

# Az $1/f$ zaj szintmetszési tulajdonságainak vizsgálata

Írta: **Mingesz Róbert**

V. éves fizikus hallgató

Témavezető:

**Dr. Gingl Zoltán** egy. adjunktus

SZTE Kísérleti Fizikai Tanszék

Szeged, 2002

# Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. Irodalmi összefoglaló	6
2.1. Sztochasztikus jelenségek	6
2.1.1. Valószínűségszámítási alapfogalmak	6
2.1.2. Valószínűségi változók várható értéke és szórása	8
2.1.3. Nevezetes valószínűségeloszlások	9
2.2. Véletlen folyamatok időbeli tulajdonságainak leírása	10
2.3. Sztochasztikus folyamatok frekvenciatartománybeli leírása	12
2.4. Zajok osztályozása	13
2.5. Jelek mérése	16
2.5.1. Amplitúdóbeli kvantálás	17
2.5.2. Időbeli kvantálás	17
2.5.3. A mintavételezett jel spektrális analízise	20
3. Numerikus szimulációk	22
3.1. Az alkalmazott programozási környezetek	23
4. Mérések	24
4.1. DAS 1414	24
4.2. Mervelemez illesztése	25
5. 5. Zajgenerátorok	27
5.1. Numerikus zajgenerátorok megvalósítása	27
5.1.1. Fehér zaj előállítása	27
5.1.2. Brown zaj és a Lorentzi típusú zajok generálása	28
5.1.3. Zaj előállítása Fourier transzformációval	29
5.1.4. Zaj előállítása digitális szűrővel	30
5.2. Analóg zajgenerátorok	32
5.2.1. Zaj előállítása félvezetők segítségével	32
5.2.2. Zaj generálása transzformációval	34
5.2.3. Zaj előállítása digitális jelgenerálással	34
6. Szintmetszések statisztikája	35
6.1. A statisztika függése a zaj kitevőjétől, és a metszett szinttől	36

6.2. Függés a zajgenerátortól	38
6.3. Elméletek	40
6.4. Valódi méréssel való összehasonlítás	45
7. A szintmetszetek közti korreláció	47
7.1. A vizsgálat módszere	47
7.2. Eltérés a korrelálatlan esettől	48
7.3. Paraméter illesztése	49
8. Összefoglalás	51
9. Köszönetnyilvánítás	52
10. Hivatkozások	52
11. Függelék	54
11.1. A Java nyelvben alkalmazott véletlenszámgenerátor	54
11.2. A DAS 1414 felépítése	56
11.3. A folyamatosan mintavételező program szerkezete	57

# 1. Bevezetés

A természetben meglévő folyamatok alapvető tulajdonsága a véletlenszerűség, vagyis, hogy jövőbeli viselkedésüket nem tudjuk egyértelműen megadni. Ennek két fő oka van: az egyik, hogy e rendszerek túlságosan is bonyolultak ahhoz, hogy egzaktul leírassuk őket, a másik ok, amire a kvantummechanika felfedezésével döbbenhettünk rá, hogy bizonyos folyamatokat valódi véletlenszerű jelenségek határoznak meg, melyeket nem ok-okozati összefüggések alapján működnek.

A fellépő véletlen jelenségek miatt egy fizikai rendszer vizsgálatakor a mért fizikai mennyiségek is folyamatosan ingadoznak, amit leggyakrabban a mérést korlátozó tényezőnek tartanak számon. Ugyanakkor a rendszerből származó sztochasztikus jelek igen fontos adatokat árulnak el a rendszer sajátosságairól. Ahhoz azonban, hogy e fluktuációkból kinyerhessük a számunkra hasznos információkat, pontos fizikai és matematikai modellekre van szükség, ezért fontos a véletlenszerű jelenségek vizsgálata.

A természetben az egyik leggyakrabban előforduló zajtípus az  $1/f$  zaj. A nevét onnan kapta, hogy a teljesítménysűrűség-spektruma a frekvenciával fordítottan arányos. Ez a zajtípust többek között megtalálható szilárd testek vezetőképességének fluktuációjában [1,2], szupravezetőkben [3], lézerekben [4], biológiai rendszerekben [5], de sok más területen is, mint a folyók vízszintjének ingadozásában [6], gazdasági adatok változásában [7], vagy a zenében is [8].

Annak ellenére, hogy az  $1/f$  zaj már régóta ismert és általánosan elterjedt zajtípus, még mindig nem sikerült egy átfogó elméletet alkotni. Modelleket leginkább csak speciális esetekre sikerült kidolgozni [9,10], és számos gond merül fel velük kapcsolatban. Az  $1/f$  zaj pontosabb megértése segítséget nyújthat más, a véletlen jelenségekkel kapcsolatos kutatásokban, mint pl. a sztochasztikus rezonancia kutatásában [11]

A megfelelő modellek hiánya miatt igen nehézkes e zajtípus elméleti kezelése, ennek következtében elég keveset tudunk az  $1/f$  zaj általános tulajdonságairól. A zaj időbeli tulajdonságairól is hiányosak az ismereteink. Dolgozatomban ennek egy speciális területével, az  $1/f$  zaj szintmetszeteinek tulajdonságaival foglalkozom. E területen már korábban is végeztek vizsgálatokat, amelyek azonban csak speciális esetekre vonatkoznak [12,22]. Célul tűztem ki, hogy különböző,  $1/f^\alpha$  ( $\alpha=0..2$ ) színes zajokra megvizsgáljam a szintmetszetek statisztikáját, és a szintmetszetek közötti korrelációt. Munkám során fontos céлом volt, hogy az eddig elért elméleti eredményeket pontosítsam, illetve új elemekkel egészítsem ki.

Vizsgálataim során numerikus szimulációkat és analóg méréseket egyaránt végeztem. Numerikus és analóg zajgenerátorokat valósítottam meg és ezek tulajdonságait teszteltem. Megfelelő programokat készítettem a numerikus szimulációk elvégzéséhez, és az adatok kiértékeléséhez, továbbá az analóg mérések elvégzéséhez szükséges rendszert is összeállítottam.

Dolgozatom első részében összefoglalom a szükséges matematikai és fizikai ismereteket, majd részletesebben bemutatom az általam kifejlesztett és használt eszközöket, végül az elért eredményeket ismertetem.

## 2. Irodalmi összefoglaló [13,14]

### 2.1. Sztochasztikus jelenségek

A természetben előforduló jelenségeket két fő részre oszthatjuk, determinisztikus és sztochasztikus jelenségekre. Míg determinisztikus jelenségek esetén a rendszer korábbi állapotát ismerve elvileg megadhatjuk egy tetszőleges későbbi állapotát, sztochasztikus jelenségekre ez nem igaz, ilyen esetben csak egy-egy lehetséges végállapot valószínűségét adhatjuk meg, vagyis az eseményeket a valószínűségelmélet módszereivel tárgyalhatjuk a legmegfelelőbbben. Ebben a fejezetben az ehhez szükséges ismereteket foglalom össze.

#### 2.1.1. Valószínűségyszámítási alapfogalmak

Elemi eseménynek nevezzük egy kísérlet egy lehetséges kimenetelét (jele:  $\omega$ ). Az összes lehetséges elemi eseményből álló halmaz az eseménytér (ennek jele;  $\Omega = \{\omega\}$ ). Egy eseménynek az eseménytér egy részhalmazát nevezzük ( $A \subseteq \Omega$ ), a kísérlet lefolytatása után akkor következik be, ha olyan elemi esemény következik be, amely eleme A-nak. A vizsgált események részhalmazát  $\mathcal{A}$ -val jelöljük ( $\Omega$  részhalmazából áll).

Minden egyes eseményhez hozzárendelhetünk egy  $P(A)$  valószínűséget; egy A esemény tapasztalati valószínűsége azt adja meg, hogy a kísérletek milyen hányadában következik be. Kolmogorov-féle valószínűségi mezőnek nevezzük az  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  hármast.

Valószínűségi változónak a  $\xi: \omega \rightarrow \mathbb{R}$  leképezést nevezzük (vagyis egy olyan leképezést, amely egy-egy elemi eseményhez egy-egy valós számot rendel). Egy valószínűségi változóról a legtöbb információt az eloszlásfüggvény szolgáltatja, ennek definíciója:

$$F(x) = P(\{\omega : \xi(\omega) < x\}) \quad (2.1)$$

Az eloszlásfüggvény megmondja, hogy a valószínűségi változó milyen valószínűséggel lesz kisebb a megadott korlátnál. Segítségével azt is kiszámolhatjuk, hogy  $\xi$  értéke milyen valószínűséggel esik bele egy tetszőleges  $[a, b)$  intervallumba:

$$P(\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\}) = F(b) - F(a) \quad (2.2)$$

Kétféle valószínűségi változót különböztetünk meg: diszkrét és folytonos (eloszlású) valószínűségi változót. A diszkrét valószínűségi változó legfeljebb megszámlálhatóan végtelen értéket vehet fel, vagyis értékei véges vagy végtelen sorozatba rendezhetők. A diszkrét valószínűségi változó jellemzéseként megadhatjuk, hogy lehetséges értékeit milyen valószínűséggel veszi fel, vagyis az  $x_k$  értékeket és a  $p_k = P(\{\omega : \xi(\omega) = x_k\})$  valószínűségeket. A  $p_k$  valószínűségekre igaz, hogy összegük egyet ad:

$$\sum_k p_k = 1 \quad (2.3)$$

A folytonos valószínűségi változó fogalmát hétköznapi módon úgy fogalmazzuk meg, hogy értékei folytonosan kitöltenek egy intervallumot. Ha egy  $\xi$  valószínűségi változó folytonos, akkor az eloszlásfüggvény a következő alakban írható:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x') dx' \quad (2.4)$$

Az  $p(x)$  függvényt a  $\xi$  valószínűségi változó sűrűségfüggvényének nevezzük, melyre igaz a következő:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1, \quad p(x) \geq 0 \quad (2.5)$$

Annak valószínűségét, hogy egy  $\xi$  folytonos valószínűségi változó egy  $[a, b)$  intervallumba esik, a következő integrállal számolhatjuk ki:

$$P(\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\}) = \int_a^b p(x) dx \quad (2.6)$$

A  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  valószínűségi változókat teljesen függetlennek nevezzük, ha:

$$P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1) \cdot \dots \cdot P(\xi_n < x_n) \quad (2.7)$$

$$F(x_1, \dots, x_n) = F(x_1) \cdot \dots \cdot F(x_n) \quad (2.8)$$

## 2.1.2. Valószínűségi változók várható értéke és szórása

Egy valószínűségi változó fontos tulajdonsága a várható értéke. Diszkrét valószínűségi változó esetén a következő összeget értjük a várható értékén:

$$E(\xi) = \sum_i x_i p_i \quad (2.9)$$

feltéve, hogy a sor abszolút konvergens, vagyis:

$$\sum_i |x_i| p_i < \infty \quad (2.10)$$

Folytonos,  $p(x)$  sűrűségfüggvényű valószínűségi változó esetén a következő integrál adja meg a várható értéket:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx \quad (2.11)$$

$$\text{ha } \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot p(x) dx < \infty \quad (2.12)$$

A várható érték megadja, hogy mely szint körül ingadoznak az értékek, az ingadozás nagyságáról a szórás ad információt, ennek definíciója:

$$D(\xi) = \sqrt{E\left(\left(\xi - E(\xi)\right)^2\right)} \quad (2.13)$$

Ha több valószínűségi változónk van, összegük várható értékére mindig igaz:

$$E(\xi_1 + \dots + \xi_n) = E(\xi_1) + \dots + E(\xi_n) \quad (2.14)$$

Ha a valószínűségi változók függetlenek, akkor szorzatuk várható értékére igaz a következő összefüggés:

$$E(\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n) = E(\xi_1) \cdot \dots \cdot E(\xi_n) \quad (2.15)$$

Ha  $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$  valószínűségi változók páronként függetlenek, és léteznek szórásaik, akkor:

$$D^2(\xi_1 + \dots + \xi_n) = D^2(\xi_1) + \dots + D^2(\xi_n) \quad (2.16)$$



Két valószínűségi változó esetén ( $\xi$  és  $\eta$ ) a következőképp definiálhatjuk kovarianciájukat:

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E(\xi)) \cdot (\eta - E(\eta))) \quad (2.17)$$

korrelációjuk definíciója pedig a következő:

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{D(\xi)D(\eta)} \quad (2.18)$$

Független valószínűségi változók esetén mindkettő nulla, vagyis a valószínűségi változók korrelálatlanok (fordítva nem mindig igaz).

### 2.1.3. Nevezetes valószínűségeloszlások

Ebben a fejezetben néhány számunkra fontos valószínűségeloszlást és ezek tulajdonságait írom le.

#### **Geometriai eloszlás**

$\xi$  (diszkrét valószínűségi változó) geometriai eloszlású  $p$  paraméterrel, ha:

$$P(\xi = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p \quad (2.19)$$

Kísérleti előállítása: egy kísérletet addig ismételgetünk, amíg a  $p$  valószínűségű esemény bekövetkezik. A  $\xi$  a szükséges kísérletek száma. A valószínűségi változó várható értéke és a szórása:

$$E(\xi) = \frac{1}{p}, \quad D^2(\xi) = \frac{\sqrt{1-p}}{p} \quad (2.20)$$

#### **Normális (vagy Gauss) eloszlás**

Ez az egyik leggyakrabban előforduló eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvénye:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.21)$$

Várható értéke és szórása:

$$E(\xi) = \mu, \quad D^2(\xi) = \sigma^2 \quad (2.22)$$

## Egyenletes eloszlás

$\xi$  egyenletes eloszlású az  $(a, b)$  intervallumon, ha sűrűségfüggvénye:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b \\ 0, & \text{különbén} \end{cases} \quad (2.23)$$

Várható értéke és szórása:

$$E(\xi) = \frac{a+b}{2}, \quad D^2(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (2.24)$$

## Centrális határeloszlás tétel

Egy makroszkopikus jelenség fluktuációja általában sok elemi folyamat fluktuációjának összegeként keletkezik, az így keletkező véletlenszerű folyamatról árul el egy fontos információt a centrális határeloszlás tétel:

Tegyük fel hogy  $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$  teljesen független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyeknek létezik szórása. Ekkor, ha  $n \rightarrow \infty$ , összegük normális eloszlású lesz, függetlenül a korábbi eloszlásfüggvénytől.

## 2.2. Véletlen folyamatok időbeli tulajdonságainak leírása

A sztochasztikus folyamatokat két csoportra oszthatjuk attól függően, hogy statisztikai jellemzőik függenek-e az időtől, mint paramétertől.

Egy sztochasztikus folyamatot nemstacionáriusnak nevezünk, ha a fellépő valószínűségi változók statisztikai tulajdonságai (pl. az eloszlásfüggvény) függenek az időtől. Ellenkező esetben a folyamatot stacionáriusnak nevezünk. Egy folyamatot erősen stacionáriusnak nevezünk, ha a hozzá rendelhető statisztikai jellemzők mindegyike független az időtől.

Egy folyamatot gyengén stacionáriusnak nevezünk akkor, ha első és másodrendű sűrűségfüggvényei függetlenek az időtől. Ez a fogalom igen fontos a gyakorlatban, mivel ezeket a tulajdonságokat könnyebb ellenőrizni, és sokszor elegendőek is a szükséges vizsgálatokhoz.

A gyakorlatban általában nem áll elő annyi független kísérlet, amely a statisztikai jellemzőket sokaság szerinti várható értékek segítségével adhatjuk meg, ezért célszerű megvizsgálni, hogy az adott folyamat vajon ergodikus-e, ekkor ugyanis elegendő az időátlagok számolása. Vagyis a következőképp definiált időátlag:

$$\langle U(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U(t) dt \quad (2.25)$$

megegyezik a sokaságátlaggal, tehát igaz:

$$E(U(t)) = \langle U(t) \rangle \quad (2.26)$$

Ahhoz, hogy egy folyamat ergodikus legyen, szükséges, de nem elegendő feltétel, hogy erősen stacionárius legyen.

Egy sztochasztikus folyamat időbeli tulajdonságairól fontos adatokat árul el annak autókorreláció függvénye, melynek definíciója:

$$R_{xx}(t, t + \tau) = E(x(t) \cdot x(t + \tau)) \quad (2.27)$$

Ez a függvény azt adja meg, hogy egy  $\tau$  idejű eltolás esetén a jel mennyire hasonlít önmagára. Ha egy jel esetén a  $t + \tau$  időpillanatban felvett értéke független attól, hogy milyen értéket vett fel a  $t$  pillanatban, akkor a folyamat korrelálatlan, ekkor az autókorreláció függvény minden  $\tau \neq 0$  esetre nulla,  $\tau = 0$  esetén pedig a jel várható értékének négyzetét adja. Periodikus jelek esetén az autókorreláció függvény is periodikus, periódusideje megegyezik a jel periódusidejével. Ergodikus függvényekre az autókorreláció függvényt a következőképp is számolhatjuk:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt \quad (2.28)$$

Hasonlóan vezethetjük be a keresztkorreláció függvényt, amely két jel közötti kapcsolat jellemzésére szolgál:

$$R_{xy}(t, t + \tau) = E(x(t) \cdot y(t + \tau)) \quad (2.29)$$

ergodikus jelenségekre pedig:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot y(t + \tau) dt \quad (2.30)$$

A keresztkorreláció függvény segítségével megállapítható, hogy két sztochasztikus folyamat függ-e egymástól, és hogy ez a kapcsolat milyen időeltolódással jelentkezik.

