

József Attila Tudományegyetem  
Természettudományi Kar

**AZ 1/F ZAJ MARKOVI TULAJDONSÁGÁNAK VIZSGÁLATA**  
Diplomamunka

Nagy István  
fizikus hallgató

Témavezető :

Dr. Kiss László

Gingl Zoltán

JATE, Kísérleti Fizikai Tanszék

Szeged

1992

## TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés	3
2. Irodalmi összefoglalás	5
2.1 Sztochasztikus jelek leírása	5
2.2 Statisztikai jellemzők	6
2.2.1 Több valószínűségi változó	8
2.3 Sztochasztikus folyamatok	9
2.4 Valószínűségi sűrűségfüggvények	13
2.5 Teljesítménysűrűség-spektrum, autokorreláció- függvény	16
2.5.1 Zajok osztályozása spektrális intenzitás szerint	19
2.6 Digitális jelfeldolgozás	21
2.6.1 A mintavételezés elmélete	22
2.7 Markov-folyamatok	25
3. Számítógépes modellek	30
3.1 A mérési elv	30
3.1.1 Az algoritmus lépései	32
3.1.2 Az algoritmus tesztelése	42
3.2 Az $1/f$ zaj markovi tulajdonságának vizsgálata a számítógépes modellek alapján	47
3.2.1 $1/f$ modell (A)	52
3.2.2 $1/f$ modell (B)	54

4. Kísérletek fizikai rendszerek zajával	
4.1 Gyakorlati 1/f folyamat (C)	62
4.2 1/f modell (D)	63
4.3 A kísérleti modellek eredményei	67
5. A modelleken végzett mérések eredményeinek összefoglalása	73
6. Az eredmények összefoglalása	76
Irodalomjegyzék	77

## BEVEZETÉS

A természetben előforduló jelenségek általános tulajdonsága, hogy az egymástól való bonyolult függéseik, valamint a kvantummechanikai határozatlanság miatt eleve véletlenszerűek. Ezért egy kísérlet során mért értékek nem abszolút pontosak és gyakran csak statisztikai módszerekkel értékelhetők ki. Az eredmények információtartalma pedig gyakran zajfolyamatok jellemzőinek meghatározásában rejlik.

E dolgozat tárgya egy speciális zajtípus, melyet  $1/f$  zajnak neveznek. A század első felében kezdődő elektronikai mérések során figyeltek fel rá, mint az alacsony frekvenciákon erős többlettel rendelkező zajra [1]. A későbbi vizsgálatok pontos definíciót és számos modellt eredményeztek [1,2]. Aktualitását azonban nem veszítette el, ugyanis a vizsgálatok során kiderült, hogy nemcsak az elektronika területén fordul elő, hanem olyan folyamatról van szó, amely általánosan megtalálható a természeti jelenségek körében [21]. A felépített modellek azonban gyakran csak egy-egy speciális területen érvényesek, a zajtípus eredetére vonatkozó általános magyarázattal nem tudnak szolgálni.

Célunk az  $1/f$  zaj egyszerű, egy elemi folyamatot feltételező modelljének vizsgálata. Ez az  $X_{n+1}=f(X_n)$  iterációs egyenleten alapul, amely sztochasztikus függést biztosít az általa szolgáltatott értékek között. A modell rekurzív jellege, azaz egy véletlen folyamat valamely időpontban vett értékének az előző pillanatban ismert értékéből való előállítása, a folyamat markovi tulajdonságával biztosítható. Ennek érdekében olyan algoritmust

készítünk, amely a Markov-folyamatokat jellemző átmenetmárixok felhasználásával végzi az említett iterációt. Átmenetmárix az 1/f folyamatokhoz is rendelhető, ily módon lehetőség nyílik a markovi tulajdonság vizsgálatán keresztül az iterációs modell felállítására. A vizsgált 1/f folyamataink számítógépes modellekből és valódi fizikai rendszerekből származnak. Négy zajforrást készítettünk, ezek a folyamat előállításának módjában különböznek. Ezzel alkalom adódik a különböző eredetű 1/f zajok kísérleti vizsgálatára. Valamennyi a Gauss-eloszlást követi, ez a legáltalánosabban előforduló zajtípus.

A dolgozat első része a vizsgálatokhoz szükséges fogalmakat és az irodalmi áttekintést tartalmazza. A második részben, amely a 3. és 4. fejezetet fogja át, az alkalmazott programok ismertetését, az egyes modellek és kísérleti elrendezések működését tárgyaljuk. Ide kerültek a mérési eredmények is. Az 5. fejezetben az eredmények kiértékelését végezzük. Az utolsó fejezet az eredmények összefoglalását tartalmazza.

## 2. IRODALMI ÖSSZEFOGLALÁS

### 2.1 Sztochasztikus jelek leírása

Egy  $1/f$  tulajdonságot mutató fizikai rendszeren, ezenkívül egy analóg és két számítógépes modellen végezzük vizsgálatainkat. A később tárgyalásra kerülő modellek egyszerűsége folytán elegendő a vizsgálandó tulajdonság mérésével foglalkoznunk; az így kapott eredmények az adott tulajdonsággal rendelkező fizikai rendszerekre is érvényesek. A számítógépes feldolgozás miatt az analóg jelek jellemzőinek leírását a feszültségfüggvény vizsgálatán keresztül vezetjük be. A számítógépes modellekkel előállított folyamatok ezen jelek diszkrét realizációjának tekinthetők. Egy  $u(t)$  feszültségjelet a rá vonatkozó matematikai leírás alapján két fő csoportba oszthatjuk:

a, determinisztikus

b, sztochasztikus.

Egy rendszer valamely  $t_0$  időpillanatbeli állapotát ismerve, a múltjára és jövőjére nézve is információkat nyerhetünk. Determinisztikusnak nevezzük az olyan rendszereket, melyek viselkedése valamely tetszőleges időpontban pontosan megjósolható a  $t_0$  időpillanatbeli állapotából. A másik csoportba tartozó rendszerek véletlenszerű folyamatokat mutatnak. Az ezen folyamatokat leíró jelek jövőbeli értéke, a múltbeli viselkedésük alapján, közelítően adható meg a valószínűségelmélet módszereivel. Tekintsük át az ehhez szükséges fogalmakat.

