=1$	$r_v=2$	1.03	1.56		
$r_h=1$	$r_v=10$	0.95	1.78		

Ezek szerint a függőleges irányú ellenállások megváltoztatásának volt nagyobb szerepe a kitevők megváltozásában. Az ilyen jellegű anizotrópia s értékét viszonylag kevésbé, míg az l -et jelentősen befolyásolta. Ezek a helyzetek külső hatásoknak kitett szupravezetőket modellezhetnek, ugyanis pl. külső mágneses tér (a Meissner-effektus révén) befolyásolhatja

a különböző irányokba eső vezetőképességet.

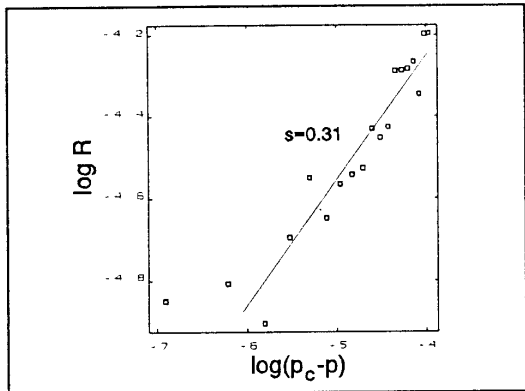
Ezekkel a vizsgálatokkal tulajdonképpen ki is mérítettük a Kirchoff-módszer

használatában rejlő lehetőségeket. A véges memóriakapacitás miatt a mintaméretet számottevően már nem lehet növelni, ez pedig elengedhetetlen lenne a megbízhatóbb eredmények elérése érdekében. Az ezután következő esetekben már a Fogelholm-módszert használtuk fel.

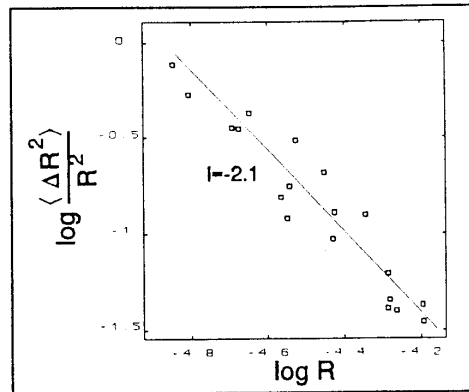
Ugyan a mintaméretet ezzel a módszerrel sem sikerült jelentősen megnövelnünk, ellenben lehetőségünk nyílt háromdimenziós minták tanulmányozására. Ezt már tényleg csak a perkolációs küszöb közelében sikerült megtennünk, ugyanis, mint korábban említettük, ez a módszer csak akkor használható, ha a perkolációs hálózattól a kötések viszonylag nagy számban hiányoznak.

4.3 Eredmények háromdimenziós esetekben

A hálózatot egyszerű köbös rácsban vettük fel. Ebben az esetben a perkolációs küszöb értéke $p_c=0,249$. A vizsgálatokat $10 \times 10 \times 10$ -es mintaméretre végeztük el (csak ennyi fért el a memóriában), miközben a p -vel 0,23-tól 0,001-es lépésekben közelítettük meg a p_c -t. Minden p -re 100 mintát generáltunk. Az eredmények a 4.5., illetve a 4.6. ábrán láthatóak. Az s értékére ebben az esetben 0,31, míg az l -re 2,1 adódott.



4.5. ábra Az eredő ellenállás a rövidzárok valószínűségének függvényében (log-log skálán) háromdimenziós esetben



4.6. ábra A normalizált szórásnégyzet az eredő ellenállás függvényében (log-log skálán), háromdimenziós esetben

A kitevők értékének változása a minta méretének függvényében itt is hasonlóan adódik, mint a kétdimenziós esetre.

5. ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozat elején célul tűztük ki a magashőmérsékletű szupravezető anyagok modellezését a perkolációs elmélet alapján, illetve az elméletben szereplő skálázási (kritikus) exponensek meghatározását, és viselkedésének tanulmányozását különböző körülmények között. Kísérleti tapasztalatok (és elméleti kutatások) alapján, a szupravezető anyagot random ellenálláshálózattal modelleztük, vagyis a minta ellenállását a hálózat eredő ellenállásával azonosítottuk. Ezen ellenálláshálózat — csakúgy, mint a valódi szupravezetők — perkolációs tulajdonságokkal rendelkezik, vagyis a perkolációs küszöb közelében az eredő ellenállása, illetve a vezetési zaja hatványfüggvény szerint változik. Ezen hatványfüggvényekben szereplő kitevők tanulmányozása, illetve a kísérleti adatokkal való egybevetése volt a fő feladatunk.