### 2.3. Sztochasztikus folyamatok frekvenciatartománybeli leírása

Sok gyakorlati probléma esetén fontos, ha a sztochasztikus folyamatot frekvenciatartományban is jellemezni tudjuk. Erre általában a teljesítménysűrűség-függvényt használjuk, mely közvetlenül megadja, hogy egy  $(f, f+df)$  frekvenciasávba mekkora teljesítmény jut. Mivel nemstacionárius folyamatok esetén a frekvenciatartománybeli reprezentáció függvénye marad az időnek, ezért többnyire csak stacionárius folyamatokra definiáljuk a teljesítménysűrűség-spektrumot, melynek definíciója:

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau} d\tau \quad (2.31)$$

Vagyis a teljesítménysűrűség-spektrum az autókorreláció függvény Fourier transzformáltja. Az így definiált mennyiség a kétoldalas teljesítménysűrűség-spektrum, helyette sűrűbben használjuk az egyoldalas teljesítménysűrűség-spektrumot, amely nem tartalmaz negatív frekvenciákat, és a következőképp kapjuk meg:

$$S(f) = \begin{cases} 2 \cdot S_{xx}(f) & , \text{ ha } f \in [0, \infty) \\ S_{xx}(f) & , \text{ ha } f = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

Sokszor használhatjuk a jelek jellemzésére az amplitúdóspektrumot is, ennek definíciója:

$$F_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt \quad (2.33)$$

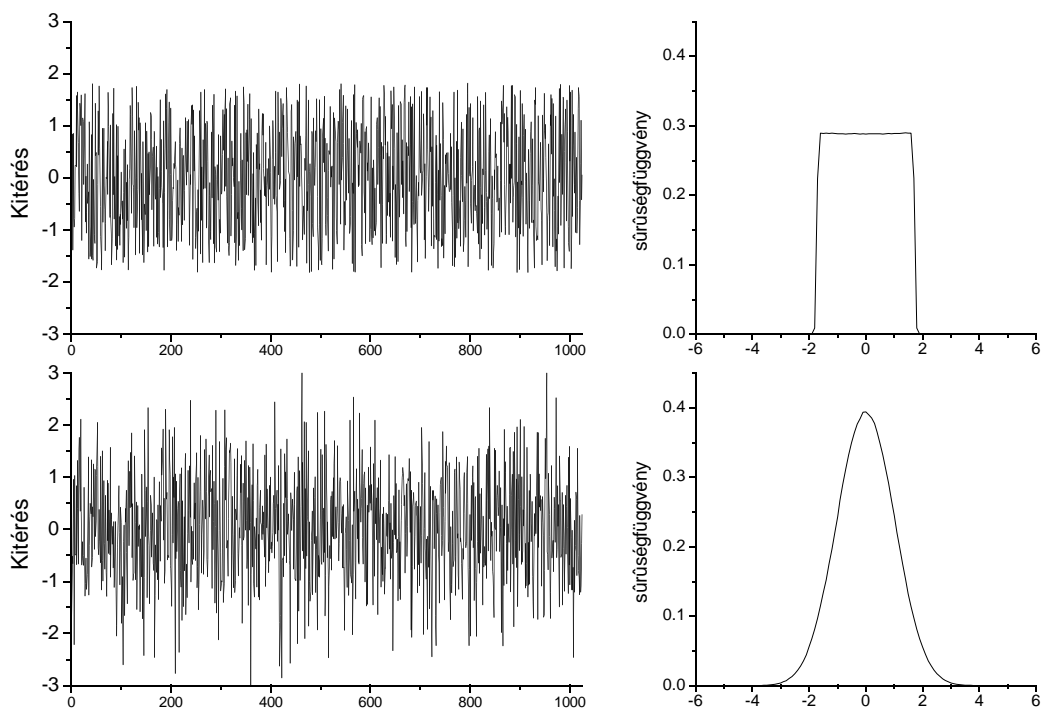
$F_x$  segítségével a teljesítménysűrűség spektrum:

$$S_{xx}(f) = F_x(f) \cdot \bar{F}_x(f) = |F_x(f)|^2 \quad (2.34)$$

## 2.4. Zajok osztályozása

A zajokat különféle tulajdonságaik alapján különböztethetjük meg. Egyik fontos jellemző a zaj eloszlása, vagyis a sűrűségfüggvénye.

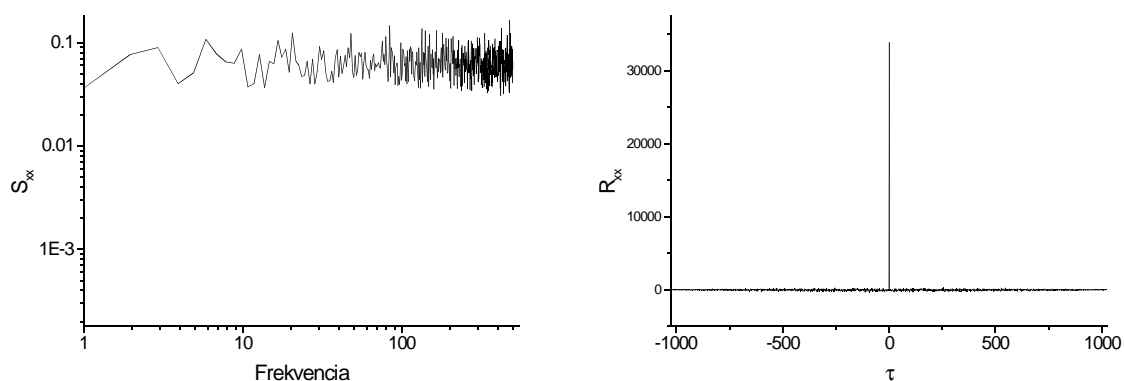
A legegyszerűbb eloszlás az egyenletes eloszlás, ekkor a zaj értékei egyenletesen kitöltöttek egy intervallumot. Ennél azonban a természetben sokkal gyakrabban fordulnak elő a normális eloszlású véletlen jelenségek. Ez a jelenség annak köszönhető, hogy egy makroszkopikus mennyiség fluktuációja általában igen sok, egymástól (részben) független elemi fluktuáció szuperpozíciójaként áll elő, a centrális határeloszlás tétel alapján ilyenkor, függetlenül azok eredeti eloszlásától, az összeg eloszlása a normális eloszláshoz közelít.



2.1. ábra Egyenletes és normális eloszlású korrelálatlan véletlen jel összehasonlítása

A 2.1. ábrán egy normális és egy egyenletes eloszlású korrelálatlan véletlen jelet (fehér zajt) hasonlítottunk össze.

További fontos szempont a véletlen jelenség teljesítménysűrűség-spektruma. Fehér zajnak nevezzük azt a zajt, melynek teljesítménysűrűsége független a frekvenciától, vagyis teljesítménysűrűség-spektruma a teljes frekvenciatartományra konstans. A valóságban mindig csak bizonyos határok között igaz a konstans teljesítménysűrűség. Fehér zaj esetén nincs korreláció az egymást követő zajértékek között, így  $R_{xx}=\delta(\tau)$ . Ilyen típusú zaj többek közt az ellenállások termikus zaja, vagy a diódákban fellépő zaj. Amennyiben egy zaj spektrumát megmérjük, általában egy szintén zajos görbét kapunk, és csak megfelelő átlagolás után keletkezik egy viszonylag szép spektrum.



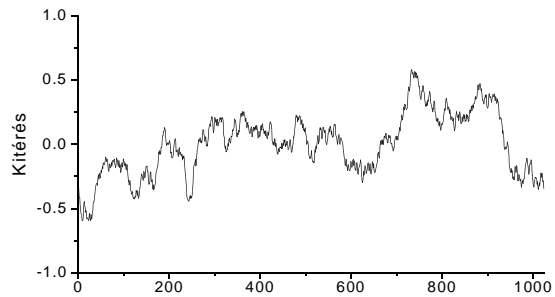
2.2. ábra: A fehér zaj spektruma (10 átlag esetén) és autókorrreláció-függvénye

Amennyiben a teljesítménysűrűség-spektrum nem egyenletes, akkor színes zajokról beszélünk. A színes zajok egy igen fontos részhalmaza azoké, melyekben a teljesítménysűrűség-spektrum a következő mintát követi:

$$S(f) \propto \frac{1}{f^\alpha} \quad (2.35)$$

( $\alpha$  általában 0 és 2 között változik). Az  $\alpha = 0$  eset a fehér zajnak felel meg. Az  $\alpha = 2$  pl. a Brown mozgásnak felel meg, és elég gyakran előfordul, ha egy mennyiség egy másik mennyiség integráltja. Az  $1/f^2$  zaj egy erősen korrelált zajtípus; nem stacionárius, divergens, így nem is ergodikus.

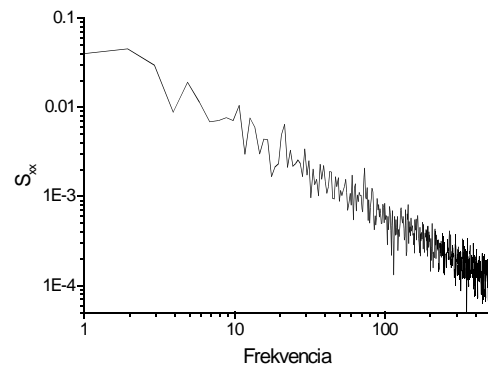
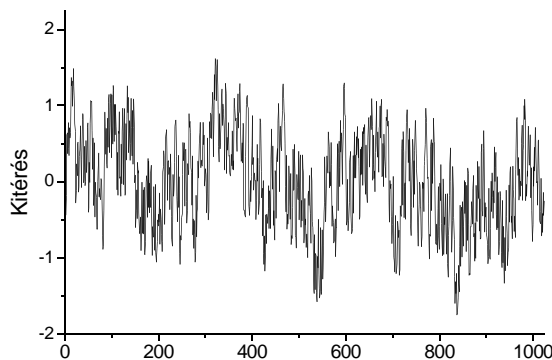
Az  $1/f$  zaj az  $\alpha = 1$  esetnek felel meg (általában ide értik még az  $\alpha \in (0.8, 1.2)$  eseteket is). Igen sok helyen fordul elő a természetben (többek közt félvezetőkben, biológiai rendszerekben, vagy akár a gazdaságban is), mégsem találtak még rá



2.3. ábra: Példa a  $1/f^2$  zajra

megfelelő, általánosan elfogadható modellt. A zaj fraktálszerű tulajdonságokkal is rendelkezik, vagyis ha kinagyítjuk egy részletét, az hasonlítani fog az egész zajra (pl. ha egy  $1/f$  zajt kétszer olyan gyorsan játszunk le egy magnón, ugyanolyannak fogjuk hallani).

A természetben előforduló  $1/f$  zajok mindig sávkorlátozottak (különben összenergiájuk végtelen lenne), fehér zaj esetén csak felső határfrekvencia, míg  $1/f^2$  zaj esetén csak az alsó határfrekvencia kell véges legyen, hogy az összteljesítmény véges legyen.

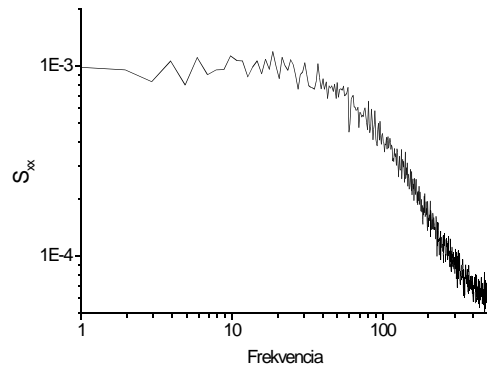


2.4. ábra: Az  $1/f$  zaj, és teljesítménysűrűség-spektruma

Megemlítem még a Lorentzi zajokat is, ilyen tulajdonságúak pl. a Poisson folyamatok. Jellemző rájuk, hogy autókorreláció-függvényük exponenciális lecsengésű, teljesítménysűrűség-spektrumuk pedig a következő alakú:

$$S(f) \propto \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} \quad (2.36)$$

Egy sztochasztikus jelenséget jellemezhetjük, hogy vajon Markov-folyamat-e vagy nem. Ezt a tulajdonságot úgy a legkönnyebb megfogni, hogy ahhoz, hogy egy  $t_n$  pillanatban megadhassuk a jel (statisztikai) tulajdonságait, elég egy korábbi  $t_{n-1}$  időpillanatbeli értékének ismerete, a korábbi adatok nem szükségesek.



2.5. ábra: Egy konkrét Lorentzi zaj teljesítménysűrűség-spektruma

Markovi folyamat a fehér zaj (hiszen egyes értékei teljesen függetlenek a korábbi értékektől), a Brown mozgás (tipikus előállítása:  $x_n = x_{n-1} + \xi$ ), és a Lorentzi zajok is. Ugyanakkor nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal az 1/f zaj [15], ha megpróbáljuk úgy reprodukálni, hogy ezt a tulajdonságot feltételezzük, akkor egy Lorentzi zaj lesz az eredmény.

## 2.5. Jelek mérése

Az analóg jelek méréséhez ma már legtöbbször digitális technikát használunk, az adatokat pedig sokszor számítógéppel dolgozzuk fel. Ennek a módszernek elég sok előnye van, az egyik legfontosabb, hogy miután digitalizáltuk a jelet, annak minősége már nem változik, és a feldolgozás pontossága és hatékonysága messze felülmúlja az analóg módszerekkel elérhető értéket. További előny, hogy az adatok feldolgozása csak az alkalmazott szoftvertől függ, nem kell mindig új áramkört készíteni egy új feladat elvégzéséhez. Ugyanakkor fontos kérdés az, hogy milyen hibák léphetnek fel, amikor az eredeti analóg jelet számokká alakítjuk (Ez általában egy analóg-digitál konverter (A/D konverter) segítségével történik). Ekkor ugyanis egy időbeli és egy amplitúdóbeli kvantálás is fellép, aminek a hatásait tudnunk kell.



### 2.5.1. Amplitúdóbeli kvantálás

Ahhoz, hogy az analóg jelet a digitális jellé alakítsuk, mintavételeznünk kell, ennek során egyrészt az amplitúdót kaptáljuk (hiszen a digitális számábrázolás csak véges számú értéket képviselhet), másrészt időben is kaptáljuk, mivel csak véges adatmennyiséget tárolhatunk.

Az amplitúdóbeli kvantálás során óhatatlanul információvesztés lép fel. Ez azonban az esetek többségében nem jelent nagy gondot, hiszen a ma alkalmazott 8-16 bites (vagy még nagyobb) felbontás általában elegendő (gondot legfeljebb a kis változások mérése okozhat). A kvantálás hatását leginkább a kvantálási zajban lehet tetten érni, ennek nagysága csökken a felbontás növelésével. Ugyanakkor a kvantálás egy nemlinearitást is bevisz a rendszerbe, ami bizonyos esetekben (pl. ha különböző jelek vannak egymásra keverve (mint a mobil távközlésben)) káros lehet. Ilyenkor sokszor egy kevés zaj hozzákeverésével lehet az átvitelt linearizálni.

### 2.5.2. Időbeli kvantálás

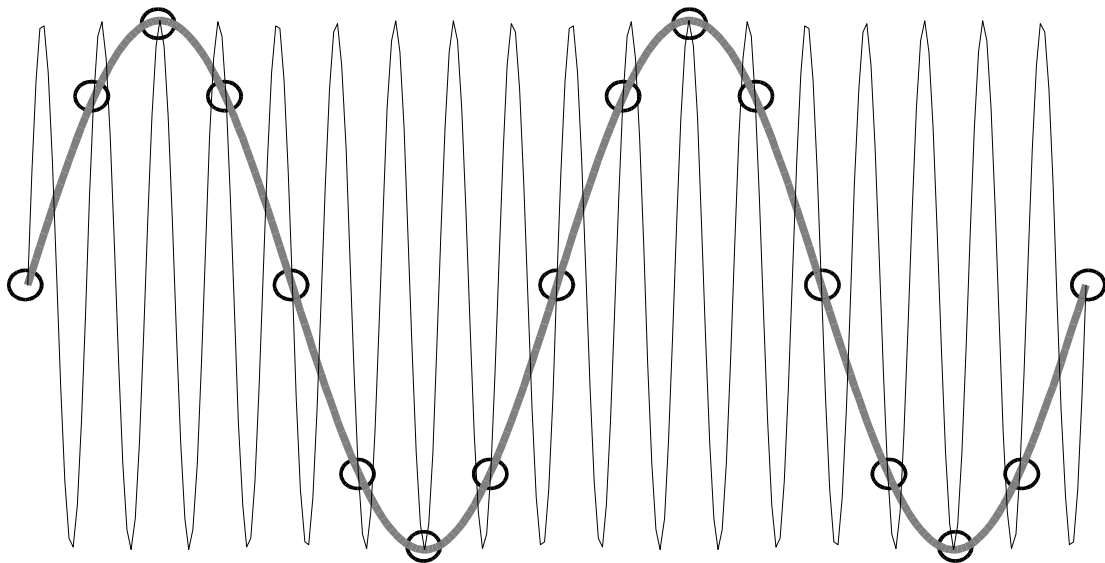
Az időfüggő analóg jel digitális mérése során bizonyos időközönként mintavételezzük a jelet. Általában szerencsés, ha az egyes mintavételek között eltelt idő azonos. Ez nem mindig lehetséges, ilyenkor a jelek kiértékelése nehezebb. Most tekintsük azt az esetet, amikor állandó frekvenciával mintavételezzük. Az időbeli kvantálás miatt sokkal kellemetlenebb hatások is felléphetnek, mint az amplitúdóbeli kvantálás esetén.