## 2.2 Statisztikai jellemzők

Bár a sztochasztikus folyamatok eredményeképpen létrejövő zajok véletlenszerűek, a véletlen események mögött statisztikus törvényszerűségek húzódnak meg. Ezek felismerhetősége feltételezi az események tetszőleges sokszor, azonos körülmények között való elvégezhetőségét. A fizikai kísérletekre ez a feltétel teljesül. Valamely esemény nagyszámú bekövetkezése esetén értelmezhetjük a relatív gyakoriságát: ha  $n$  számú kísérletből valamely  $A$  esemény  $n_A$ -szor következett be, az

$$\frac{n_A}{n} \quad (2.1)$$

számot az  $A$  esemény relatív gyakoriságának nevezzük. Hogy ez az érték a kísérletek növekvő száma mellett konvergál, a valószínűségszámítás gyakorlati alkalmazhatóságának alapját képezi [4,6]. A valószínűségelméleten belüli ezt alátámasztó tételt, a nagy számok törvényének nevezzük. Tehát azt mondhatjuk, hogy létezik a következő határérték [4]:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad (2.2)$$

Ezt a számot az  $A$  esemény bekövetkezése valószínűségének nevezzük. A kísérletek kimeneteleképpen bekövetkező események halmazán, mint eseménytípuson értelmezett bármely függvényt valószínűségi változónak nevezünk. A fizikai kísérleteinkben egy elemi esemény egy adott feszültségérték mérése, a hozzárendelt valószínűségi változót a mért érték számértéke jelenti. Az ezen értékekhez rendelt (2.2) valószínűségek a zaj amplitúdójának statisztikai jellemzését adják. A következő kifejezésekből a pontos definíciókat kapjuk.

### Az elsőrendű valószínűségi sűrűségfüggvény

$N$  számú egyenértékű, egymástól független rendszert egyidőben vizsgálva legyen  $\Delta N$  azon jelek száma, melyek amplitúdója az  $x$  és  $x+\Delta x$  értékek közé esik egy adott  $t_a$  időpontban, ekkor az első valószínűségi sűrűségfüggvény definíciója [7] :

$$p_1(x, t_a) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{\Delta N}{N} \frac{1}{\Delta x} . \quad (2.3)$$

Az előzőekben definiált sűrűségfüggvény segítségével újabb hasznos számértékeket definiálhatunk.

### Statisztikus középérték

A jel várható értékét adja meg, elsőrendű momentumnak is nevezik [7]:

$$M(x(t_a)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_1(x, t_a) dx . \quad (2.4)$$

### Négyzetes középérték

A folyamat átlagos teljesítményével arányos értéket ad:

$$M(x(t_a)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_1(x, t_a) dx . \quad (2.5)$$

### Szórásnégyzet

A jel által felvett értékek a középértéktől bármely távol eshetnek. A szórásnégyzet a középértéktől való átlagos négyzetes eltérést jellemzi, varianciának is nevezik:

$$D^2(x(t_a)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 p_1(x, t_a) dx = M(x^2) - M(x)^2 . \quad (2.6)$$

A szórás (a 2.6 kifejezés négyzetgyöke) pedig azt jellemzi, mennyire sűrűsödnek az amplitúdóértékek a középérték köré.



Az eddig bevezetett középértékek egy általános, n-edrendű momentumnak nevezett kifejezésbe foglalhatók, de szemléletes kép csak az előzőekben látott integrálokhoz rendelhető [3].

### Modus

Egy valószínűségi változó azon értékét nevezzük modulusnak, amely mellett a sűrűségfüggvényének maximuma van [6].

#### 2.2.1 Több valószínűségi változó

A kísérleteinkben a mérésekkor előforduló lehetséges értékek halmazához, mint eseménytérhez két valószínűségi változót rendelünk, ezek a két egymás után mért érték számértékeivel egyeznek meg. Legyen A és B a két esemény, ezek együttes bekövetkezése esetén az A esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűségét a következőképpen értelmezzük [6]:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad , \quad (2.7)$$

ahol  $P(AB)$  a két esemény együttes előfordulása esetén a (2.2)-ben értelmezett valószínűség.

#### Második valószínűségi sűrűségfüggvény

Tekintsünk ismét N számú egyenértékű, egymástól független rendszert a  $t_a$  és  $t_b$  időpontokban. Legyen  $\Delta N$  most azon jelek száma, melyek x amplitúdója a  $t_a$  időpontban x és  $x+\Delta x$  közé, a  $t_b$  időpontban pedig  $x'$  és  $x'+\Delta x'$  értékek közé esik. A második valószínűségi sűrűségfüggvény definíciója [7] :

$$p_2(x, t_a, x', t_b) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x' \rightarrow 0}} \frac{\Delta N}{N} \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta x'} \quad . \quad (2.8)$$

### Kovariancia, korrelációs együttható

Ha több valószínűségi változót vizsgálunk egyszerre, felmerül ezek egymástól való függése. Ezen függés szorosságát is egy számmal jellemezhetjük. Legyen  $\xi$  és  $\eta$  két valószínűségi változó melyek csak sztochasztikusan függenek egymástól, ezek együttes kovarianciáját (azaz együttes szórásnégyzetét) a következő összefüggés definiálja [6]:

$$D^2(\xi, \eta) = M[(\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))] = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta) \quad , \quad (2.9)$$

ahol  $M(\xi)$  és  $M(\eta)$  a  $\xi$  és az  $\eta$  valószínűségi változók várható értékei. Érvényes a következő egyenlőtlenség [6]:

$$D^2(\xi, \eta) \leq D(\xi)D(\eta) \quad . \quad (2.10)$$

Az egyenlőtlenséget a  $D(\xi)D(\eta)$ -val osztva a

$$R(\xi, \eta) = \frac{D^2(\xi, \eta)}{D(\xi)D(\eta)} \quad (2.11)$$

kifejezést kapjuk, ami a két valószínűségi változó **korrelációs együtthatója**. Értéke:

$$|R(\xi, \eta)| \leq 1 \quad . \quad (2.12)$$

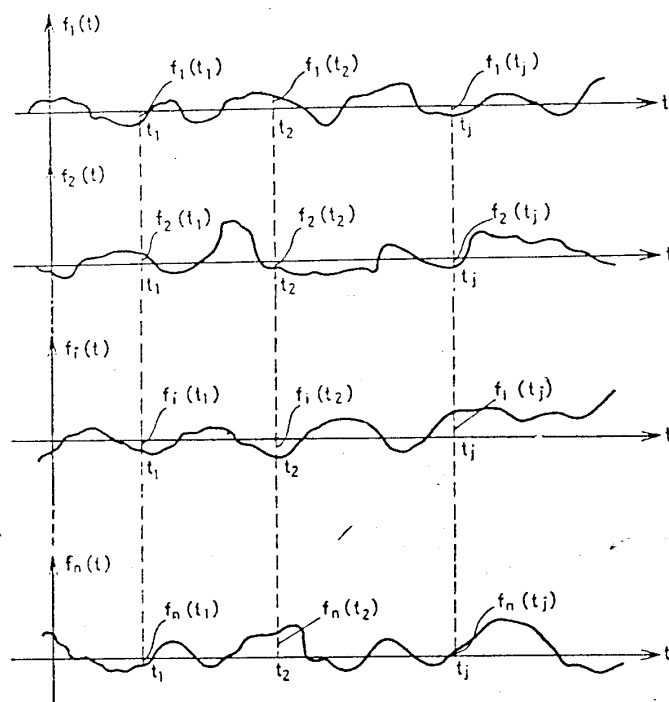
Az  $R(\xi, \eta) = 0$  a két változó korrelálatlanságát jelenti. Minél közelebb van  $R(\xi, \eta)$  az 1-hez, általában annál szorosabb a kapcsolat a két változó között. Gauss-folyamatokra az  $R(\xi, \eta) = 0$  a statisztikai függetlenséget is jelenti.