A modell random ellenálláshálózat viselkedését tanulmányoztuk a perkolációs küszöb közelében, számítógép segítségével. A számítógépes modellek Monte Carlo módszeren alapultak. A hálózat generálására és az eredő ellenállás kiszámítására kétféle eljárást használtunk fel, amelyeket korábban már a normál vezető-szigetelő hálózatokra nagy sikerrel alkalmaztak. Először az egyszerűbb Kirchoff-féle huroktörvény-módszert valósítottuk meg, ahol a csatolt lineáris egyenletrendszert egy optimalizált Gauss-eliminációval oldottuk meg, illetve adódott az eredő ellenállás. Ezt követően tértünk rá a Fogelholm-féle csomópont eliminációs módszerre. Itt a hálózat elektromosan ekvivalens átalakításainak sorozatával jutottunk el az eredő ellenálláshoz.

A modelltől nyert eredmények — a véges mintaméret figyelembevételével — jól közelítették a kísérleti úton talált eredményeket. Az anizotróp esetre vonatkozó vizsgálatok azt mutatták, hogy az s kitevő viszonylag kevésbé volt érzékeny az ilyen effektusokra, míg

az l erősen függött az anizotrópia mértékétől. Ezeket érdemes lenne mérésekkel is ellenőrizni. Az eredmények megbízhatóságában további javulás érhető el, ha a minta méretét sikerülne megnövelni. Erre a Fogelholm-módszer esetében kínálkozik lehetőség, ha a kitörölt cellák által felszabaduló helyet újra felhasználhatóvá tesszük. Egy másik lehetőség a továbblépésre a 2.7 pontban vázolt módszer, vagyis a vezetőképesség megközelítése a diffúziós állandón keresztül.

IRODALOMJEGYZÉK

1. Felix R. Paturi: A technika krónikája
Officina Nova, Budapest, 1992.
2. Móricz Ferenc: Numerikus analízis II.
Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
3. Pethő Ádám: abC programozási nyelvkönyv
Számalk Könyvkiadó, Budapest, 1991.
4. I. V. Savelyev: Physics III.
Mir Publishers, Moscow, 1989.
5. L. B. Kiss, T. Larsson, P. Svedlindh, L. Lundgren, H. Olsén, M. Ottoson, J. Hudner,
L. Stolt: Conductance Noise and Percolation In $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ Thin Films (kézirat)
6. M. Tinkham and C.J. Lobb, Solid State Phys. **42** (1988) 91
7. A Raboutou, et al., Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1035
8. S. Jain: Monte Carlo Simulations of Disordered Systems
World Scientific Publishing Co., 1992.
9. Fizika '77 Szerk.: Abonyi Iván
Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1977
10. J. G. Bednorz and K. A. Müller, Z Phys. B **64** (1986) 188
11. J. Bardeen, L.N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **106** (1957) 162 **108** 1175
12. J. File and R. G. Mills, Phys. Rev. Lett. **10** (1963) 93
13. H. Kamerlingh Onnes, akad. van Wetenschappen (Amsterdam) **14** (1911) 113, 818
14. J. R. Gavaler, Appl. Phys. Lett. **23** (1973) 480

15. A szupravezetés előfordulására vonatkozó adatok áttekintését ld.: A.I.P. Handbook, 3rd ed.
16. D. Stauffer "Introduction to Percolation Theory"
Taylor and Francis, London, 1985.
17. A. Aharony in "Scaling Phenomena in Disordered Systems"
Plenum, New York, 1986
18. D. C. Wright, D. J. Bergman and Y. Kantor, Phys. Rev. B **33** (1986) 396
19. P. M. Hui and D. Stroud, Phys. Rev. B **34** (1986) 8101
20. R. Rammal, C. Tannous, P. Breton and A.-M. S. Tremblay, Phys. Rev. Lett. **54** (1985)
1718
21. Simonyi Károly: Elméleti Villamosságtan
Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
22. R. Fogelholm, J. Phys. C **13** (1980) L571
23. G. Forgács, L. S. Schulman, L. B. Kiss, P. Svedlindh, L. Lundgren, Physica C **177**
(1991) 67
24. A. J. Katz and A. H. Thomson, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 1325
25. S. Havlin, D. Ben-Avraham and D. Movshovitz, Phys. Rev. Lett. **39** (1983) 2347
26. Ch. Kittel: Bevezetés a szilárdtest-fizikába
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1991.

Köszönetnyilvánítás

Ez a dolgozat a József Attila Tudományegyetem Természettudományi Karának Kísérleti Fizika Tanszékén készült. Ezért köszönetemet szeretném kifejezni Dr. Hevesi Imre tanszékvezető egyetemi tanárnak és a Tanszék vezetésének, hogy munkám elvégzéséhez lehetőséget biztosítottak.

Ugyancsak köszönettel tartozom Gingl Zoltánnak, a dolgozat témájának kijelöléséért, illetve a munkám során felmerült problémák megoldásában nyújtott segítségért.

Szeretnék köszönetet mondani a Kísérleti Fizika Tanszék, s különös tekintettel a Zajcsoport munkatársainak a segítőkész érdeklődésért és hasznos tanácsaikért, valamint mindazoknak, akik felhívták figyelmemet a dolgozatban előforduló hibákra és segítettek azok kijavításában.