Az, hogy csak bizonyos időpontokban ismerjük a vizsgált jel alakját információvesztést okozhat. Felmerül a kérdés, hogy milyen gyakorisággal kell végeznünk a mintavételezést? Erről ad információt a mintavételi tétel, melynek teljesülése esetén a mintavételezett jelet információvesztés nélkül mintavételezhetjük, és bármikor reprodukálhatjuk.

**Mintavételi tétel:** ha a mintavételezett jelben az  $f_0$ -nál nem kisebb frekvenciájú komponensek amplitúdója nulla, akkor a jelet teljes egészében meghatározzák a  $\Delta t=1/2f_0$  időközönként mintavételezett értékei; az eredeti jelet a következő formula alapján lehet rekonstruálni:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( x(f \Delta t) \cdot \Delta t \cdot \frac{\sin\left(\pi \cdot t - \frac{k \Delta t}{\Delta t}\right)}{\pi \cdot (t - k \Delta t)} \right) \quad (2.37)$$

Amennyiben a mintavételi tételt nem tartjuk be méréskor, akkor annak komoly következményei lehetnek, amelyek meghamisíthatják méréseinket. Ekkor ugyanis a mintavételi frekvencia felénél nagyobb frekvenciájú komponensek a  $[0, f_0)$  frekvenciatartományba képeződnek le, az így megjelenő zavaró jeleket aliasing zajnak hívjuk. A jelenséget a 2.6. ábrán szemléltetem:



2.6. ábra: A mintavételi tétel sértésének szemléltetése (a körök a mintavételek helyét jelölik)

Az ábrán látható, hogy a mintavételi frekvenciánál nagyobb frekvenciájú szinuszt ugyancsak egy szinusznak mérjük, amelynek a frekvenciája azonban nem egyezik meg az eredetiével. Ugyanakkor (néhány speciális esetet leszámítva) az amplitúdója megegyezik az

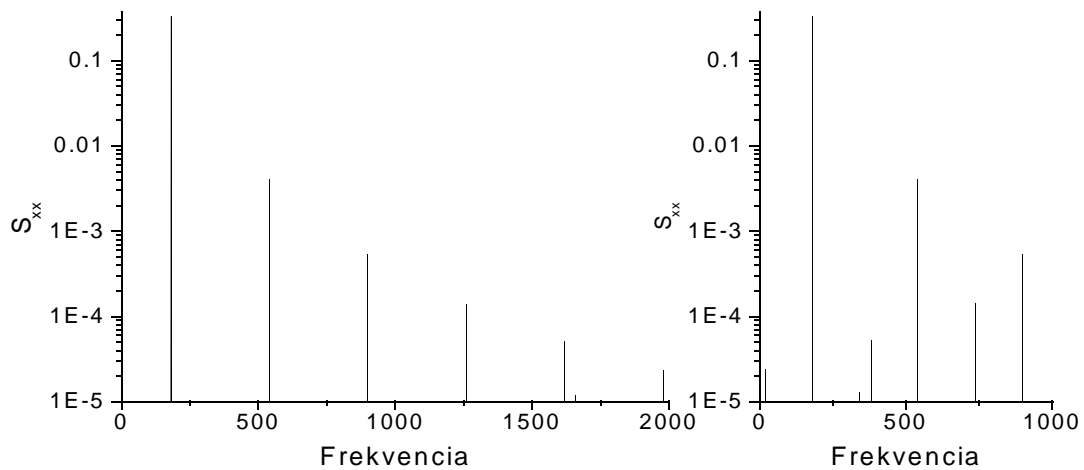
eredeti jel amplitúdójával. A frekvenciáját pedig a következő összefüggés alapján számolhatjuk ki:

$$M = \left\lfloor \frac{F_m}{F_x} \right\rfloor$$

$$F'_x = \begin{cases} F_x - M * F_m, & \text{ha } F_x \in (M * F_m, (M + 1/2) * F_m) \\ (M + 1) * F_m - F_x, & \text{ha } F_x \in ((M + 1/2) * F_m, (M + 1) * F_m) \end{cases} \quad (2.38)$$

Az aliasing zaj elkerülése érdekében a mintavételt végző A/D konverter elé mindenképp célszerű egy aluláteresztő szűrőt (mintavételi szűrőt) elhelyezni, amely a mintavételi frekvencia felénél nagyobb frekvenciájú komponenseket megfelelően csillapítja. Bizonyos esetekben a mintavételi tétel sértésével is lehet jeleket vizsgálni, hiszen ha tudjuk a mintavételezett jel tulajdonságait (pl. frekvenciáját), akkor megfelelő módszerekkel a megfelelő mérési feladatot információvesztés nélkül elvégezhetjük (így működik mintavételező oszcilloszkóp, de egyik korábbi munkámban, melyben az atomi erő mikroszkóp számára fejlesztettem ki digitális elektronikát és mérési módszereket, ugyancsak az aliasing jelenséget használtam fel [16]).

Fontos tudni, hogy a mintavételi tétel megsértése akkor is megtörténhet, ha látszólag nem is mintavételezünk, pl. numerikus szimulációk esetén. Egy a számítógép memóriájában előállított négyszögjel egyáltalán nem különbözik attól, amit a mintavételi tétel megsértésével mérünk; és komoly hátrány, hogy amennyiben a jelet már digitalizáltuk, utólag már általában nincs lehetőség az aliasing zaj kiküszöbölésére.



2.7. ábra: A mintavételi tétel sértésének szemléltetése numerikus szimuláció esetén. Mindét ábrán egy 180 Hz-es háromszögjel spektruma látható, 4000 Hz-es és 2000 Hz-es mintavételi frekvenciával

### 2.5.3. A mintavételezett jel spektrális analízise

A gyakorlatban a mintavételezés során csak véges adatsort tudunk mérni, vagyis az  $x(t)$  jelből  $N$  darab  $x_j$  adatpontunk lesz. A véges időnek köszönhetően a mért jel spektruma is csak diszkrét pontokban lesz értelmezhető. A spektrum számolására ekkor a diszkrét Fourier transzformációt használhatjuk (DFT), vagyis az amplitúdó-spektrumot a következőképp kapjuk meg:

$$f_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot j \cdot \frac{k}{N}}, \quad x_j = x(j \cdot \Delta t) \quad (2.39)$$

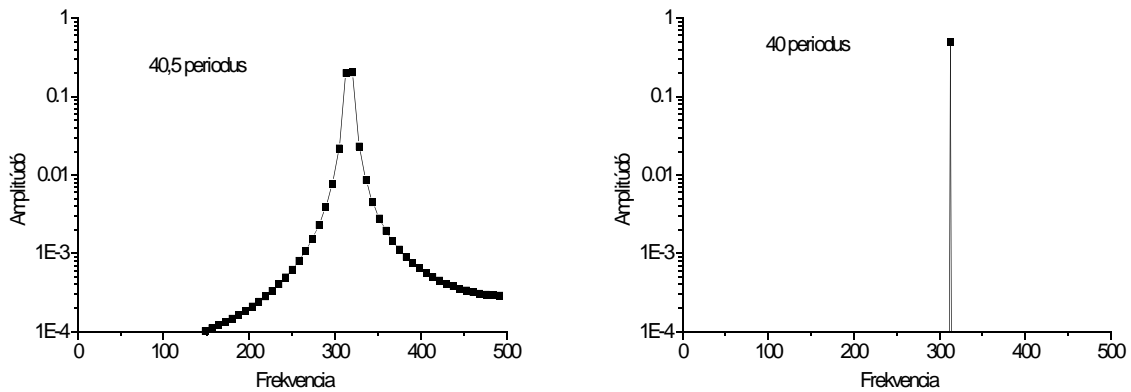
Ugyanezt a számolást végzi el a gyors Fourier transzformáció (FFT) is, de a számolási igénye jóval kisebb mint a DFT esetén, az egyetlen megkötés, hogy a minta hossza 2 egész számú hatványa kell legyen. Bizonyos esetekben, ha fontos a számolási sebesség és elég hosszúak a minták, hasznos lehet a jelek numerikus újramintavételezése is, hogy ezzel az adatsor hossza kettő hatványa lehessen; amennyiben a mintavételezést nem egyenletes időközönként végeztük, akkor is használható az újramintavételezés módszere (pl. a szívritmus mérése esetén [17]).

A véges adathossz meghatározza a frekvenciafelbontást, ennek értéke:

$$\Delta f = \frac{1}{T} \quad (2.40)$$

ahol T a mérés ideje.

A véges adathossznak további kellemetlen következménye is lehet. Ez akkor jelentkezik, ha egy jelből nem egész számú periódust mérünk, ekkor ugyanis fellép a spektrális szétfolyás jelensége, vagyis tiszta szinuszos jelnél sem egy éles spektrumvonalat látunk, hanem egy kiszélesedett csúcsot.



2.8. ábra: Spektrális szétfolyás ha nem egész számú periódust mérünk a jelből

Ha a jel frekvenciáját előre nem ismerjük, a szétfolyás mértékét ablakfüggvények használatával csökkenthetjük: ezzel a függvénnyel szorozzuk be a mintavételezett adatsort. E szorzat hatása a frekvenciatartományban egy konvolúció felel meg, vagyis az egyes spektrumvonalak helyén az ablakfüggvény spektrumának megfelelő alak jelenik meg. Amennyiben nem használunk külön ablakfüggvényt az egy téglalap alakú ablakfüggvénynek felel meg.

Különbféle ablakfüggvényeket használhatunk attól függően, hogy nagy felbontást, vagy pontos amplitúdó-detektálást kívánunk-e. Viszont nem kell ablakfüggvényt használnunk, ha pontosan egész számú periódust mérünk egy jelből, továbbá zajok esetén is kerülni szoktuk a használatukat.

### 3. Numerikus szimulációk

A tudományos kutatásokban egyre inkább elterjednek a számítógépes szimulációk. Segítségükkel olyan jelenségek is vizsgálhatók, amelyek egyébként vagy nehezen, vagy egyáltalán nem. Pl. atomerőművek működését szimulálhatjuk, vagy galaxisok és fekete lyukak modellezését végezhetjük el. Más területeken is elég széleskörűen alkalmazhatjuk a numerikus szimulációkat, hiszen sokszor könnyebb és olcsóbb megvalósítani, mintha méréseket végeznénk. Továbbá hasznos, hogy segítségükkel közvetlenül tesztelhetjük modelljeink helyességét.

A numerikus szimulációk legfőbb előnye nagyfokú rugalmasságuk, a megvalósított modelleket az elkészített programok határozzák meg. A szimuláció összes paraméterét kézben lehet tartani, pontos és zajmentes számolásokat lehet végezni, az egyes szimulációkat pedig teljes egészében reprodukálni lehet.

A numerikus szimulációknak persze vannak hátrányai és veszélyei is. Az egyik legfontosabb, hogy a vizsgált adatok mind térben mind időben diszkrétnek, ezért vigyázni kell a mintavételi tétel betartására, és a pontatlanságok kézben tartására. Az egyes műveletek is csökkenthetik a pontosságot, differenciálegyenletek numerikus megoldásánál pedig akár teljesen hibás eredmények is kijöhetnek, ha nem megfelelően választjuk meg az algoritmust és a lépésközt. A hibák halmozódhatnak is, ezért néha a megfelelő pontosság elérése túlságosan is számításigényes, bár szerencsére az egyre gyorsabb gépek ezt a problémát csökkentik.

A legnagyobb veszélyt az okozza, hogy mi egy modell alapján végezzük a szimulációkat, ha ez a modell hibás, akkor a megoldások sem fogják tükrözni a valóságot. Ezért fontos, hogy a szimulációk eredményét mindig összevessük valódi mérésekkel, vagy megfigyelésekkel.

### 3.1. Az alkalmazott programozási környezetek

Munkám során két programozási környezetet is használtam a szimulációkhoz és adatfeldolgozáshoz szükséges programok elkészítéséhez. A legtöbb számolást Java nyelven írt programokkal végeztem. E nyelv előnye, hogy elég egyszerűen lehet használni (pl. a C nyelvvel szemben, nem kell foglalkozni a memória lefoglalásával), továbbá bonyolult szerkezetek is viszonylag könnyedén létrehozhatók (ezt támogatja, hogy a nyelv objektumorientált). Az elkészített programok platformfüggetlenek (az alkalmazások tulajdonképp egy virtuális gépen futnak), ezért a szimulációk eredménye mindig ugyanaz lesz, függetlenül a gép típusától vagy az operációs rendszertől. Az újabb virtuális gépeknek köszönhetően a programok sebességben sem maradnak el túlságosan a C vagy C++ nyelven megírt programok mögött. A programozási környezetbe olyan elemek is be vannak építve, melyek segítségével viszonylag könnyedén lehet elosztott (több számítógépen egyszerre futó) számításokat végezni.

Az adatok elemzését (és bizonyos számolásokat is) LabVIEW környezetben megírt programokkal végeztem. E környezet legfőbb előnye, hogy kifejezetten tudományos és mérnöki alkalmazásokra fejlesztették ki, vagyis igen fejlett és tesztelt analízis eszközök állnak rendelkezésre (komplex számok, Fourier analízis, görbék illesztése, grafikus ábrázolások). Ehhez pedig egy könnyen kezelhető grafikus nyelv tartozik, amivel még a bonyolultabb programok is egyszerűen és általában átláthatóan meg lehet írni.

A programok közötti megfelelő kommunikáció és adattárolás érdekében egy új fájl típust dolgoztam ki, amely az egyes "mérések" összes paraméterét tartalmazza. Az alkalmazott rendszer fa struktúrában tárolja az adatokat, többek között tárolni tud egész és lebegőpontos számokat, szövegeket és mátrixokat is. A módszer előnye, hogy az egyes fájlokat könnyen lehet új adatokkal bővíteni, mégpedig úgy, hogy a korábban megírt programok gond nélkül olvasni tudják a módosított fájlokat is. A fájlok kezelésére mind Java nyelvem mind LabVIEW környezetben megírtam a megfelelő könyvtárakat.

## 4. Mérések [18]

Ahhoz, hogy numerikus szimulációink eredményeinek helyességéről meggyőződhesünk valódi méréseket is kell végeznünk. A valódi mérések során sok hibát kiküszöbölhetünk, amelyek numerikus szimulációknál felléphetnek (pl. nem megfelelő modell, vagy nem megfelelő időbeosztás a numerikus differenciálegyenletek megoldásánál). A valódi mérések hátrányai közé tartoznak, hogy mindig költségesebbek, mint a numerikus szimulációk, általában kevésbé pontosak és zajosabbak, és többnyire kevésbé reprodukálhatóak az eredmények.

Mi elektronikus rendszereket használtunk méréseink során, ugyanis ezek vizsgálhatók a legegyszerűbben, az eredmények pedig könnyen a számítógépek számára használható adatokká alakíthatók, így az adatok feldolgozása és értelmezése már nem nehezebb, mint a numerikus szimulációk esetén (sok esetben ugyanaz a szoftver használható).

### 4.1. DAS 1414

Méréseink során az elektromos jelek mérésére egy DAS 1414 műszert használtunk.

A műszer fő feladata a valódi jelek minél sokoldalúbb és hatékonyabb mérése, digitalizálása és előfeldolgozása, valós jelek előállítás, és a számítógéppel való kommunikáció.

A műszer moduláris felépítésű, különböző célú kártyákat tartalmaz a feladatok elvégzésére. Az egyik legfontosabb a DSP (digitális jelprocesszor) kártya, ez végzi el a rendszer vezérlését, és a számítógéppel való kapcsolattartást. A DSP valójában egy mikroszámítógép, amely időfüggő digitális jelek gyors, valós idejű feldolgozására van optimalizálva. Bár az órajel frekvenciája nem túlságosan nagy, de utasításai nagy része egy órajel-ciklus alatt végrehajtnak. A processzor módosított Harvard architektúrájú, ami azt jelenti, hogy külön van kezelve a program és az adatmemória, e megoldás egyik előnye, hogy egyszerre lehet hozzáférni mindkét memóriatömbhöz, ami gyors parancsvégrehajtást



tesz lehetővé. Működés közben a DSP programja a számítógép parancsait hajtja végre. Azt, hogy a DAS pontosan milyen feladatokat tud végrehajtani, azt a benne és a számítógépen futó szoftver határozza meg, amely könnyen módosítható, így egy igen rugalmas rendszert kapunk, amely nagyon sokféle mérési feladatot elláthat.

A DAS 1414 14 bites A/D és D/A konvertereket is tartalmaz, ezek végzik el az analóg jelek digitális jelekké való konvertálását, és a digitális jelek analóg jellé konvertálását. A feladattól függően különféle felbontású és mintavételi sebességű kártyákat használhatunk. A DAS 1414 blokkvázlatát és fontosabb paramétereit a függelékben közlöm.

## 4.2. Merevlemez illesztése

A számítógéppel való kommunikáció túlságosan lassú ahhoz, hogy a folyamatosan mért adatokat egyből a gépre vihessük, e miatt csak viszonylag kis adatsorokat tudtunk mérni. E probléma megoldása érdekében egy standard IDE merevlemezes interfészt valósítottunk meg a nagyobb adathalmazok átmeneti tárolására. A módszer egyik előnye, hogy az így eltárolt adatokat közvetlenül tudja olvasni a PC (a merevlemez PC-be való áthelyezésével), nincs szükség köztes adatátvitelre.