### 2.3 Sztochasztikus folyamatok

Sztochasztikusnak nevezünk egy olyan folyamatot, amely egy  $f_1(t), \dots, f_n(t)$  olyan időfüggvény csoporttal írható le, melyen

belül mindegyik függvény egy-egy véletlen változó jel [3]

(2.1.ábra):



2.1. ábra Sztochasztikus folyamat időfüggvényei [3].

Tegyük fel, hogy a vizsgált időfüggvényeknek  $t_i$  időpillanatokban rögzítjük az értékét, ezek rendre

$$f_1(t_i), f_2(t_i), f_3(t_i), \dots, f_n(t_i) \quad . \quad (2.13)$$

Ha  $n$  elég nagy, képezhetjük az ezen pillanatokban vett amplitúdók statisztikai átlagát (sztochasztikus folyamat úgy fogható fel, mint időpontról időpontra változó sűrűségfüggvényű valószínűségi változó). Az olyan sztochasztikus folyamatot, amelyben ezen statisztikus jellemzők időben változatlanok, **stacionáriusnak** nevezzük [3]. Az olyan folyamatokat, melyekre az első sűrűségfüggvény (2.3) időfüggetlen, a második (2.8) pedig a megfigyelési időkülönbségtől függ csak:

$$p_1(x, t_a) = p_1(x) \quad , \quad p_2(x, t_a, x', t_b) = p_2(x, x', t_b - t_a) \quad , \quad (2.14)$$

gyengén stacionáriusnak nevezzük. Ez a továbbiakban elegendő lesz a számunkra.

### Időbeli átlag

Legyen  $u(t)$  egy feszültségjel. A statisztikus átlagokhoz hasonlóan képezhetjük ezen időfüggvény különböző időpillanatokban felvett értékeinek az átlagát:

$$\langle u(t) \rangle_t = \lim_{t_a \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_a} \int_{-t_a}^{+t_a} u(t) dt \quad , \quad (2.15)$$

ezt elsőrendű időátlaglagnak nevezzük [3].

Szemléletesen: a feszültségjel elsőrendű időátlaga az egyenfeszültségi komponenst adja meg. Ugyanakkor a másodrendű időátlag a jel átlagteljesítményét adja:

$$\langle u^2(t) \rangle_t = \lim_{t_a \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_a} \int_{-t_a}^{+t_a} u^2(t) dt \quad . \quad (2.16)$$

(Hasonlóan az előzőekhez a magasabbrendű átlagok itt sem rendelkeznek szemléletes tartalommal.) Ha a váltakozó komponens teljesítményére vagyunk kíváncsiak, az átlagteljesítmény és az egyenkomponens teljesítményének a különbségéből kaphatjuk meg [3]:

$$\langle (u(t) - \langle u(t) \rangle_t)^2 \rangle_t = \langle u^2(t) \rangle_t - (\langle u(t) \rangle_t)^2 \quad . \quad (2.17)$$

Visszatérve a sztochasztikus folyamatokra: a stacionaritás azt jelenti, hogy mindegy az, hogy először az időtengely mentén

átlagolunk és ezután vesszük a statisztikus átlagot, vagy pedig fordítva. Azaz:

$$\langle M(f(t_j)) \rangle_t = M(\langle f_i(t) \rangle_t) . \quad (2.18)$$

Ha a fentiekén kívül az is teljesül, hogy a statisztikus és az időátlagok megegyeznek egymással:

$$M(f(t_j)) = \langle f_i(t) \rangle_t , \quad (2.19)$$

akkor a folyamatot **ergodikusanak** nevezzük [3]. A gyakorlatban legtöbbször ez az eset fordul elő, mivel csak egyetlen jeltől származik a vélelen folyamat oly módon, hogy a jelet időszakaszokra bontjuk, és ezeket tekintjük az egyes részfüggvényeknek. Ergodikusanak tehát a jel időátlagai statisztikus átlagoknak tekinthetők (és fordítva). Emiatt az elsőrendű időátlag megegyezik az elsőrendű momentummal, azaz a jel egyenkomponense a várható értékkel, a másodrendű időátlag (azaz a jel teljesítménye) a másodrendű momentummal, a váltókomponens 1 ohmra vonatkoztatott átlagteljesítménye pedig a szórásnégyzettel [3]. (Így tehát maga a szórás a váltókomponens effektív értékének felel meg.) A stacionaritás és az ergodikusság is definiálható magasabb rendben, amennyiben a (2.18) egyenlőség az adott rendig teljesül, a továbbiakban elegendőek a fent említett definíciók.

Egy fizikai rendszer vizsgálatakor stacionárius folyamatot kapunk, ha a rendszert termodinamikai egyensúlyi állapotában mérjük [8]. Az általunk vizsgált folyamatokat ilyeneknek tekintjük, így a továbbiakban, stacionárius, ergodikusanak folyamatokról beszélünk, ha a fenti tulajdonságokat nem is említjük.

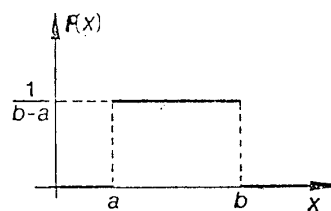
## 2.4 Valószínűségi sűrűségfüggvények

Az alábbiakban a további vizsgálatok során felhasznált sűrűségfüggvények alakjait láthatjuk.

### Egyenletes eloszlás

Egy  $\xi$  valószínűségi változó egyenletes eloszlású az  $[a, b]$  intervallumban, ha

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (2.20)$$



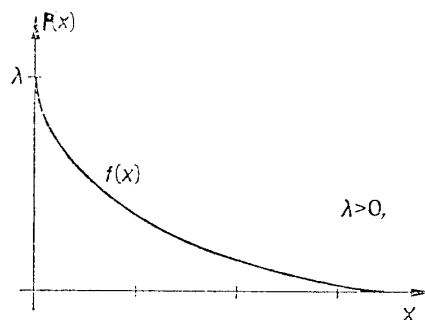
2.2 ábra Az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye [22].

A várható értéke  $M(\xi) = (a+b)/2$  és a szórásnégyzete  $D^2(\xi) = (b-a)^2/12$  [10].

### Exponenciális eloszlás

A  $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ahol } \lambda > 0 \text{ valós szám.} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad (2.21)$$



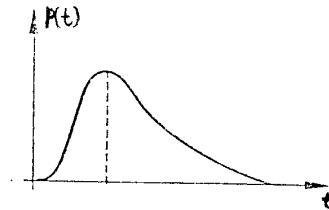
2.3. ábra Az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye [22].

A várható érték  $1/\lambda$ , a szórásnégyzet  $1/\lambda^2$ .