A merevlemez hozzáillesztése két részből áll: egyrészt a megfelelő fizikai kontaktust kell megteremteni. Ez viszonylag egyszerű, mivel a merevlemez egy hagyományos perifériához hasonlóan lehet kezelni, mindössze a cím, adat és vezérlőjeleket kell összekötni a DAS rendszerével.

Nagyobb gondot okoz a megfelelő szoftver elkészítése. Az egyszerűség kedvéért nem használtunk fájlrendszert a merevlemezen, egy, a számítógép által létrehozott, fájlba közvetlenül írtuk az adatokat. A merevlemez kezeléséhez szükséges összes rutint a DSP-ben valósítottuk meg.

Többek közt a következő fő funkciókat valósítottuk meg:

- Merevlemez inicializálása (az inicializálás során automatikusan megállapítja azt is, hogy milyen címzési módban (CHS vagy LBA) használható a merevlemez)
- Szektorok írása
- Szektorok olvasása
- Megadott tartalmú szektor keresése a merevlemezen (ezt akkor használhatjuk, ha pl. egy fájl elejét keressük)

A DSP-ben lévő program képes a folyamatosan mintavételezett merevlemezre írására is. Mivel a merevlemezre való írási sebesség erősen ingadozik, ezért az adatokat ideiglenesen a DSP memóriájában kell tárolni. Két adattömböt használunk a művelet során, miközben az egyiket a mérési adatokkal feltöltjük, közben a másikkól a merevlemezre írjuk az eredményt (a program blokkvázlata a függelékben található meg). Ez a módszer az általunk alkalmazott merevlemez esetén 200 kHz-es mintavételi frekvenciáig megbízható (nagyobb mintavételi frekvencia esetén megeshet, hogy betelik a memória, mielőtt a korábbi adatokat kiírtuk volna a merevlemezre).

Fordítva is működhet a rendszer, vagyis a merevlemezen eltárolt adatokat folyamatosan elektromos jelekké alakíthatjuk.

A sztochasztikus rezonanciával kapcsolatos mérések támogatására [26] még egy üzemmódot dolgoztunk ki. Ebben a merevlemezről beolvasott zajhoz egy szinuszt keverhetünk, a mintavételezett jelet pedig kiírjuk a fájlba. Ezt egy és két merevlemez esetén is használhatjuk, egy lemez használata esetén az eredeti adatokat felülírjuk a fájlban.

Az általunk vizsgált merevlemez esetén 70 kHz-es mintavételi frekvenciáig volt működőképes a rendszer. Két merevlemez esetén a sebesség a leglassúbb lemeztől függ.

## 5. Zajgenerátorok

Méréseinkhez különféle zajgenerátorokat alkalmaztunk. Ebben a fejezetben ezek alapelvéről és tulajdonságairól számolok be.

### 5.1. Numerikus zajgenerátorok megvalósítása

#### 5.1.1. Fehér zaj előállítása

A fehér zaj numerikus reprezentációja véletlen számok sorozatából áll. Mivel a számítógépek alapvetően determinisztikusan működnek, ezért valódi véletlen számok generálására nem alkalmasak (bizonyos speciális esetekben alkalmaznak fizikai elven működő, valódi véletlenszámgenerátorokat, ezek azonban elég ritkák, és drágák). A számítógép nyelvén megvalósított véletlenszám-generátorok csupán véletlenszerűnek tűnő, úgynevezett pszeudo-véletlen számsorozatokat állítanak elő. Az így elkészített generátorokat különféle teszteknek vethetjük alá, hogy megfelelnek-e a kísérlethez szükséges feltételeknek (pl. egyenletes eloszlás, korrelálatlanság). A véletlenszám-generátorok általában ciklikusak, vagyis egy bizonyos elemszám után ismétlik magukat. Előnyük a pszeudo-véletlenszám-generátoroknak, hogy az általuk generált adatsor bármikor reprodukálható, így a segítségükkel végzett szimulációk is megismételhetők. Különféle módszerek terjedtek el a véletlenszámok generálására, most kettőt ismertetnék röviden.

Az egyik legegyszerűbb módszer (lineáris kongruencia [19]) a következő formulán alapul:

$$\xi_n = (m \cdot \xi_{n-1} + a) \bmod M \quad (5.1)$$

Az így megvalósított véletlenszám-generátor jósága (pl. a ciklushossz) erősen függ az alkalmazott paramétereiktől ( $m$ ,  $a$ , és  $M$ ), ezért fontos ezek megfelelő megválasztása. Ilyen véletlenszám-generátor van megvalósítva a Java programozási nyelvben, ennek

ciklushossza  $2^{48}$ , a véletlenszám-generátor konkrét megvalósítását a függelékben adom meg.

Egy másik elterjedt megvalósítás az additív véletlenszám-generátor, ez a következő összefüggés alapján képzi az egymás utáni számokat:

$$\xi_i = (\xi_{i-24} + \xi_{i-55}) \bmod M \quad (5.2)$$

$M$  általában a számítógép szóhosszának megfelelő legnagyobb szám (a tapasztalatok alapján a módszer ciklushossza  $> 2^{55}$ ).

Az előbb leírt véletlenszám-generátorok egyenletes eloszlású egész számokat képeznek. Gauss-eloszlású véletlenszámokat képezhetünk a centrális határeloszlás tétel alapján, vagyis egyenletes eloszlású véletlenszám-generátorok összegeként, ez azonban elég időigényes, helyette sokkal hatékonyabb algoritmusokat használhatunk (a Java véletlenszám-generátor által használt módszert a függelékben mutatom be (11.1. fejezet)).

### 5.1.2. $1/f^2$ zaj és a Lorentz típusú zajok generálása

Brown zajt legegyszerűbben fehér zaj integrálásával generálhatunk, vagyis a következő összefüggés alapján számolhatjuk ki az új amplitúdó értékeket:

$$x_i = x_{i-1} + \xi_i \quad (5.3)$$

$\xi$  általában egy Gauss-eloszlású véletlenszám, ugyanakkor a centrális határeloszlás-tétel következtében bármilyen eloszlás esetén, a végeredmény, megfelelő idő múlva, Gauss-eloszlású  $1/f^2$  zaj lesz. Egy speciális esete az, amikor  $\xi$  +1 és -1 értékeket vehet fel. Ezt az esetet a legkönnyebb kezelni, a legegyszerűbben végezhetők el elméleti számítások.

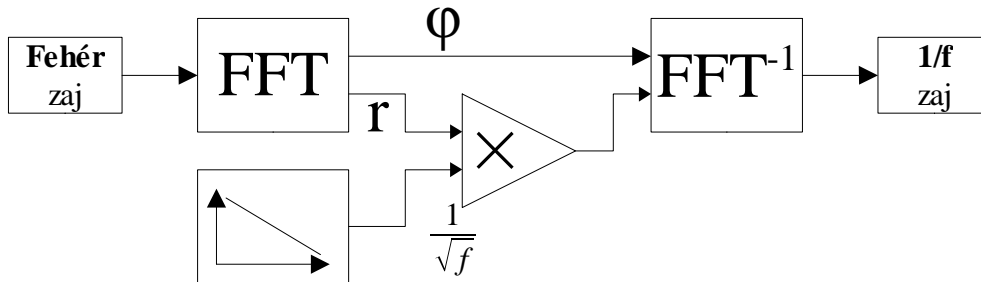
Lorentzi típusú zajokat hasonlóan lehet generálni, mint a  $1/f^2$  zajt:

$$x_i = c \cdot x_{i-1} + \xi_i \quad (5.4)$$

ahol  $c$  egy paraméter (ez határozza meg a töréspont frekvenciáját). A  $c=0$  eset a fehér zajnak felel meg, a  $c=1$  eset pedig az a  $1/f^2$  zajnak.  $1/f$  zajt viszont nem lehet előállítani e módszer segítségével, mivel az nem Markov tulajdonságú.

### 5.1.3. Zaj előállítás Fourier transzformációval

Az 1/f zaj előállítására az egyik legegyszerűbb módszer, ha egy könnyen előállítható zaj (pl. fehér zaj) spektrális összetételét megváltoztatjuk, mégpedig Fourier transzformáció segítségével. Ezt a módszert a 5.1. ábrán szemléltetném:



5.1. ábra: Fourier transzformációs 1/f zajgenerátor

A Gauss eloszlású fehér zaj amplitúdó-spektrumát igényeink szerinti átviteli függvénnyel beszorozzuk, majd a kapott spektrumot visszaalakítjuk időbeli jellé. Az átvitelt meghatározó tömb a következő alakú:

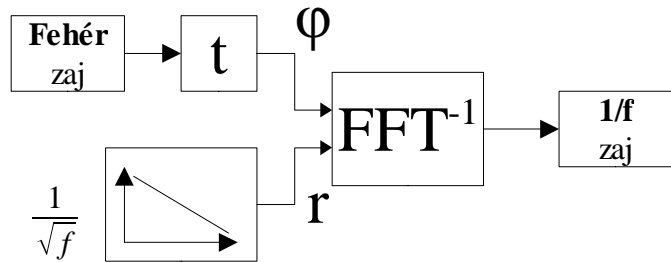
$$a_i = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ ha } i=0 \text{ vagy } i=\frac{N}{2} \\ A \cdot i^{-\frac{\alpha}{2}}, \text{ ha } i=1.. \frac{N}{2}-1 \\ A \cdot (N-i)^{-\frac{\alpha}{2}}, \text{ ha } i=1.. \frac{N}{2}-1 \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

A módszer egyik hátránya, hogy csak véges adatsorok generálhatók, e miatt nem lehet tetszőleges hosszúságú szimulációkat végezni (nem lehet ezeket a zajokat összefűzni, mivel az átmeneteknél tranziensek keletkeznek). Az adatsor hosszának növelése pedig a memóriaigény és a számítási igény növekedéséhez vezet. A módszer, hogy bármilyen spektrális eloszlású jelet létre lehet hozni.

A módszer egyszerűsítése, ha csak egy FFT-t használunk, ennek vázlatát az 5.1. ábrán látható. Ez annak felel meg, mintha véletlenszerű fázisokkal rendelkező különböző frekvenciájú szinuszokat összegeznénk a következő képlet szerint:

$$y = \sum_i (a_i * \sin(i \cdot \Delta \omega + \xi_i)) \quad (5.6)$$

Fontos megjegyezni, hogy itt viszont egyenletes eloszlású (0 és  $2\pi$ ) közötti véletlen-számokat használunk, továbbá az adatsoron a



5.2 ábra: Fáziszajos 1/f generátor

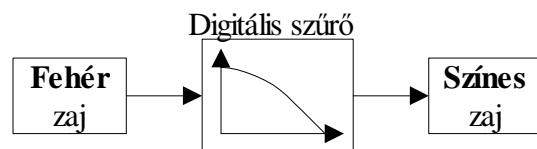
következő transzformációt kell végrehajtani:

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & \text{ha } i=0 \\ \pi, & \text{ha } i=\frac{N}{2} \\ \xi_i, & \text{ha } i=1.. \frac{N}{2}-1 \\ -\xi_{N-i}, & \text{ha } i=1.. \frac{N}{2}-1 \end{cases} \quad (5.7)$$

Bár ez a módszer csak feleannyi időt vesz igénybe, mint a korábbi, de bizonyos tulajdonságaiban erősen eltér tőle. Az egyik legszembeütőbb, hogy a spektrum átlagolás nélkül sem zajos, vagyis pontosan olyan, mint a szorzómátrix, ezáltal kevésbé realiztikus. Ez általában nem okoz gondot (sokszor még előny is), ugyanakkor előfordulhat, hogy egyes esetekben nem megfelelő eredményt szolgáltat. Az egyes minták szórása is pontosan azonos, és a középérték is pontosan nulla. Előnye, hogy nem kell Gauss eloszlású véletlenszám-generátor. Fehér zaj esetén az eredményt a centrális határeloszlás-tétel határozza meg, vagyis normális eloszlású lesz a végeredmény.

#### 5.1.4. Zaj előállítás digitális szűrővel

Az előző módszerhez hasonlóan ez is közvetlenül a zaj spektrális összetételét változtatja meg egy digitális szűrővel, a zajgenerátor blokkvázlata az 5.3. ábrán látható.



5.3. ábra: Színes zaj-generátor szűrővel

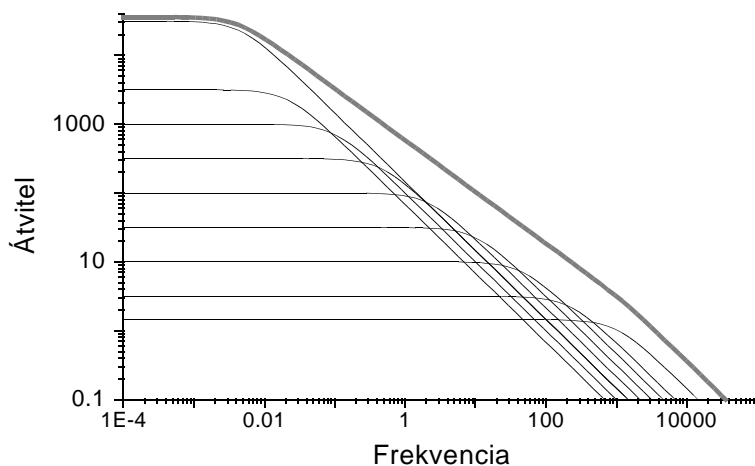
Egy digitális szűrő általános alakja:

$$y_i = c_0 \cdot x_i + c_1 \cdot x_{i-1} + \dots + c_n \cdot x_{i-n} + d_1 \cdot y_{i-1} + d_2 \cdot y_{i-2} + \dots + d_n \cdot y_{i-n} \quad (5.8)$$

A szűrő karakterisztikáját a  $c_i$  és  $d_i$  együtthatók határozzák meg. E nehezen kezelhető összefüggés helyett sokszor egyszerűbb szűrők összekapcsolásával állítjuk elő a kívánt átviteli tulajdonságokkal rendelkező szűrőt. A következő összefüggés egy elsőfokú digitális szűrőt határoz meg, ezzel hasonló átviteli függvényeket lehet elérni, mint egy analóg szűrővel.

$$y_i = c_0 \cdot x_i + c_1 \cdot x_{i-1} + d_1 \cdot y_{i-1} \quad (5.9)$$

Ilyen szűrők párhuzamos kapcsolásával  $1/f$  frekvenciamenetű szűrőt hozhatunk létre:



5.4. ábra: Szűrők párhuzamos kapcsolásával elérhető  $1/f$  zajgenerátor

A módszer előnye, hogy az adatsor hossza nem limitált, és jóval kevesebb a számolási igénye, mint a FFT-s módszernek. Ugyanakkor a frekvenciamenetet nehezebben lehet szabályozni. A ez irányban elért eredményekről a [20] munkában többet lehet olvasni.

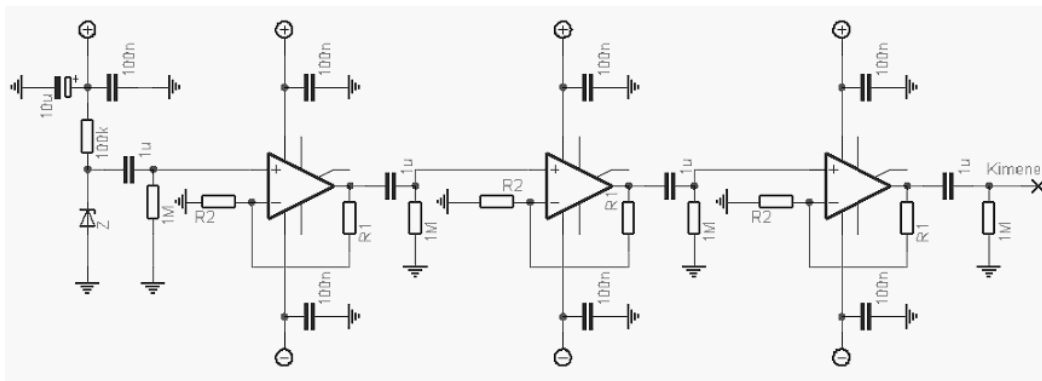
Lorentzi zajok segítségével is lehet  $1/f$  zajt előállítani, a módszer gyakorlatilag megegyezik az előző módszerrel, a különbség csak annyi, hogy elsőfokú szűrők helyett megfelelő paraméterekkel rendelkező Lorentz zajgenerátorokat kapcsolunk párhuzamosan.

## 5.2. Analóg zajgenerátorok

Analóg méréseinkhez elektromos jelet előállító zajgenerátorra van szükség. Elég sok módszerrel lehet megvalósítani ezeket, a következőkben néhányat szeretnék ismertetni. Az egyik általánosan elterjedt módszer, hogy a természetben előforduló zajokat alakítjuk valamilyen módszerrel feszültségé. Ilyen esetekben igen fontos hogy a jelenség a megfelelő spektrális összetétellel, és a megfelelő eloszlással rendelkezzen. Amennyiben nincs olyan folyamat, amely a szükséges paramétereket teljesíteni tudná, akkor más megoldásokat is igénybe kell venni a zajgenerátor megvalósításánál.

### 5.2.1. Zaj előállítása félvezetők segítségével

Fehér zajt egy ellenállás termikus zajának segítségével is előállíthatunk, leginkább azonban Zéner-diódákat és tranzisztorokat szoktunk használni, mivel ezek sokkal nagyobb amplitúdójú jelet szolgáltatnak. A megfelelő kimenő teljesítményszintet megfelelő erősítőlánccal érhetjük el. Ezek a generátorok viszonylag széles frekvenciatartományban generálnak fehér zajt.