## Poisson-eloszlás

Az  $at$  paraméterű Poisson-eloszlás sűrűségfüggvénye [10]:

$$p(t) = \frac{(at)^m}{m!} e^{-at} \quad at > 0, \quad (2.22)$$



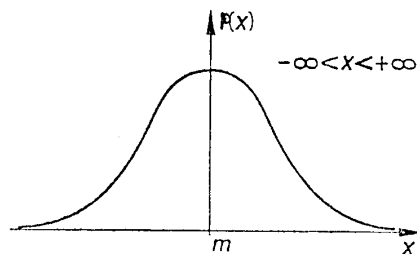
2.4. ábra A Poisson-eloszlás sűrűségfüggvénye [22].

ahol a várható érték és szórásnégyzet is  $at$ .

## Normális-eloszlás (Gauss-eloszlás)

Fizikai kísérletekben leggyakrabban előforduló a Gauss-eloszlás. Gyakoriságát a centrális határeloszlás tétel indokolja. A  $(\mu, \sigma)$  paraméterű normális eloszlás sűrűségfüggvénye [6]:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.23)$$



2.5. ábra A normális eloszlás sűrűségfüggvénye [22].

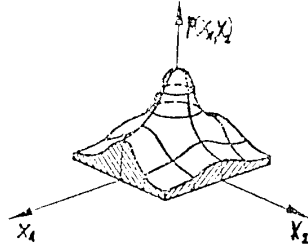
ahol  $\mu$  a várható érték,  $\sigma$  a szórás (ezenkívül az  $x=\mu$  helyen maximum, az  $x=\mu\pm\sigma$  helyen inflexióspont van).

## Együttes normális eloszlás

A  $\xi_1, \xi_2$  valószínűségi változók együttes normális eloszlásúak, ha

együttes sűrűségfüggvényük:

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}Q(x_1, x_2)}, \quad (2.24)$$



2.6. ábra Az együttes normális eloszlás sűrűségfüggvénye [22].

ahol

$$Q(x_1, x_2) = \frac{1}{1-\rho^2} \left[ \left( \frac{x_1-m_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{x_1-m_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{x_2-m_2}{\sigma_2} \right) + \left( \frac{x_2-m_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \quad (2.25)$$

a  $\sigma_1, \sigma_2, m_1, m_2, \rho$  valós állandók, melyekre  $\sigma_i > 0$ ,  $i=1,2$  és  $0 < \rho < 1$  [4][10]. Ezen állandóknak szemléletes jelentésük van,

$$\begin{aligned} M(\xi_1) &= m_1, & M(\xi_2) &= m_2 \\ D(\xi_1) &= \sigma_1, & D(\xi_2) &= \sigma_2 \\ R(\xi_1, \xi_2) &= \rho, \end{aligned} \quad (2.26)$$

azaz  $m_1$  és  $m_2$  a megfelelő változók várható értékét,  $\sigma_1$  és  $\sigma_2$  a szórást, a  $\rho$  korrelációs együtthatót adja. Ha több valószínűségi változó együttes eloszlása normális, akkor az egyes változók külön-külön mind normális eloszlásúak. Így  $\xi_1$  egy  $(m_1, \sigma_1)$ ,  $\xi_2$  pedig  $(m_2, \sigma_2)$  paraméterű normális eloszlású változó. Legyen  $(a_{ij})$  egy  $2 \times 2$ -es szimmetrikus, pozitív definit mátrix, legyen  $(b_{ij})$  az  $(a_{ij})$  inverz mátrixa. Ekkor a  $Q(x_1, x_2)$  kvadratikus formát átírhatjuk a

$$Q(x_1, x_2) = \sum_{i,j=1}^2 (x_i - m_i) b_{ij} (x_j - m_j) \quad (2.27)$$



alakba. Az  $(a_{ij})$  mátrix elnevezése a két változó kovarianciáját adó

$$M[(\xi_1 - m_1)(\xi_2 - m_2)] = a_{12} = \rho \sigma_1 \sigma_2 \quad (2.28)$$

összefüggésből adódóan **kovarianciamátrix**. Ezenkívül érvényesek a következő összefüggések:

$$\sigma_1^2 = \frac{b_{11}}{\|b\|} = a_{11}, \quad \sigma_2^2 = \frac{b_{22}}{\|b\|} = a_{22}. \quad (2.29)$$

Az  $(a_{ij})$  és a  $(b_{ij})$  mátrix a következő alakú:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & -\rho \sigma_1 \sigma_2 \\ -\rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1 \sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1 \sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Ha a korrelációs együttható  $\rho=0$ , a  $\xi_1$  és  $\xi_2$  korrelálatlanok. Ez általában nem jelent függetlenséget, de normális együttes eloszlás esetén ebből a függetlenség is következik. Fordítva, ha a  $\xi_1$  és  $\xi_2$  változók függetlenek, akkor az együttes sűrűségfüggvény szorzat alakra esik szét, amiből következik  $Q(x_1, x_2)$  alakját nézve a  $\rho=0$ .

Ha a  $\xi_1$  és  $\xi_2$  változók együttes eloszlása normális, akkor  $\xi_2$  feltételes eloszlása a  $\xi_1=x_1$  feltétel mellett szintén normális. Ennek konkrét alakját a később definiálandó átmenetmátrix ismeretében a 3.2. fejezetben látjuk.

## 2.5 Teljesítménysűrűség-spektrum, autkorreláció-függvény

Egy  $f(t)$  jel időbeli lefutásának (időbeli képének) amplitúdó statisztikájánál tovább is léphetünk. A Fourier-transzformáció alkalmazásával az időtartománybeli jelet a benne fellépő harmonikus komponensek amplitúdó- és fázisspektrumával írjuk le.

Ezek a frekvenciatartománybeli képek ekvivalensek az időtartománybeli képpel. Eszerint ha  $f(t)$  nem periodikus, véges energiájú jel és

$$\int |f(t)| dt < \infty \quad , \quad (2.31)$$

akkor

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{j2\pi f t} df \quad (2.32.a)$$

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad , \quad (2.32.b)$$

ahol tehát  $F(f)$  az  $f(t)$  jel Fourier-transzformáltja [3]. Más alakba átírva:

$$F(f) = A(f) e^{j\Phi(f)} \quad . \quad (2.33)$$

Az  $A(f)$  az  $f(t)$  amplitúdó spektruma,  $\Phi(f)$  a fázispektuma. (Az  $A(f)$  páros, a  $\Phi(f)$  páratlan függvény.)

Sok esetben elég, hogy egy fázis nélküli függvényt, a teljesítménysűrűség spektrumot használjuk jellemzésre [11]. A jel energiájára van tehát szükségünk. Ha  $f(t)$  periodikus a jel energiáját a (Parseval-tétel néven ismert) következő kifejezés adja [3]:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df \quad , \quad |F(f)|^2 = |A(f)|^2 \quad . \quad (2.34)$$

Ha azonban  $f(t)$  nem periodikus és nem tűnik el a véges időtartományban, vegyünk egy  $x(t)$  segédfüggvényt, amely  $f(t)$ -vel a  $[-t_0, t_0]$  időtartományban egyezik meg, egyébként pedig zérus.  $x(t)$  véges energiájú, felírhatóak a (2.32) összefüggések, és a segédjel energiáját a megfelelő (2.34) kifejezés adja. Az  $x(t)$

segédjel időtartama  $2t_0$ , ezzel az energiát osztva:

$$P_{t_0} = \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{+t_0} |X(f)|^2 df \quad (2.35)$$

a  $2t_0$  alatti átlagteljesítményt kapjuk. Ha  $t_0 \rightarrow \infty \Rightarrow x(t) \rightarrow f(t)$ :

$$P = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{+t_0} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_0} |X(f)|^2 \right) df \quad (2.36)$$

$$\text{Az } S(F) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_0} |X(f)|^2 \quad (2.37)$$

mennyiséget az  $f(t)$  jel **teljesítménysűrűség-spektrumának** nevezzük (valós, páros függvény) [3].

Ha képezzük az egymástól  $\tau$  távolságra lévő  $f(t)$  függvényértékek szorzatának időátlagát (felhasználva az  $x(t)$  segédfüggvényt):

$$R(\tau) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{+t_0} x(t)x(t+\tau) dt = \langle f(t)f(t+\tau) \rangle_t \quad (2.38)$$

az  $f(t)$  jel **autokorreláció-függvényét** kapjuk (valós, páros függvény) [3]. Értelmezése a következő: ha egy adott  $\tau_a$ -ban  $R(\tau_a) > 0$ , akkor az eredeti jelből az egymástól  $\tau_a$  távolságra lévő pontok nagy átlagban azonos; ha  $R(\tau_a) < 0$ , akkor ellentétes előjelűek. Ha  $R(\tau_a) = 0$ ,  $f(t)$  értékei annyiszor lehetnek ellentétesek, mint azonos jelűek, nincs korreláció köztük, azaz függetlenek. (Gauss-folyamatokra igaz a fordított állítás is.) Így ha  $R(\tau) = 0$  valamely  $\tau \geq \tau_b$ -től kezdve, akkor a  $\tau_b$ -nél nagyobb időkülönbségekre a jel jövőjére nézve jósolni nem lehet. Megemlítjük még, hogy az  $R(\tau=0)$  a jel átlagteljesítményét (egyben a szórásnégyzetét) adja.

Az autokorreláció-függvényt és a teljesítménysűrűségekspektumot a Wiener-Hincsin-tétel kapcsolja össze, mely szerint

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (2.39)$$

az autokorreláció-függvény Fourier-transzformáltja a teljesítménysűrűség [3].

### 2.5.1 Zajok osztályozása spektrális intenzitás szerint

A különféle eredetű zajok egy lehetséges csoportosítását a teljesítménysűrűség-spektrumuk alapján adhatjuk meg.

#### Fehérzaj

A konstans teljesítménysűrűség-spektrumú zajokat fehérnek nevezzük:

$$S(f) = konst. \quad (2.40)$$

Ilyen alakban az energiáját kiszámítva, végtelennek adódik. A Wiener-Hincsin-tétel alapján az autokorrelációs függvénye a Dirac-féle  $\delta$  függvény, ami azt jelenti, nincs korreláció a jel értékei között. A reális fehérzajú jelek sávkorlátoltak. Fehérzajt mutat például egy R értékű ohmos ellenállás. Ezt a zajt termikus zajnak is nevezik, T hőmérsékleten  $S(f) = 4kTR$  a spektrum értéke, konstans, ahol k a Boltzmann-állandó [15].

#### 1/f<sup>2</sup>-zaj

Ha a teljesítménysűrűség-spektrum

$$S(f) = C \frac{1}{f^2}, \quad C = konst. \quad (2.41)$$

alakú, akkor 1/f<sup>2</sup>-zajról beszélünk. A fehér zajhoz hasonlóan ez

is gyakori. Ez a következőkkel magyarázható: fizikai rendszerekben gyakori jelenség, hogy egyik mennyiség a másik integráljaként (vagy deriváltjaként) adódik. A Fourier-transzformáció

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n F(f) \quad (2.42)$$

tulajdonsága miatt a fehér zaj (időbeli) integráljaként adódó zaj  $1/f^2$ , az  $1/f^2$  zaj deriváltjaként adódó zaj pedig fehér spektrumú.  $1/f^2$  zajt mutat például egy Brown-mozgást végző részecske [16].

### Az $1/f$ zaj

A természetben a legkülönbözőbb területeken előforduló zajtípus. Megtalálható a félvezető eszközökben, a biológiai rendszerekben is. Ide az  $1/f^\alpha$ , ahol  $\alpha \approx 1$  spektrumú zajok tartoznak. A szigorúan  $\alpha=1$  kitevőjű jel végtelen energiájú, reális esetben sávkorlátozottnak kell lennie. Az alsó határfrekvencia meghatározhatósága a mérések véges időtartama miatt korlátozott. Félvezető eszközökre  $10^{-6}$  Hz frekvenciáig kimutatható az  $1/f$  függés. Egyes esetekben ez az alsó határfrekvencia  $10^{-10}$  Hz, ami 300 éves ciklusoknak felel meg [21].

### Lorentzi zajok

Az exponenciális lecsengésű autokorreláció-függvénnyel rendelkező zajok teljesítménysűrűség-spektuma a Wiener-Hincsin-tételből adódóan Lorentzi :

$$R(\tau) = C \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \leftrightarrow S(f) = C \frac{\tau_0}{1 + (2\pi f \tau_0)^2} \quad (2.43)$$

Belátható, hogy a Poisson-folyamatokra ezek a kifejezések fennállnak [5]. Ha egymástól független Poisson-folyamatokat

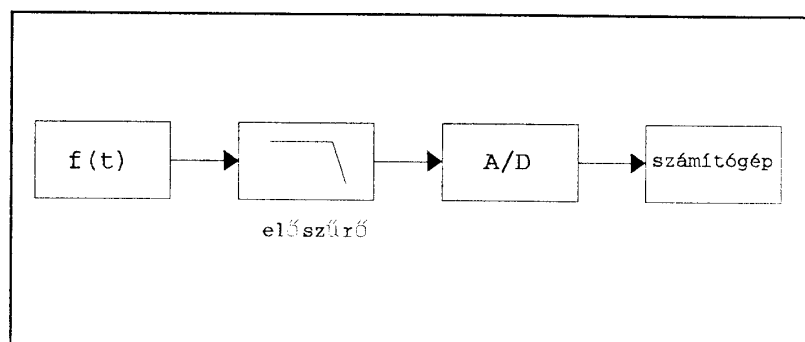
összegzünk, a  $\tau_0$  értékekre pedig  $g(\tau)=1/\tau$  eloszlást feltételezünk, sávkorlátolt  $1/f$  zajt kapunk [9], melyet a 3.2.2 fejezetben bemutatott számítógépes modellben használunk ki.

A fent említett zajtípusok teljesítménysűrűség-spektrumainak ábráit a későbbiekben láthatjuk.