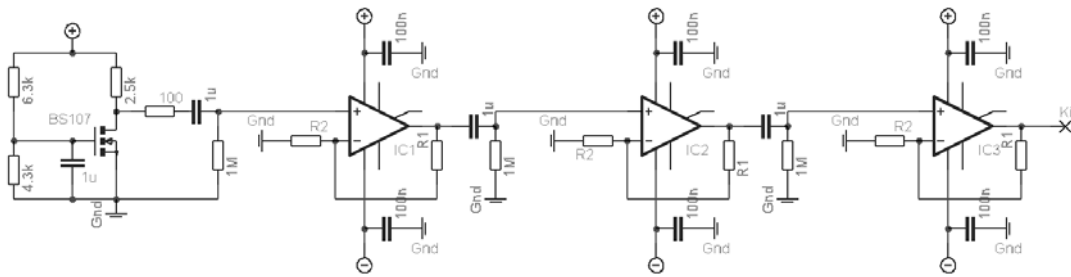


5.5. ábra: Zéner diódás fehérzaj-generátor

1/f zajt mi egy MOS-FET segítségével állíthatunk elő. Az 5.6. ábrán az általunk megvalósított zajgenerátor elvi kapcsolási rajza látható. A tranzisztor munkapontját egy feszültségosztóval állítjuk be. Ennek a megoldásnak megvan az a hátránya, hogy a pontos feszültséget nehéz beállítani, ráadásul az eredmény hőmérsékletfüggő is lehet, a

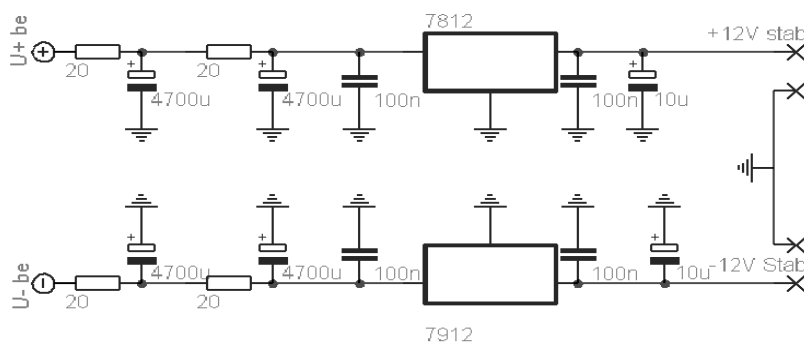


visszacsatolás hiánya viszont sok kellemetlen effektust kiküszöböl. Erősítőként egy ezerszeres erősítést megvalósító műveleti erősítőkben álló láncot használtunk.

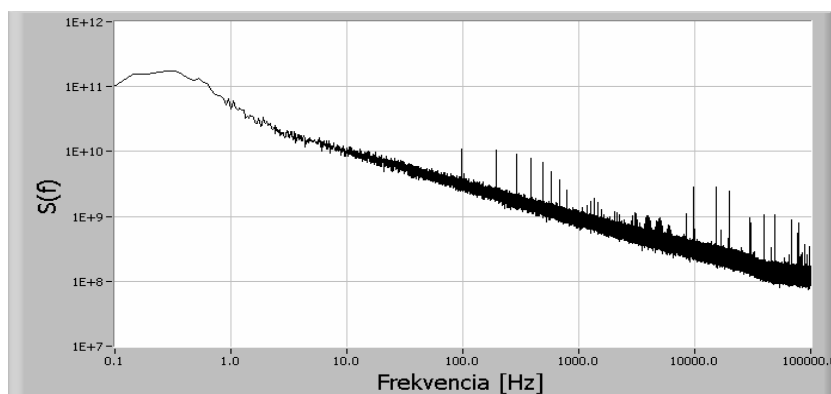


5.6. ábra: MOS-FET-es 1/f zajgenerátor

Az igen nagy összerősítés miatt fontos volt a tápfeszültség zajának minimalizálása, ezért a 5.7. ábrán látható tápegységet helyeztük el a kártyán (ez a már stabilizált feszültséget szűrte tovább), segítségével sikerült a hálózati 50 Hz és felharmonikusait is nagymértékben kiszűrni.



5.7. ábra: Az 1/f generátor tápegysége



5.8. ábra: Az 1/f zajgenerátor spektruma

Zajgenerátorunk igen kedvező tulajdonságokkal rendelkezik, a 5.8. ábrán a spektrumot láthatjuk. A zaj 1/f jellegű kb. 0,5 Hz-től egészen 20 kHz-ig, ami elég jó eredménynek

tekinthető. A spektrumban megfigyelhető zavaró csúcsok összteljesítménye elhanyagolható.

### 5.2.2. Zaj generálása analóg szűrőkkel

1/f zajt fehér zajból is előállíthatunk megfelelő szűrők segítségével. Általában sorba kapcsolt proporcionális szűrőket használunk, melyek paramétereit a megfelelő módon kell beállítani. Ez a módszer sokkal stabilabb a FET-es zajgenerátornál, és mi választhatjuk meg, hogy pontosan milyen frekvenciamenetű zajgenerátort szeretnénk előállítani. Az ezen az elven megvalósított zajgenerátorról bővebben a [21] munkában olvashatunk.

### 5.2.3. Zaj előállítása digitális jelgenerálással

Ennél a módszerrel a valamilyen úton kiszámolt zajsort egy D/A konverterrel alakítjuk elektromos jelekké. A módszernek megvan az az előnye, hogy tetszőleges zajtípust előállíthatunk (sokszor elég a paramétereiket módosítani, de legrosszabb esetben is csak a szoftvert kell módosítani), ráadásul az egyes zajsorok teljes egészében reprodukálhatók. Ugyanakkor vigyázni kell, hogy mivel a D/A konverter nem Dirac-impulzusokat állít elő, az eredeti frekvenciamenet egy  $\sin x/x$  burkolófüggvénnyel szorzódik meg. Ezt a torzítást figyelembe kell venni, mikor a zajt megalkotjuk.

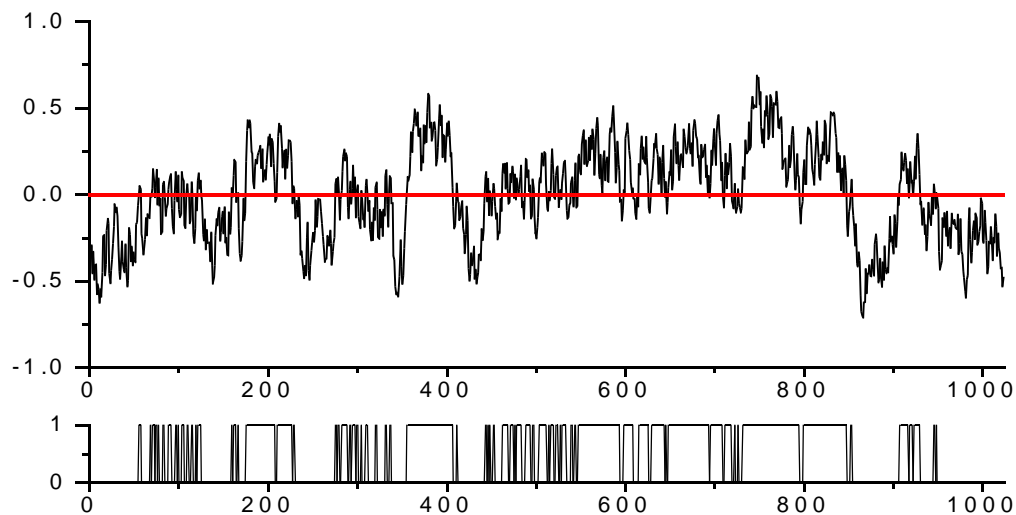
A laborban különböző módszereket alkalmazunk a zaj D/A konverter segítségével való generálására. A DAS1414-ben lévő DSP lehetővé teszi, hogy a zajt helyben generáljuk, a DSP-n futó program segítségével. Amennyiben nem szükséges hosszú adatsor ( $< 4\text{kb}$ ), vagy a mintavételi frekvencia viszonylag kicsi ( $< 10\text{ kHz}$ ), akkor lehetséges a számítógépen generált adatsor felhasználása is. További lehetőséget jelent a merevlemez felhasználása zajgenerálásra, ekkor a számítógépen generált, és a merevlemezre írt (szinte tetszőleges hosszúságú, és típusú) zajt a megfelelő program segítségével elektromos jellé alakíthatjuk.

## 6. Az $1/f^\alpha$ szintmetszési statisztikájának vizsgálata

Jelenlegi munkám egyik fő célja, hogy megvizsgáljam, hogy a zajok szintmetszetei milyen statisztikai tulajdonságokkal rendelkeznek. A zajok szintmetszésének detektálása a következő elven működik: először csonkoljuk a zajt a következő definíció szerint:

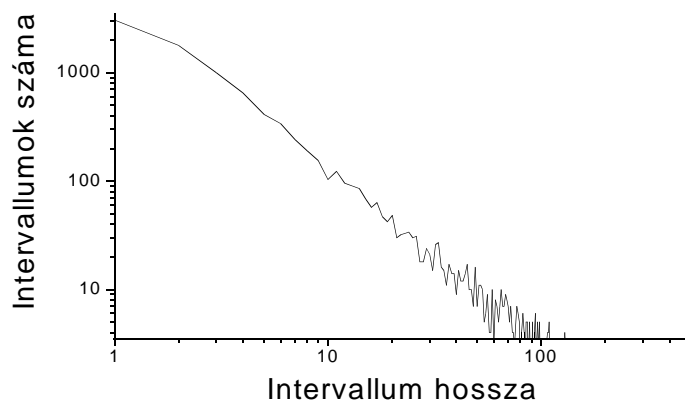
$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_i \geq h \\ 0, & \text{ha } x_i < h \end{cases} \quad (6.1)$$

( $h$  a metszett szint nagysága). Az így keletkező adatsor deriválása után már könnyű megállapítani a szintmetszéseket, ahol a derivált nem nulla, ott egy metszés következett be (az előjel megadja az irányt is).



6.1. ábra: A szintmetszés szemléltetése ( $\alpha=1.5$ )

A különböző szintmetszeteken vizsgálatokat végezhetünk. Ebben a fejezetben a szintmetszetek közötti időintervallumok hosszának hisztogramjának

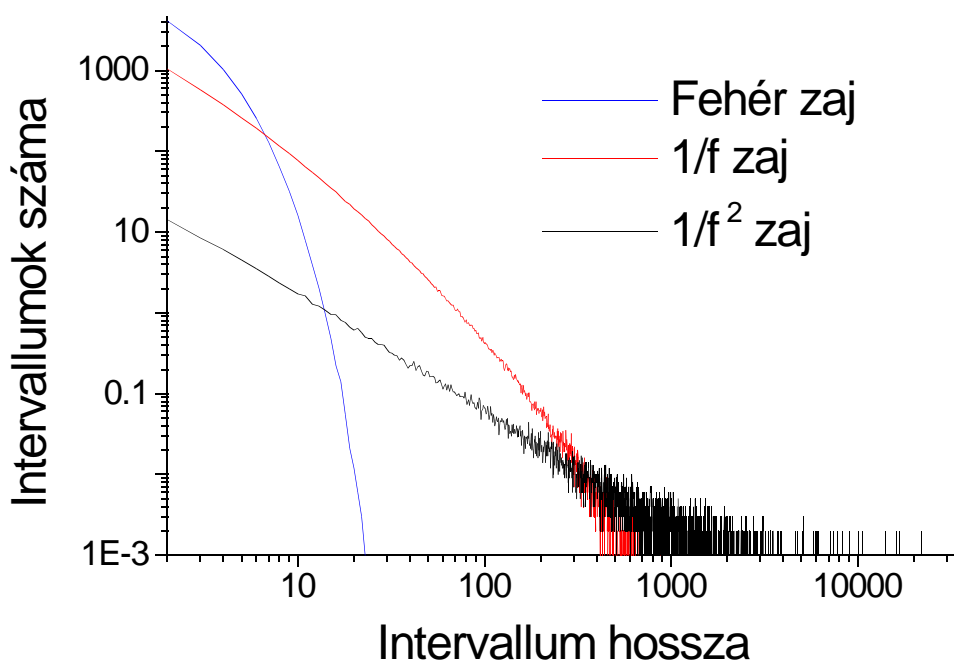


6.2. ábra: példa az időintervallumok hisztogramjára

tulajdonságait vizsgálom, hogy milyen alakú, és hogyan függ a numerikus szimuláció paramétereitől.

### 6.1. A hisztogram függése a zaj kitevőjétől, és a metszett szinttől

A következőkben azt mutatom be, hogy a szintmetszetek hisztogramja hogyan függ a zaj típusától:

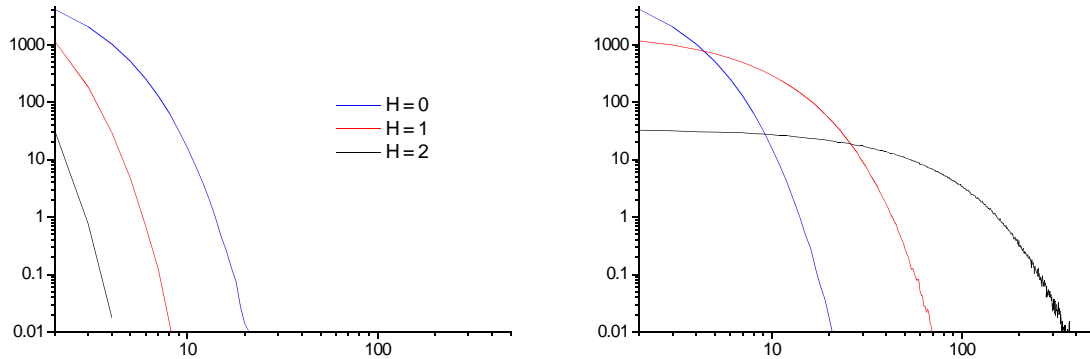


6.3. ábra: A szintmetszetek hisztogramjának függése a zaj típusától

Ebben az esetben a metszett szint a 0 volt. A minták hossza 65536 volt, az eredmény 1000 mérés átlaga. Látható, hogy a zaj kitevőjének növekedése csökkenti a rövid intervallumok számát, miközben egyre hosszabb intervallumok is megjelennek. Ez érthető, hiszen a nagyobb kitevőjű zajok korreláltabbak, képesek arra, hogy a vizsgált szinttől távolabb kerüljenek. Mivel a metszett szint a 0 volt, ezért a szint alatt és felett lévő tartományok statisztikája megegyezik.

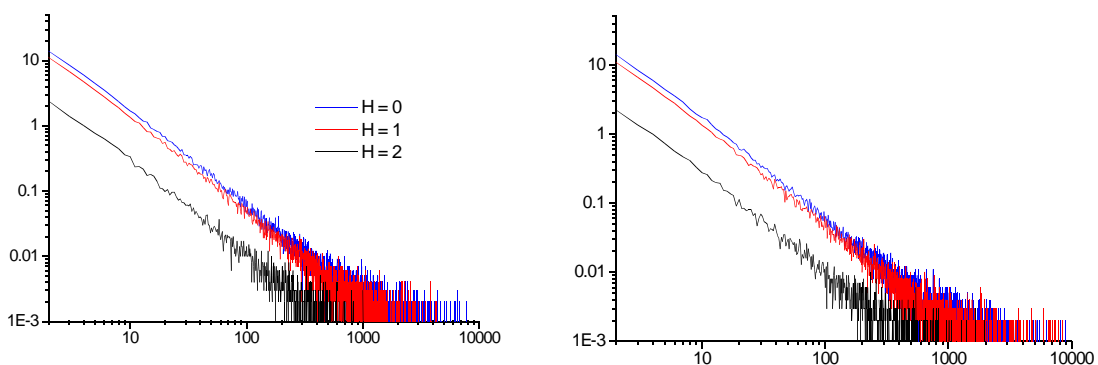
Amennyiben a szintet eltoljuk a zaj középvértékéhez képest, akkor egyrészt a statisztikák is megváltoznak, másrészt a szint alatt és felett lévő tartományokat külön kell vizsgálnunk. (A szintet mindig szórásegységben adom meg.)

Fehér zaj esetén a legjelentősebb az eltérés a két statisztika között (6.4. ábra). Amennyiben növeljük a szintet, a tartományok száma erősen csökken, a zaj egyre ritkábban tartózkodik a szint felett, ugyanakkor a szint alatt lévő tartományok hossza megnövekszik.



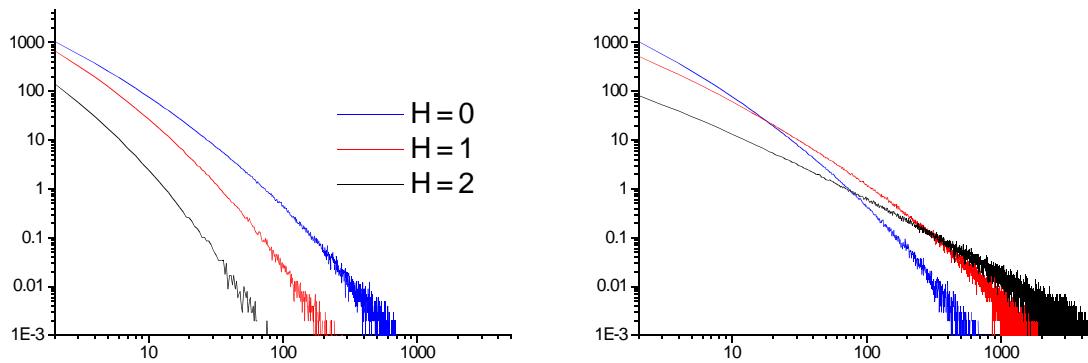
6.4. ábra: A statisztikák függése a zaj szintjétől fehér zaj esetén (az első grafikon a szint feletti tartományokra vonatkozik, a második pedig a szint alatti tartományokra)

$1/f^2$  zaj esetén a két hisztogram nem különbözik jelentősen, továbbá a görbe meredeksége sem változik meg, ha megváltoztatjuk a szintet. Ez arra utal, hogy e zaj esetén nincs igazán kitüntetett szerepe a 0 szintnek, az egyetlen hatás, amiben megmutatkozik változása, az szintmetszetek számában nyilvánul meg. Ez úgy érthető meg, hogy kell egy idő, amíg a "0" pontból indulva eléri a vizsgált szintet, utána azonban ugyanolyan lesz a statisztika, mintha onnan indult volna.