## 2.6 Digitális jelfeldolgozás

Analóg jelek analóg áramkörökkel való feldolgozása sok esetben célravezetőbb, mint a digitális feldolgozás, viszont az utóbbi alkalmazásával számos olyan szolgáltatás érhető el, ami teljesen más alagra helyezi a jelekkel való mérést.

A jelfeldolgozás első lépése az analóg jelek diszkrét idejűvé és értékűvé való alakítása, azaz digitalizálása. A (2.7) ábrán az analóg jelek feldolgozásának lépéseit láthatjuk a mintavételezéstől a szoftveres felhasználásig.



2.7. ábra A jelfeldolgozás folyamata.

Ezen fejezetben az egyes lépéseket alátámasztó tételeket tárgyaljuk.

### 2.6.1 A mintavételezés elmélete

Az elektromos jeleket egy A/D (analóg/digitál) konverteren keresztül mintavételezzük. Hogy ez a diszkrét idejűvé való jelalakítás milyen frekvenciával történjék, a Shannon és Nyquist által megfogalmazott tételek adnak felvilágosítást [11]. A mintavett jelet származtassuk az eredeti  $f(t)$  jel és egy ún.  $s(t)$  mintavevő jel szorzataként:  $f_{mv}(t) = f(t) \cdot s(t)$ , ahol  $f_{mv}(t)$  a mintavett függvényt jelenti. Ekkor igazak a következő állítások [3]:

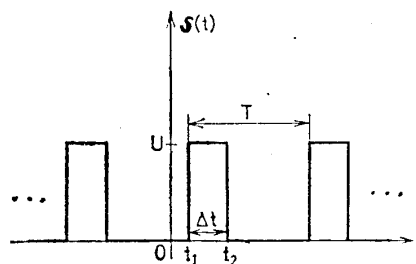
1. Egy sávhatárolt jelet (amely nem tartalmaz  $f_{max}$ -nál nagyobb frekvenciájú tagokat) egyértelműen meghatározzák a jel  $1/2f_{max}$  vagy ennél sűrűbben vett értékei. A mintavételezés során így információ nem vész el, ami a 2. állításnak felel meg.
2. Az 1. tétel szerint mintavett jelet egy  $f_{max}$  határfrekvenciájú aluláteresztő szűrőn engedve át, az eredeti jelet kapjuk vissza.

Bizonyítás:

Az  $s(t)$  mintavevő függvény legyen a következő impulzussorozat (2.8. ábra):

$$s(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } t_1 \leq t < t_2 \\ 0 & , \text{ ha } t_2 \leq t < t_1 + T \end{cases} \quad (2.44)$$

$$S(t+kT) = s(t) \quad -\infty < k < \infty$$



2.8. ábra A mintavételező impulzussorozat.

Azaz egy, a valóságosnak megfelelő, véges idejű mintavételezést tételezünk fel.

Az  $s(t)$  Fourier-sora:

$$s(t) = \frac{\Delta t}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(n\omega_0 \frac{\Delta t}{2})}{n\omega_0 \frac{\Delta t}{2}} e^{jn\omega_0 t} \quad , \text{ ahol } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad . \quad (2.45)$$

Ezzel a mintavett függvény a következő alakú:

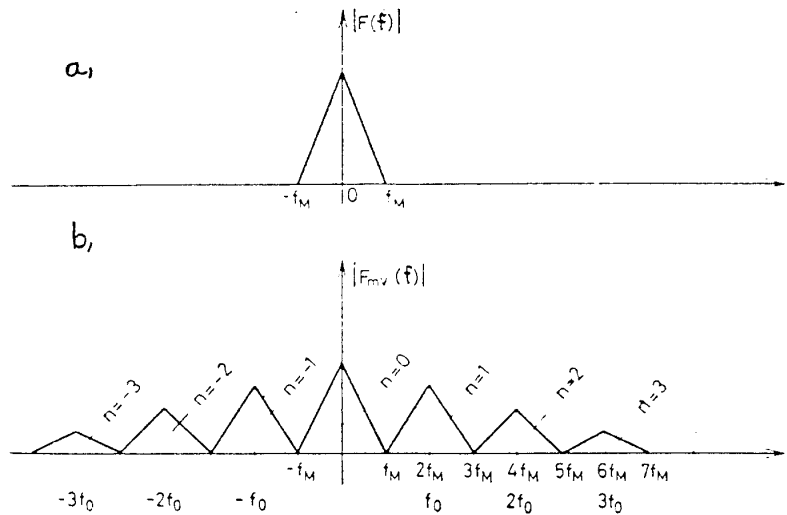
$$f_{mv}(t) = f(t) \cdot \frac{\Delta t}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(n\omega_0 \frac{\Delta t}{2})}{n\omega_0 \frac{\Delta t}{2}} e^{jn\omega_0 t} \quad . \quad (2.46)$$

A Fourier-transzformáltja:

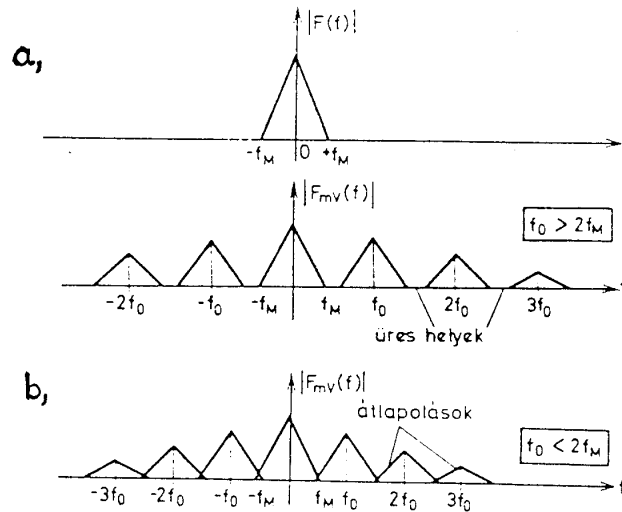
$$\begin{aligned} F_{mv}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{mv}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\Delta t}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(n\omega_0 \frac{\Delta t}{2})}{n\omega_0 \frac{\Delta t}{2}} e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{\Delta t}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(n\omega_0 \frac{\Delta t}{2})}{n\omega_0 \frac{\Delta t}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi(f-nf_0)t} dt \quad , \text{ emiatt} \\ F_{mv}(f) &= \frac{\Delta t}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(n\omega_0 \frac{\Delta t}{2})}{n\omega_0 \frac{\Delta t}{2}} \cdot F(f-nf_0) \quad . \quad (2.47) \end{aligned}$$

Azaz véges,  $\Delta t$  idejű impulzussorozattal mintavett jel spektruma az eredeti sávhatárolt jel spektrumából egyszerű eltolással adódik. Ebből azonban már a második állítás is kiolvasható. Önkényesen tegyük fel ugyanis, hogy az eredeti  $f(t)$  jel spektruma az origóra nézve egy szimmetrikus háromszögalak (2.9/a ábra), a 2.9/b ábrán ekkor látható, hogy  $f_{mv}(t)$  spektrumában az előző  $F(f)$  ismétlődik  $f_0$  egész számú többszöröseinél, és ezen eltoltak amplitúdói a  $\sin(x)/x$  kifejezés következtében egyre csökkenő tendenciát mutatnak. Itt most pontosan a 2. állításban foglalt





2.9. ábra A sávhatárolt (a) és a mintavett jel (b) spektruma véges idejű mintavétel esetén ( $f_{mv}=f_0=2f_{max}$ ).



2.10. ábra A mintavett jel amplitúdóspektruma, ha  $f_0=f_{mv}>2f_{max}$  (a), ill. ha  $f_{mv}<2f_{max}$  (b).

$f_{mv}=2f_{max}$  esetet választottuk. Ekkor egy  $f_{max}$  határfrekvenciájú, ideális szűrővel visszkapjuk az eredeti (bár amplitúdóban kisebb),  $-f_{max}<f<+f_{max}$  sávba foglalt jelet.

A gyakorlatban a végtelen meredek levágású szűrő megvalósíthatatlansága miatt az  $f_{mv} > 2f_{max}$  esetet választjuk, így egy véges levágási meredekségű aluláteresztő szűrő is elég az eredeti jel különválasztására, mert van üres hely a felhasznált

sávok között: 2.10/a ábra. Abban az esetben azonban, ha a mintavételi frekvenciára kirótt feltételt nem tartjuk be, az  $f_{mv}(t)$  egyes spektrumrészei átlapolódnak és az eredeti jel spektrumát már nem lehet különválasztani, torzulások lépnek fel (2.10/b ábra).

### Előszűrő, A/D konverter

A gyakorlati megvalósítás során, hogy a jel sávhatárolt legyen, előmintavételezési szűrőt kell alkalmazni, melyet nagy levágási meredekség jellemez [11].

A fenti elven sávhatárolt jel az analóg-digitál átalakítóba jut. Itt egy kvarcoszcillátor által vezérelt órajel ütemére megtörténik a mintavételezés. Egy tartó áramkör ezt az értéket mindaddig hozzáférhető módon tartja, míg a diszkrét értékűvé való átalakítás (azaz a bináris kódolás) meg nem történik. Az így kapott bináris szavak a számítógép memóriájába beolvashatók, és további átalakításuk a felhasználó által alkalmazott szoftverektől függ.

### 2.7 Markov-folyamatok

Legyen a vizsgált fizikai rendszerünk lehetséges állapotainak a száma egy diszkrét halmaz:  $A$ . Jelöljük ezeket az állapotokat a  $0,1,2,\dots$  számokkal. A rendszer időben állapotváltozásokat végez, ezen állapotait a  $t=0,1,2,\dots$

időpontokban megfigyeljük. A  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$  valószínűségi változókat definiáljuk a következőképpen:

$\xi_n = i$ , ha a rendszer a  $t = n$  időpontban az  $i$  állapotban van. A  $\xi_0$  a kiinduló állapotot jelzi. A rendszer állapotváltozásainak sorozatát elsőrendű Markov-láncnak nevezzük, ha bármely  $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$  időpontok és  $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$  állapotok esetén :

$$P(\xi_{t_{n+1}} = k_{n+1} | \xi_{t_1} = k_1, \dots, \xi_{t_n} = k_n) = P(\xi_{t_{n+1}} = k_{n+1} | \xi_{t_n} = k_n) \quad (2.48)$$

azaz a rendszer  $t_{n+1}$ -beli történetének valószínűségét egyértelműen meghatározza a  $t_n$  időpillanatbeli állapota [4,5,10].

A magasabb rendű Markov-folyamatok "emlékezete" több múltbeli állapotra is kiterjed, ezek vizsgálatához a 2.2.1 fejezetben látott módon kettőnél több valószínűségi változót és ezek jellemzőit kellene bevezetni. A továbbiakban csak elsőrendű folyamattal foglalkozunk, így elegendő csak két valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvényét vizsgálni. Ezenkívül folyamatos Markov-folyamat is definiálható lenne, de a diszkrét idejű mintavételezés miatt eleve csak diszkrét realizációjukban vizsgálhatók [12].

### Átmenetvalószínűségek

Az alábbi valószínűségeket  $r$  lépéses átmenetvalószínűségeknek nevezzük:

$${}_n P_{ik}^{(r)} = P(\xi_{n+r} = k | \xi_n = i) \quad (2.49)$$

Ennek szemléletes jelentése az, ha feltesszük, hogy  $i$  állapotból indultunk ki, annak a valószínűsége, hogy  $r$  lépés után a  $k$

állapotba jutunk az  $i, k$  mátrixelemmel egyenlő. Az átmenetvalószínűségek az időnek is függvényei. Ha  ${}_n P_{ik}^{(r)}$  független  $n$ -től (azaz időfüggetlen), a Markov-láncot homogénnek vagy stacionáriusnak nevezzük. Ebben az esetben az  $n$  index el is hagyható. A valószínűségeket egy mátrixba foglalhatjuk össze, és átmenetvalószínűség-mátrixnak nevezzük:

$${}_n P_{ik}^{(r)} = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} & \cdots \\ \vdots & & & \\ P_{n1} & & P_{nn} & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \end{pmatrix}, \quad \text{ahol} \quad (2.50)$$

$$P_{ij} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik} = 1. \quad (2.51)$$

Ez egy végtelen négyzetes mátrix, melynek  $i+1$ -edik oszlopa  $\xi_{n+1}$  értékének valószínűségi eloszlását adja, azon feltétel mellett, hogy  $\xi_n = i$ . Ha az állapottér véges, akkor  $P_{ij}^{(r)}$  véges négyzetes mátrix. A folyamatot teljesen meghatározza az egylépéses átmenetmátrixa és a folyamat  $t=0$  pillanatbeli valószínűségeloszlása [10].

Egylépéses átmeneti valószínűségekre:  $r=1$ , el is hagyható az  $r$  index:

$$P_{ik}^{(1)} = P_{ik}. \quad (2.52)$$

Ha  ${}_n P_{ij}^{(1)}$   $n$ -től független, akkor

$${}_n P_{ij}^{(r)} = (P_{ij}^{(1)})^r \quad (2.53)$$

az  $r$  lépéses átmenetvalószínűségek mátrixa egyenlő az egylépéses átmeneti valószínűségek mátrixának  $r$ -edik hatványával [4]. Ezt másképpen is kifejezhetjük:

$$\text{ha } r=r_1+r_2 : P_{ik}^{(r)} = \sum_{j=1}^n P_{ij}^{(r_1)} P_{jk}^{(r_2)}. \quad (2.54)$$

Ezt Markov-féle egyenlőségnek nevezzük.