6.5. ábra: A statisztikák függése a zaj szintjétől  $1/f^2$  zaj esetén (az első grafikon a szint feletti tartományokra vonatkozik, a második pedig a szint alatti tartományokra)

$1/f$  zaj esetén az eredmény valahol az előző két eset között helyezkedik el, vagyis van szintfüggés, de kevésbé jelentős, mint a fehér zaj esetén.

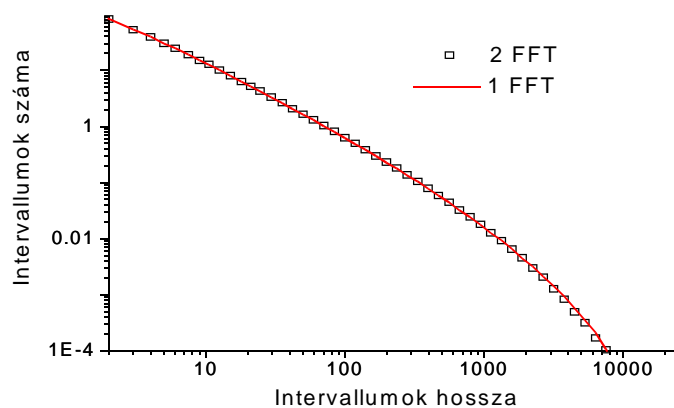


6.6. ábra: A statisztikák függése a zaj szintjétől 1/f zaj esetén (az első grafikon a szint feletti tartományokra vonatkozik, a második pedig a szint alatti tartományokra)

## 6.2. Függés a zajgenerátortól

Fontosnak tartottam, hogy megvizsgáljam, hogy a statisztika mennyire függ a zajgenerátor típusától. Ezzel egyrészt ellenőrizhetjük a zajgenerátorok "jóságát", másrészt ha a statisztika függne a zajforrás típusától, és nem csak a zaj eloszlásától és spektrumától, akkor további megkülönböztető jegyeket is figyelembe kéne venni a jelenségek tárgyalásakor.

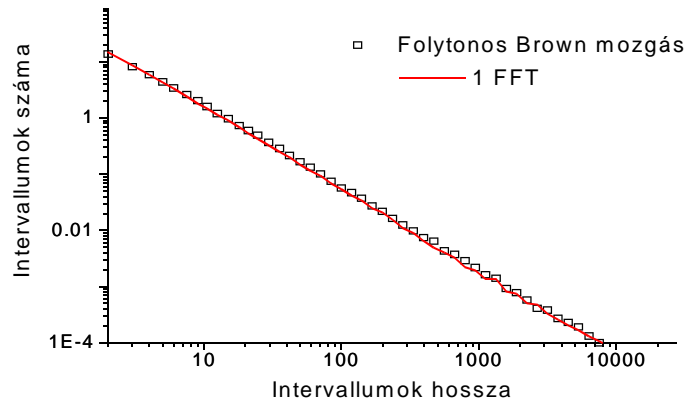
A 6.7. ábrán a 2 FFT-s és 1 FFT-s zajgenerátorok esetén (1/f zajra) hasonlítom össze a szintmetszetek hisztogramját (a zajgenerátorok leírása az 5.1.3. pontban van).



6.7. ábra 2 FFT-s és 1 FFT-s zajgenerátorok segítségével készített hisztogramok összehasonlítása

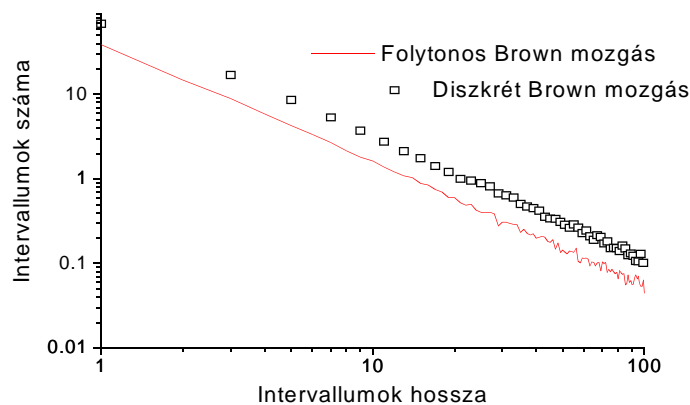
Gyakorlatilag nincs lényeges különbség a két módszerrel generált zaj szintmetszési statisztikája között, tehát a szimulációk során nyugodtan lehet használni a gyorsabb algoritmust.

$1/f^2$  generátorok esetén modell segítségével (Brown mozgás) is tudunk zajt generálni, és ezeket az eredményeket is össze tudjuk hasonlítani:



6.8. ábra Brown mozgás és az 1 FFT-vel generált zaj segítségével készített hisztogramok összehasonlítása

Diszkrét Brown modell esetén csak páratlan hosszúságú intervallumok fordulnak elő (ennek magyarázatát a 6.3. fejezetben adom meg):



6.9. ábra A folytonos és diszkrét Brown mozgás modellje segítségével generált zaj szintmetszési statisztikájának összehasonlítása

### 6.3. Elméletek a szintmetszetek statisztikájára

Mivel fehér zajra és az  $1/f^2$  zajra viszonylag egyszerű modell létezik, elméleti számításokkal megmondhatjuk hogy milyen eredményt várunk a szintmetszetek statisztikájára.

#### **Fehér zaj szintmetszési statisztikája**

Annak valószínűségét, hogy egy adott időpillanatban (numerikus szimuláció esetén az  $x_i$  adat) a zaj kitérése a vizsgált szint felett van  $p$ -vel jelölöm (annak a valószínűsége, hogy a jel a szint alatt van természetesen  $1-p$ ).

Induljunk ki abból, hogy a szint felett vagyunk, annak a valószínűsége, hogy pontosan  $l$  lépés múlva tér át a másik oldalra (vagyis  $l-1$  szer van a szint felett, utána pedig átkerül a szint alá):

$$p_l = p^{l-1} \cdot (1-p) \quad (6.2)$$

Ez pont a geometriai eloszlásnak felel meg (lásd a 2.1.3. fejezetet), csak a  $p$  paraméter szerepe más. Fontos kérdés, hogy mennyi lesz az összes szintmetszet száma. A szint felett

$$T = p \cdot L \quad (6.3)$$

ideig tartózkodik ( $L$  a minta hossza), ha ezt elosztjuk az átlagos mintahosszal:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{1-p} \quad (6.4)$$

akkor megkapjuk az intervallumok számát:

$$N = L \cdot p \cdot (1-p) \quad (6.5)$$

Vagyis az  $l$  hosszúságú intervallumok száma:

$$N_l = L \cdot p^l \cdot (1-p)^2 \quad (6.6)$$

Ugyanez az eredmény vonatkozik a szint alatti tartományokra, csak  $p$  helyére  $(1-p)$ -t kell behelyettesíteni (az intervallumok összes száma megegyezik a szint felett lévőkkel, ez a 6.5. összefüggésből is látható).

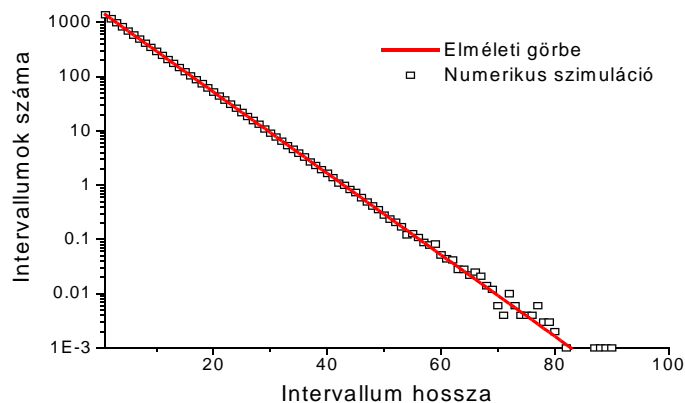


A képletben szereplő  $p$  értéke csupán a metszet szint értékétől és a zaj eloszlásától függ:

$$p = \int_h^\infty p(x) dx = 1 - \int_{-\infty}^h p(x) dx \quad (6.7)$$

ahol  $h$  a metszett szint helye,  $p(x)$  pedig a zaj eloszlásfüggvénye (általában Gauss eloszlású zajt használunk).

A 6.9. ábrán a numerikus szimuláció során kapott hisztogramot hasonlítom össze az elmélet által előrejelzettel (a minta hossza:  $L=65536$ ;  $h=-1$  (a zaj szórása egységnyi),  $p=0.8413$ ,  $N_{\text{számolt}}=8747.99$ ,  $N_{\text{mért}}=8750.72$ ).



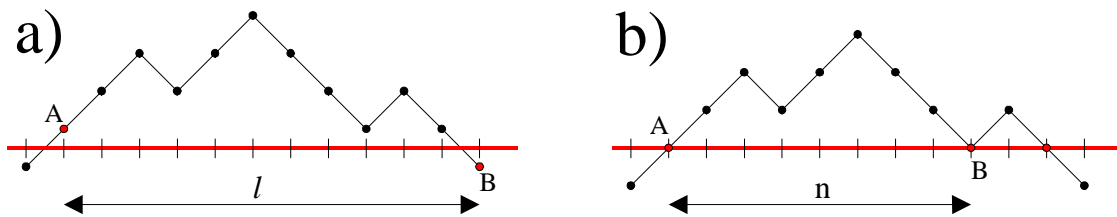
6.9. ábra: A numerikus szimuláció összehasonlítása az elmélet által megjósolt eredménnyel fehér zaj esetén

### Brown mozgás szintmetszési statisztikája

A számolást az egy dimenziós diszkrét Brown mozgás modelljére alapozom, ahol az egyes zajértékeket a következő képlet alapján kaphatjuk meg:

$$x_i = x_{i-1} \pm 1 \quad (6.8)$$

Ekkor két értelmezést is használhatunk a szintmetszetekre: az egyik, amikor az eddig használt módszerhez hasonlóan először csonkoljuk a zajt, majd utána állapítjuk meg a szintmetszeteket; vagy akkor tekintünk szintmetszésnek egy időpontot, ha pont az adott szinten tartózkodik a "részcsekén" (ez utóbbi értelmezést használták a [22] műben. A 6.10. ábrán szemléltetném a különbséget:



6.10. ábra: A szintmetszet értelmezésének két lehetséges változata

A csonkolás definíciójában " $\geq$ " szerepel (6.1 képlet), ez annak felel meg, mintha az a) esetben a metszett szint épp két lehetséges érték között lenne. A b) értelmezés szerint az egymást követő szintmetszetek nem feltétlenül vannak ellentétes oldalon. Az ábra alapján könnyen megjósolható, hogy az a) esetben csak páratlan hosszúságú intervallumunk lesz, míg a b) esetben csak páros hosszúságút kapunk.

Én a számolást az a) esetre végeztem el, de ehhez fel kellett használnom a b) értelmezésre kapott eredményeket is. Az intervallum hossza helyett a számolás során az  $n=l+1$  változót használom.

Ahhoz, hogy a jel az A pontból a B pontba kerüljön  $n/2$  szer kell lefelé lépjen, és  $n/2-1$  szer felfelé, ezt összesen

$$P_n = \binom{n-1}{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} \quad (6.9)$$

féleképp teheti meg. Az átjutás valószínűségét úgy kaphatjuk meg, ha a  $P_n$  számot elosztjuk az összes lehetséges útvonal számával, ami  $2^n$ . Így az átjutás valószínűsége:

$$p_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot P_n = \frac{1}{n^n} \binom{n}{\frac{n}{2}} \quad (6.10)$$

A b) esetben hasonlóan kaphatjuk meg az A pontból a B pontba való jutás lehetséges útvonalainak számát:

$$P'_n = \binom{n}{\frac{n}{2}} \quad (6.11)$$

a valószínűség pedig:

$$P'_n = \frac{1}{n^n} \binom{n}{\frac{n}{2}} \quad (6.12)$$

Azonban az eddig vizsgált pályák között vannak olyanok is, amikor a részecske már hamarabb is áttért a túloldalra, ezek számát ki kell vonni a kapott eredményből. Jelölje  $Q_n$  azon pályák számát, amelyek csak  $l$  lépés után térnek át a túloldalra, hamarabb nem. Azon pályák száma, melyek az  $(i-1)$ . időpillanatban tértek át a túloldalra, de utána eljutottak a B pontba:

$$T_i = Q_i \cdot P'_{n-i} \quad (6.13)$$

Ha az összes lehetséges  $T_i$  útvonalszámot kivonjuk a  $P_n$  számból, akkor  $Q_n$ -re megkapjuk a következő rekurziós formulát (csak páros  $i$ -re kell összegezni):

$$Q_n = P_n - \sum_{i < n} Q_i \cdot P'_{n-i} \quad (6.14)$$

Hasonló eredményt kaphatunk a b) értelmezésre is [22]:

$$Q'_n = P'_n - \sum_{i < n} Q'_i \cdot P'_{n-i} \quad (6.15)$$

A  $p_n$ -hez hasonlóan itt is bevezethetjük a  $q_n$  átmeneti valószínűséget. Felhasználva a [22] munkában elvégzett számolások eredményét a következő eredményt kapjuk a  $q_n$  valószínűsége:

$$q_n = \frac{1}{2^{n-1}} Q_n = \frac{1}{2^n (n-1)} \binom{n}{\frac{n}{2}} \quad (6.16)$$

Nagy  $n$ -ekre a Stirling formula segítségével egyszerűsíthetjük az eredmény:

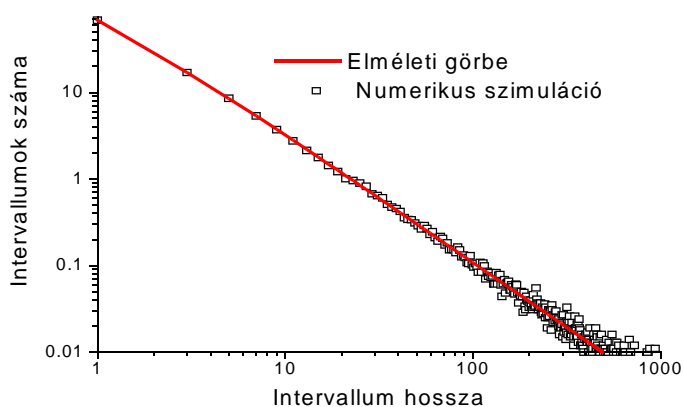
$$\begin{aligned} n! &\approx \sqrt{2\pi} \cdot e^{-n} \cdot n^{n-1/2} \Rightarrow \\ q_n &\propto \frac{1}{n^{1.5}} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Ugyanezt az összefüggést kaphatjuk a Brown mozgás fraktális tulajdonságaiból is [23].

Ahhoz, hogy az intervallumok pontos számát is meghatározzuk, ismernünk kellene az átlagos intervallumhosszat, amit a következőképp kaphatunk meg:

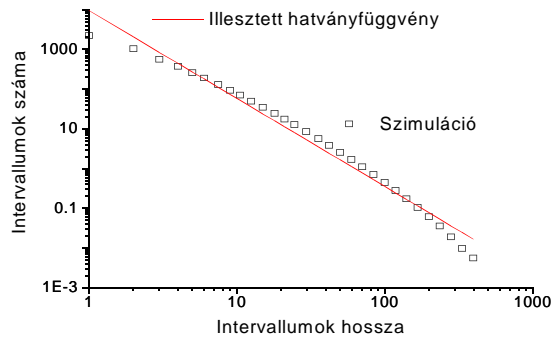
$$\langle n \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot q_n \propto \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (6.18)$$

Sajnos ez az összeg végtelen, mégpedig azért, mert a Brown mozgás divergens. Szimuláción során az alsó határfrekvencia bevezetése (ez a véges adathosszból adódik) korlátozza az intervallumok maximális hosszát, azonban e hatást egyelőre nem tudtam figyelembe venni számolásaim során. A numerikus szimulációk során kapott intervallumszámot felhasználva a 6.11. ábrán hasonlítom össze az elméleti eredményeket a szimulációk eredményével.



6.11. ábra: A numerikus szimuláció összehasonlítása az elmélet által megjósolt eredménnyel  $1/f^2$  zaj esetén (a diszkrét Brown modell alapján)

Bizonyos források arra utalnak, hogy  $1/f$  zaj esetén is hatványfüggvényt kapunk [23], a szimulációk eredménye viszont ettől eltérő (6.12. ábra). Az eltérés lehet hibás szimuláció eredménye is, de lehet annak eredménye, hogy mi véges sáv szélességű zajokat vizsgáltunk. Annak vizsgálata, hogy milyen hatással van a véges sáv szélesség a jelre, még folyik, az mindenesetre már elmondható, hogy az alsó határfrekvencia bevezetése (a véges mintahosszból adódik egy minimális alsó határfrekvencia) csökkenti a hosszú intervallumok számát, a felső határfrekvencia (ez a mintavételezés következménye) pedig a rövid intervallumok számát csökkenti.

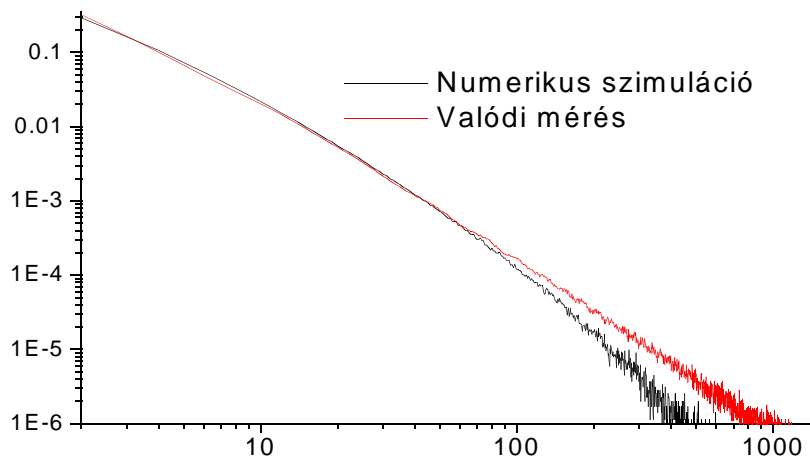


6.12. ábra:  $1/f$  zaj esetén a histogramra illesztett hatványfüggvény jelentősen eltér a numerikus szimuláció eredményétől

## 6.4. Valódi mérésel való összehasonlítás

Az  $1/f$  zajgenerátorunk által előállított jelet a DAS 1414 segítségével egy merevlemezre írtuk, majd a keletkezett adatsort számítógépen dolgoztuk fel. Így egy folytonos 256M pontból álló folytonos, fizikai jelenségből származó zajt használhattunk fel vizsgálatainkhoz.

A 6.13 ábrán a szintmetszetek histogramját hasonlítom össze:



6.13. ábra: A numerikus szimuláció eredményének összehasonlítása az analóg méréssel ( $1/f$  zajra)

A görbék menete hasonló, a hosszú intervallumok számának növekedése egyrészt a nagyobb alsó határfrekvencia következménye, másrészt pedig az zajgenerátor

teljesítményspektrumában 1 Hz alatt van egy kis kiemelés (5.8. ábra), részben ez is okozhatja az eltérést.

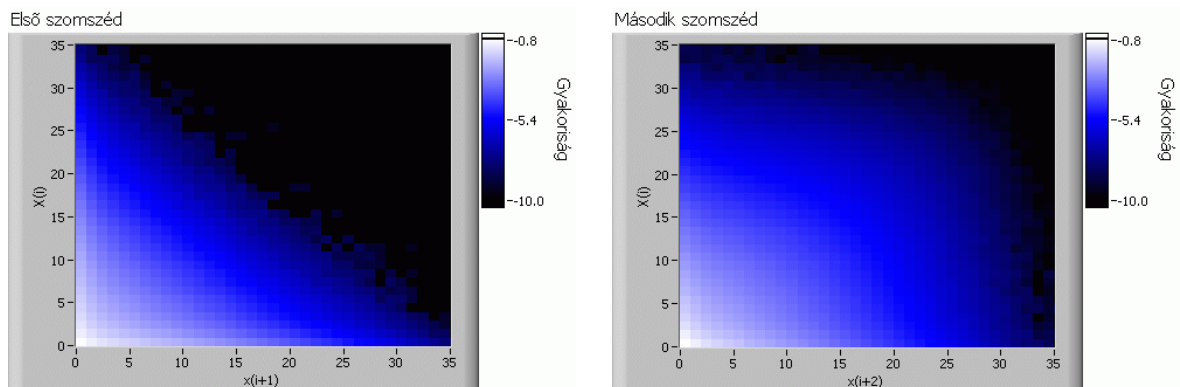
További tervként szerepel, hogy a szintdetektálást egy analóg áramkörrel oldjuk meg, ez a megoldás kiküszöbölné a mintavételezéssel jelentkező problémákat.

## 7. A szintmetszetek közti korreláció

Felmerült a kérdés, hogy vajon az egymás utáni tartományok hogy viszonyulnak egymáshoz, milyen korreláció van közöttük, ezért ezt a témát is részletesebben vizsgáltam.

### 7.1. A vizsgálat módszere

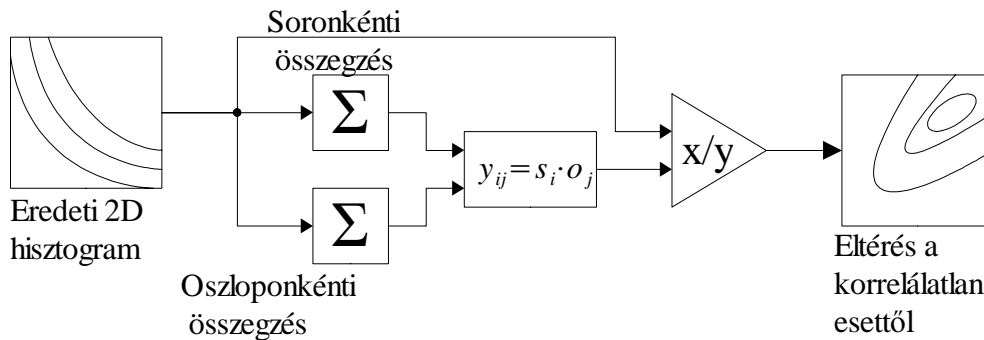
A vizsgálat a következőképp történt: egy kétdimenziós tömbben tároltam el, hogy egy bizonyos hosszúságú intervallum után, milyen hosszúságú intervallum következik, végeredményként egy kétdimenziós hisztogramot kapunk. A memóriatakarékosság érdekében az egyes cellákhoz egy-egy logaritmikusan változó tartományt rendeltem. Ez a módszer egy jelentős átlagolást is végzett a hosszú intervallumok tartományában. Külön lettek vizsgálva a közvetlenül egymás után következő intervallumok (tehát, hogy pl. egy, a szint feletti intervallum után, milyen az alsó intervallum hosszának eloszlása, ill. fordítva), és az, hogy milyen az utána következő második intervallum (ami vele azonos oldalon van) (itt is külön voltak mérve a szint feletti és a szint alatti intervallumok). 1/f zaj esetén az eredményeket a következő ábrán mutatom be:



7.1. ábra: Az 1/f zaj szintmetszeteinek két dimenziós hisztogramja (a függőleges tengelyen a korábbi elem látható, míg a vízszintesen az utána következő; az összes skála logaritmikus)

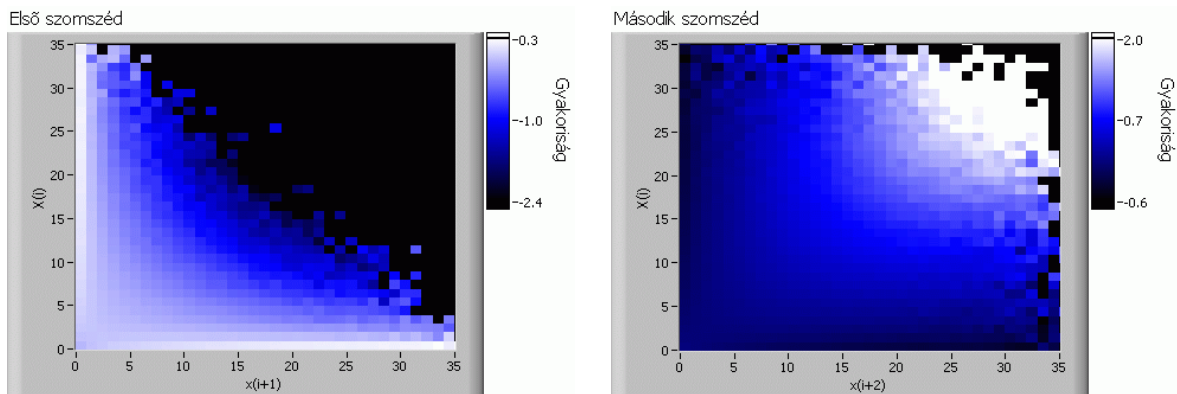
## 7.2. Eltérés a korrelálatlan esettől

Fontos kérdés, hogy ezek a statisztikák mennyiben térnek el attól az esettől, ha nem lenne semmilyen korreláció az egymást követő szintek között. Az egydimenziós hisztogramok segítségével könnyedén kiszámolhatjuk, hogy korrelálatlan esetben hogy nézne ki a 2D hisztogram, a két mátrix elemeinek hányadosa megadja az eredményt.



7.2. ábra: Az eltérés számolásának blokkvázlata

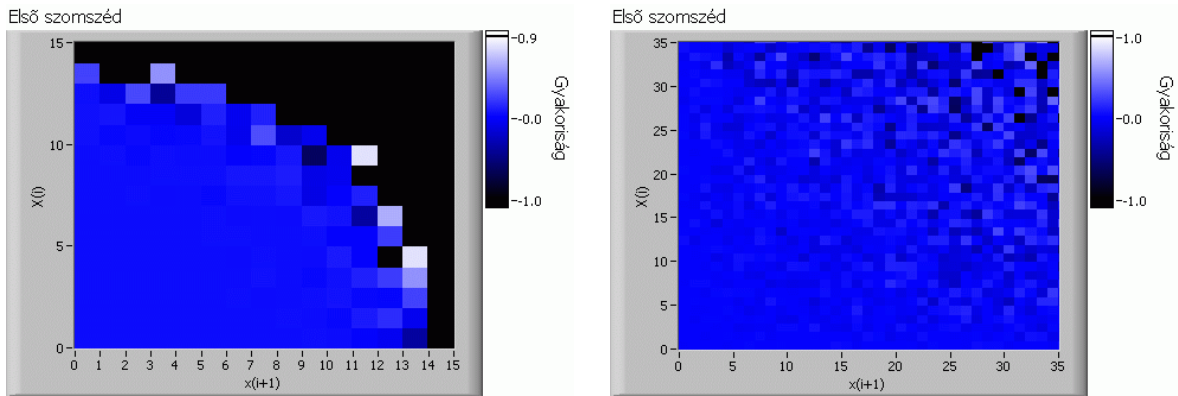
1/f zaj esetén a következő hisztogramot kapjuk:



7.3. ábra: Az 1/f zaj esetén az eltérés a korrelálatlan esettől

Látható, hogy jelentős eltérés van a korrelálatlan esettől, vagyis pl egy hosszú intervallum után nagyobb valószínűséggel következik be egy rövid intervallum a túloldalon, míg miután visszatért, sokkal nagyobb egy hosszú intervallum valószínűsége, mintha nem lenne semmilyen korreláció. Fehér és  $1/f^2$  zaj esetén nincs korreláció az intervallumok között, így egy "szürke" képet kapunk. Az esetleges helyi eltérések oka, hogy túlságosan keveset átlagoltunk (fehér zaj esetén sok helyen egyáltalán nincs adat).





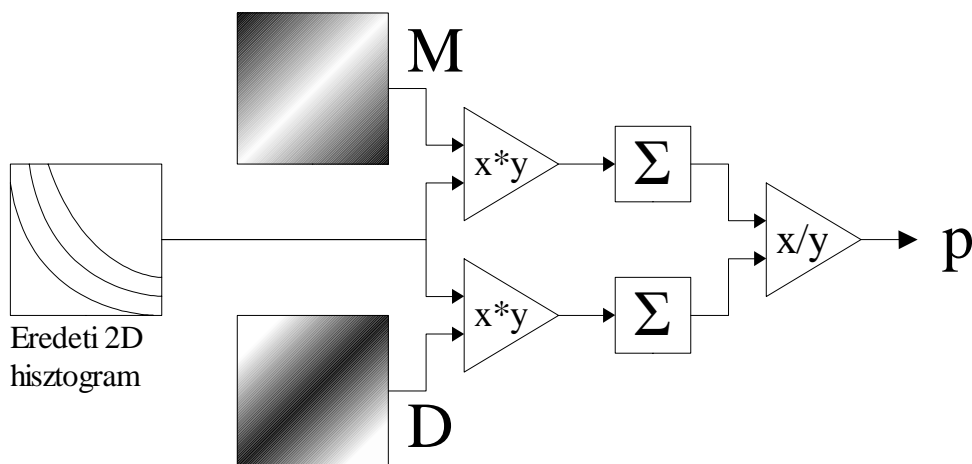
7.4. ábra: Eltérés a korrelálatlan esettől fehér és  $1/f^2$  zaj esetén

### 7.3. Paraméter illesztése

Az előbb bemutatott ábrák, bár érdekesek, használatuk különféle modellekben mégis nehézkes, ezért igyekeztem, hogy a felület domborodását vagy homorúságát egyetlen paraméterrel jellemezhessem. A következő módszert használtam: készítettem egy olyan mátrixot, amely közepén domborodik (M), és egy olyat, amely a szélén vesz fel nagyobb értékeket (D):

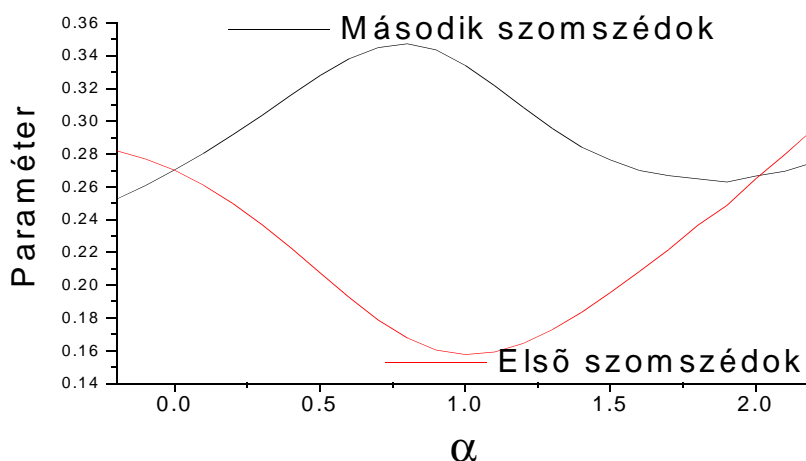
$$M_{ij} = i * j, \quad D_{ij} = (i - j)^2 \quad (7.1)$$

Az indexek növelésével nő a mátrix elemeinek átlagos értéke, ez kompenzálja hogy hosszú szintmetszetekből kevés van. E két mátrix segítségével számolom ki a görbületet jellemző paramétert a következő ábrán vázolt módszer szerint:



7.5. ábra: A görbületet jellemző paraméter számolásának blokkvázlata

Az eredeti hisztogramot elemeit tagonként megszorozom az M és a D mátrix elemeivel, a keletkező mátrixok elemeit összegezem, majd a két összeget elosztom egymással. Az így kapott paramétert már könnyebb kezelni, a zaj típusától való függését a 7.6. ábrán láthatjuk:



7.6. ábra: A hisztogram görbületét jellemző paraméter függése a zaj típusától

Fehér zaj és  $1/f^2$  zaj esetén az elméletnek megfelelően azt kaptuk, hogy nincs korreláció ez egymást követő intervallumok között, míg az  $\alpha = 1$  körül jelentős korrelációt kaptunk: az első szomszédokra a paraméternek  $\alpha = 1$  esetén van minimuma, a második szomszédokra a maximumot  $\alpha = 0.8$  körül találjuk.

Amennyiben a szintmetszetek közötti korrelációt felhasználva megpróbáljuk felépíteni a csonkolt zajunkat (tudjuk, hogy egy bizonyos hosszúságú intervallum után milyen eloszlást követ a következő intervallum hossza),  $1/f$  zaj esetén azt várhatnánk, hogy ugyancsak egy  $1/f$  zaj lesz az eredmény (mivel invariáns az amplitúdó-csonkolásra). Az eredmény viszont egy Lorentzi jellegű zaj lett. Ez arra utal, hogy igen erős korreláció van nemcsak az első szomszédok között, hanem az összes többi között is. E miatt további terveink között szerepel a korreláció közvetlen kiszámítása a szintmetszetekből, és nem csak az első néhány szomszédos elemre.

## 8. Összefoglalás

Dolgozatomban célként tűztem ki az  $1/f^a$  típusú zajok szintmetszési tulajdonságainak vizsgálatát. E cél elérése érdekében egyrészt numerikus szimulációkat végeztem, másrészt valódi méréseket is végeztem, és az eredményeket összehasonlítottam.

A következőkben röviden összefoglalom az elért eredményeket:

- A numerikus szimulációk számára megfelelő programokat készítettem, numerikus zajgenerátorokat valósítottam meg és teszteltem.
- A szintmetszések statisztikáját megvizsgáltam különféle zajtípusokra, és metszési szintekre.
- A rendelkezésre álló elméleti eredményeket pontosítottam és kibővítettem, a vizsgált esetekre pontos egyezést kaptam a szimuláció és a jósolt eredmények között.
- Vizsgáltam a szintmetszetek közötti korrelációt is, azt kaptam, hogy az  $1/f$  zaj ebből a szempontból is kitüntetett szerepű (itt a legerősebb a korreláció).
- Az analóg mérésekhez egy  $1/f$  zajgenerátort építettem és teszteltem működését.
- A DAS 1414 mérőrendszert kiegészítettem egy szabványos IDE merevlemez interfésszel, így hosszabb adatsorok mérését tettem lehetővé.
- A szimuláció eredményeit összevettem az analóg mérés eredményeivel, és nem találtam jelentős eltérést.

### **További célok:**

- Szükséges a szimulációk és mérések során bevezetett határfrekvenciák hatásának vizsgálata.
- Megfelelő görbéket szeretnénk illeszteni a szintmetszetek hisztogramjára, ezek ugyanis jelentős segítséget nyújthatnának a megfelelő elméletek kidolgozásához.
- Tervezzük a szintmetszetek közötti korreláció további vizsgálatát.

- Általános elméleteket szeretnénk kidolgozni mind a szintmetszetek statisztikájára, mind a szintmetszetek közötti korrelációra.
- Az analóg mérésekhez további zajgenerátorokat fogunk felhasználni.
- Analóg szintdetektálás megvalósításával lehetővé tennénk a mintavételezésből eredő esetleges problémák kiküszöbölését.

## 9. Köszönetnyilvánítás

Ez úton szeretnék köszönetet mondani Dr. Gingl Zoltánnak a problémák felvetéséért és a munkában nyújtott segítségért. Továbbá szeretnék köszönetet mondani a Kísérleti Fizikai Tanszéknek, hogy lehetőséget biztosított a dolgozat elkészítéséhez.

## 10. Hivatkozások

- [1] R.F. Voss, in Proc.33rd Annu.Symp.Frequency Contr., Atlantic City, NJ, (1979) 40
- [2] F.N. Hooge, Physica, vol 83B,(1976) 14
- [3] J.R. Clem, Phys.Rev. B1 (1970) 2140
- [4] R.J. van den Berg and A. de Vos, Phys. Lett. A92 (1982) 203
- [5] A.A. Verveen and H.E. Dirksen, Proc IEEE 56 (1968) 906
- [6] O. Toussoun, Memoires de l'Institut d'Egypt 8-10, Cairo (1925)
- [7] B.B. Mandelbrot and J.W. Van Ness, SIAM Rev., 10 no.4 (1968) 422
- [8] R.F. Voss and J. Clarke, J.Accoust Soc.Amer., 63 no.1 (1978) 258
- [9] Ambróczy A.: Elektronikus zajok, Muszaki Kiadó, Budapest, 1972
- [10] A.L. McWorther, R.L.E. 295 and Lincoln Lab Tech Rep. 80, M.I.T., 1955
- [11]L.B. Kiss, Z. Gingl, Zs. Marton, J. Kertesz, F. Moss, G. Schemera and A. Bulsara, 1993, J. Stat. Phys. 70, 451
- [12] Tadasi Miaki, J. Appl. Phys., 44, no.1 (1973) 477
- [13] Valószínűségszámítás és matematikai statisztika, jegyzet (JATE, 1999)

- [14] Dr. Schnell László: Jelek és rendszerek mérés technikája, Műszaki Könyvkiadó  
1985
- [15] Nagy István: Az 1/f zaj Markovi tulajdonságainak vizsgálata, diplomamunka  
(Szeged, 1992)
- [16] Mingesz Róbert: Digitális műszer fejlesztése az atomi erő mikroszkóp dinamikus  
üzemmódjai számára, TDK dolgozat (Szeged, 2002)
- [17] Kardos A., Gingl Z., *Cardiol. Hung.* 1994; 1994/2:39-51.
- [18] <http://www.noise.physx.u-szeged.hu>
- [19] D.E. Knuth: A számítógépprogramozás művészete, Műszaki Kiadó, Budapest,  
1987
- [20] Nagy Sándor: Digitális jelprocesszor-vezérelt zajgenerátor fejlesztése,  
diplomamunka (Szeged, 2002)
- [21] Csík Norbert: Jel/zaj-viszony vizsgálata sztochasztikus rezonanciával,  
diplomamunka (Szeged, 2002)
- [22] Gingl Zoltán: 1/f zaj generálása a Brown-mozgás skálázása alapján, doktori  
értekezés (Szeged, 1992)
- [23] B.B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, 1982
- [24] Fülei Tamás: Sztochasztikus rezonancia a FitzHugh-Nagumo-féle  
neuron modellben, diplomamunka (Szeged, 2002)
- [25] <http://www.ni.com>
- [26] <http://java.sun.com/>

# 11. Függelék

## 11.1. A Java nyelvben alkalmazott véletlenszám-generátor

A következőben a Java véletlenszám-generátor osztály számunkra fontos részletét mutatom be, mivel sok olyan rutint tartalmaz, amik hasznosak lehetnek mások számára:

```
package java.util;
public class Random
{
    private long seed;
    private final static long multiplier = 0x5DEECE66DL;
    private final static long addend = 0xBL;
    private final static long mask = (1L << 48) - 1;
    public Random()
    {
        this(System.currentTimeMillis());
    }
    public Random(long seed)
    {
        setSeed(seed);
    }
    synchronized public void setSeed(long seed) {
        this.seed = (seed ^ multiplier) & mask;
        haveNextNextGaussian = false;
    }
    synchronized protected int next(int bits)
    {
        long nextseed = (seed * multiplier + addend) & mask;
        seed = nextseed;
        return (int)(nextseed >>> (48 - bits));
    }
    public int nextInt()
    {
        return next(32);
    }
}
```

```

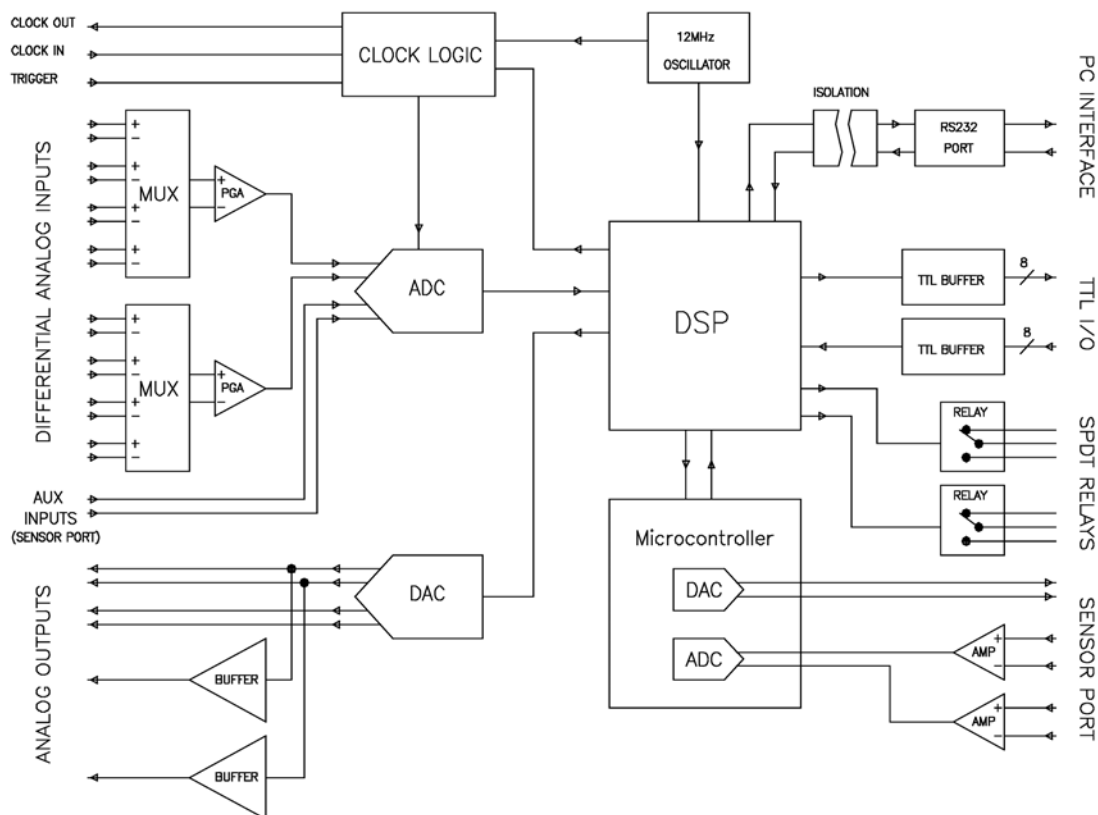
public double nextDouble()
{
    long l = ((long)(next(26)) << 27) + next(27);
    return l / (double)(1L << 53);
}

private double nextNextGaussian;
private boolean haveNextNextGaussian = false;
synchronized public double nextGaussian()
{
    // See Knuth, ACP, Section 3.4.1 Algorithm C.
    if (haveNextNextGaussian)
    {
        haveNextNextGaussian = false;
        return nextNextGaussian;
    }
    else
    {
        double v1, v2, s;
        do
        {
            v1 = 2 * nextDouble() - 1; // between -1 and 1
            v2 = 2 * nextDouble() - 1; // between -1 and 1
            s = v1 * v1 + v2 * v2;
        } while (s >= 1 || s == 0);
        double multiplier = Math.sqrt(-2 * Math.log(s)/s);
        nextNextGaussian = v2 * multiplier;
        haveNextNextGaussian = true;
        return v1 * multiplier;
    }
}
}

```

## 11.2. A DAS 1414 felépítése

A következő ábrán a DAS 1414 alapelrendezése szerepel:



11.1. ábra: A DAS 1414 felépítése

A rendszer jellemzőit a következő táblázatban foglalom össze:

Digitális jelprocesszor	ADSP-2181, 16-bites fixpontos, 40MIPS, 80kbyte memória
Analóg bemenetek	8 független differenciális bemenet, $\pm 0.1V, \pm 1V, \pm 10V$ tartomány 14-bit A/D konverter, 300kHz mintavétel, szimultán mintavételezés
Analóg kimenetek	4 független kimenet, $\pm 10V$ tartomány, 14-bit D/A konverter 2 teljesítménykimenet (max. 1A)
Digitális port	8-bites TTL kimenet, 8-bites TTL bemenet
Szenzor portok	2 port, differenciális 24-bit A/D konverter, 12-bit D/A konverter
Órajel és trigger	Órajel kimenet, órajel bemenet, trigger bemenet
Kommunikáció	izolált RS232 port, 115200 bit/s

Jelenleg többek közt a következő kártyákkal bővíthetjük a DAS 1414 képességeit:

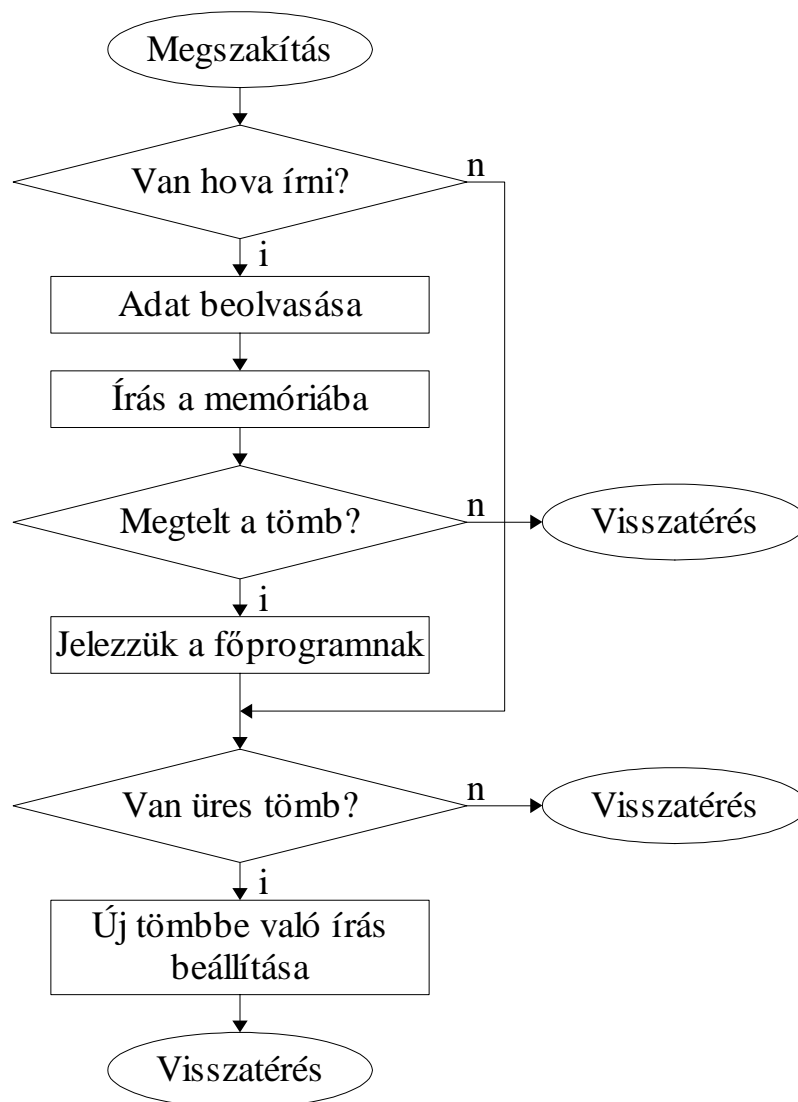
- 1 MHz-es 16 bites  $\Sigma\Delta$  A/D konverter



- digitális potencióméterek
- digitálisan vezérelhető szűrők
- 1 MB RAM-kártya
- IDE merevlemez interfész

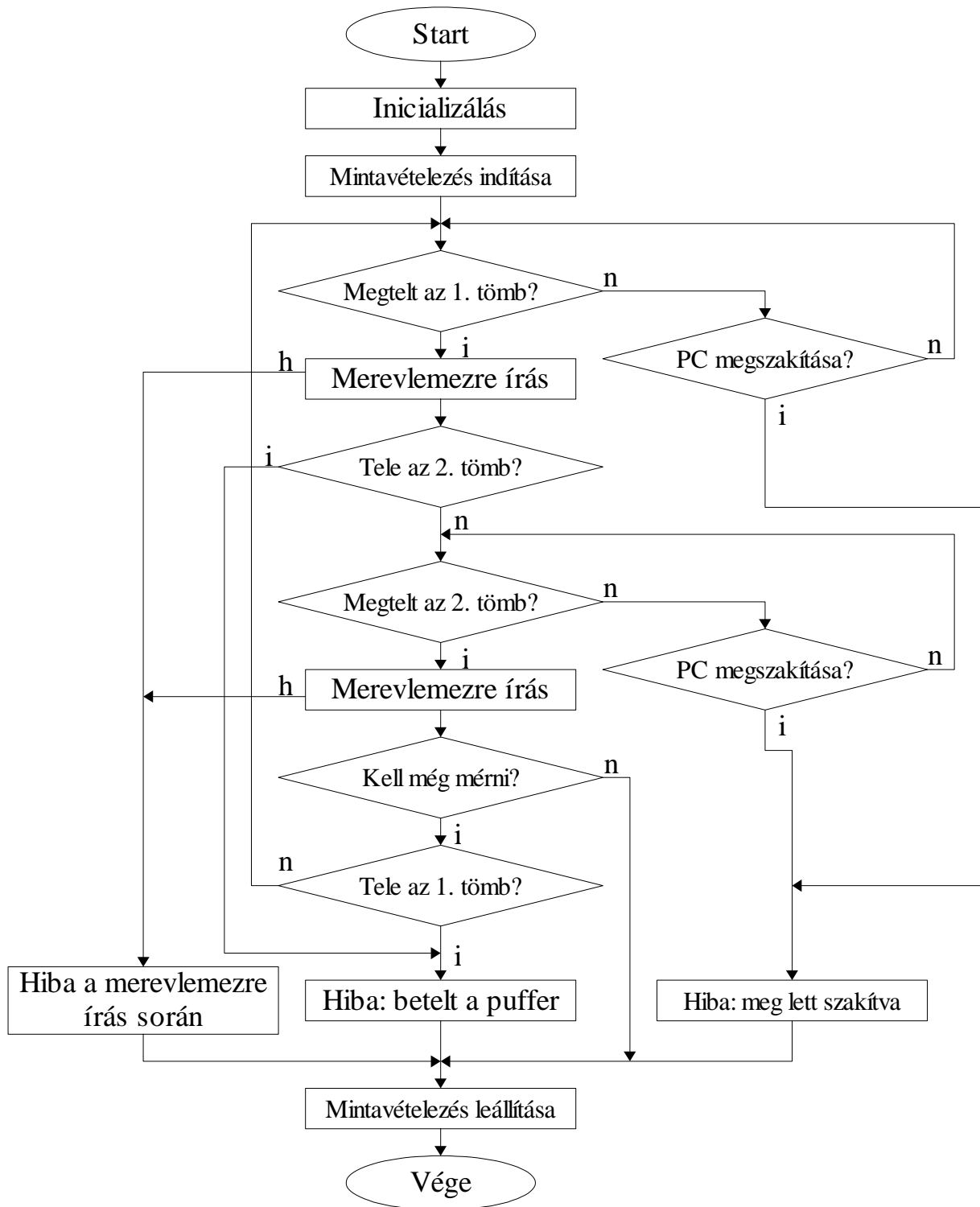
### 11.3. A folyamatosan mintavételező program szerkezete

A következő blokkvázlatokon a folyamatosan mintavételező és a mért adatokat a merevlemezre író program szerkezetét mutatnám be. A program két részből áll, a főprogram végzi el a beállításokat, majd a mintavételezett adatokat a merevlemezre írja,



11.3. ábra: a folyamatos mérést végző program mintavételező része

míg a megszakítást kezelő szubrutin a mintavételezések végén megjelenő digitális adatokat tárolja el a memóriában.



11.2. ábra: a folyamatosan mintavételező program fő részének blokkvázlata