### Ergodicitás

Ha annak a valószínűsége, hogy a folyamat kezdetben a  $j$  állapotban volt:  $P_j$ , azaz  $\xi_0$  eloszlása  $P(\xi_0=j)=p_j$ , akkor annak a valószínűsége, hogy az  $n$ -edik pillanatban a folyamat a  $k$  állapotban van, éppen

$$P_k^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \cdot P_{jk}^{(n)} = P(\xi_n=k) \quad (2.55)$$

A folyamat együttes eloszlásának meghatározásán felül érdekes kérdés a  ${}_n P_i$  mátrixok aszimptotikus viselkedésének megállapítása, ha  $n \rightarrow \infty$ . Az várható, hogy a kezdeti állapot hatása egyre jobban mérséklődik, és így ha  $n \rightarrow \infty$ ,  ${}_n P_i$  az  $i$  értékétől független határértékhez tart. Egy Markov-lánc ergodik, ha léteznek a következő határértékek :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ik}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} P_1 & \dots & P_n \\ \vdots & & \vdots \\ P_1 & \dots & P_n \end{pmatrix} = (P_1 \dots P_n), \text{ ahol } (2.56)$$

a  $k=1,2,\dots, r=0,1,2,\dots$  [4]. Azaz bármely  $i$  állapotból indulunk ki, sok lépés után  $i$ -től független  $P_k$  valószínűséggel lesz a rendszer a  $k$  állapotban.

### Markov tétele

Egy véges sok állapotú homogén Markov-lánc akkor és csak akkor ergodik, ha van olyan  $(P_i^1)^v$   $v$ -dik hatvány, melynek legalább egy oszlopában minden elem pozitív [4]. A  $P_k$  határértékekhez való

konvergencia exponenciális sebességű. Azaz van olyan  $v$  lépésszám, és legalább egy olyan állapot, melybe  $v$  lépéssel minden más állapotból pozitív valószínűséggel eljuthatunk.

#### Példa Markov-láncre

Vizsgáljunk egy olyan egydimenziós bolyongást, azaz Brown-mozgást, melynek állapottere az egészek véges vagy végtelen halmaza. A részecske, ha  $i$  állapotban volt, egy átmenet alkalmával az  $i-1, i, i+1$  állapotok valamelyikére mehet át. Az átmenetivalószínűség-mátrix:

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \dots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

alakú, ahol  $p_k > 0, q_k > 0, r_k \geq 0$ ,  $q_k + r_k + p_k = 1$  és  $k = 1, 2, \dots, 255$ .

Ha  $\xi_n = k$ , akkor  $k \geq 1$  esetén:

$$\begin{aligned} P(\xi_{n+1} = k+1 | \xi_n = k) &= p_k, \\ P(\xi_{n+1} = k-1 | \xi_n = k) &= q_k, \\ P(\xi_{n+1} = k | \xi_n = k) &= r_k. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Az egész számokon való szimmetrikus bolyongáson olyan Markov-láncot értünk, melynek állapottere az összes egész szám és átmenetmátrixja a következő elemekből áll:

$$P_{ij} = \begin{cases} p & , \text{ ha } j = i+1 \\ p & , \text{ ha } j = i-1 \\ r=0 & , \text{ ha } j = i \end{cases} \quad i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.59)$$

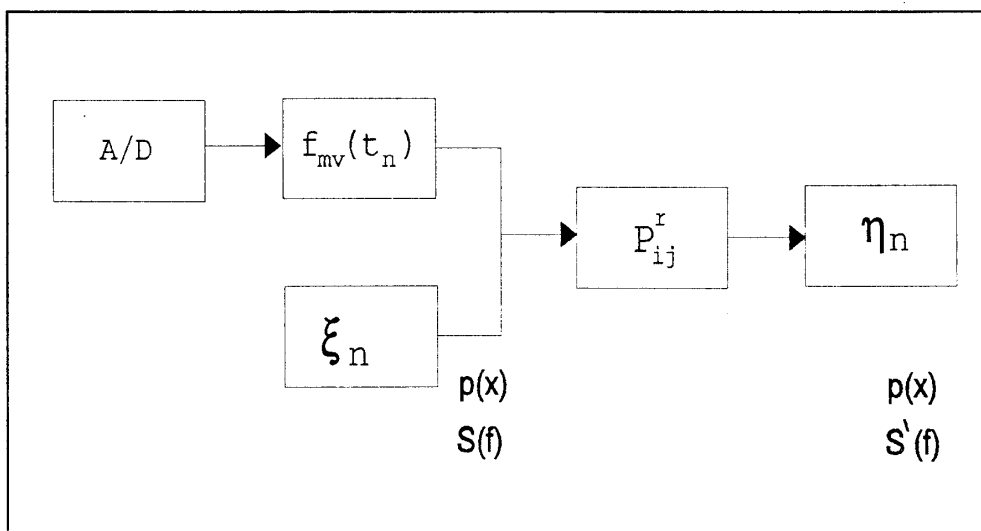
Ekkor a (2.57) alatti összegre vonatkozó kifejezésből:  $p = 1/2$ .

### 3. Számítógépes modellek

A dolgozat azzal a kérdéssel foglalkozik, jellemző-e a markovi tulajdonság az 1/f folyamatokra. Két számítógépes és két kísérleti áramköri modellel előállított 1/f folyamatot készítettünk. A markovi tulajdonság vizsgálatára egy algoritmus állítható fel. Az algoritmus tesztelése érdekében a modellezést Brown-mozgásra és fehérzajra is elvégeztük. A következőkben ezek részleteit és a mérési eredményeket tárgyaljuk.

#### 3.1 Mérési elv

Sztochasztikus jelek markovi tulajdonságának vizsgálata arra a gondolatra épül, miszerint vizsgáljuk meg, hogy egy jel (korrelációs időn belüli)  $\tau$  időeltolással kapott átmenetmátrixából visszagenerálható új időfolyamat azonos-e az eredeti jellel. Ez a (3.1) folyamatábrán bemutatott algoritmus elvégzését jelenti:



3.1. ábra A markovi tulajdonságot ellenőrző algoritmus.

Az ábrán minden egyes blokk egy-egy számítógépes programot jelöl, a blokkokban pedig ezen programok eredménye látható. Az egyes blokkokhoz tartozó algoritmusokat a következőkben tárgyaljuk részletesen. Az ábra bal oldalán egy, a (2.7) ábrán látottaknak megfelelően mintavételezett és digitalizált jelet ( $f_m(t_n)$ ), és egy számítógépes modellel nyert zajfolyamatot ( $\xi_n$ ) jelöltünk bemenetként. Ezen bemenő jeleket a valószínűségi sűrűségfüggvényük és a teljesítménysűrűség-spektrumuk alapján jellemezzük. Az algoritmus bemenő és az eredményeképpen kapott jeleinek összevetését tehát ezen két függvény menete alapján végezzük.

A bemenő jelből empirikusan meghatározzuk az átmenetmátrixot ( $P_{ij}$ ), majd ebből visszageneráljuk az időfolyamatot ( $\eta_n$ ). Az utóbbi lépést, és így az egész algoritmust az ún. inverzelem módszer támasztja alá, melyet később részletesen ismertetünk. Ezen eljárás miatt az algoritmus eredményeképpen kapott folyamat valószínűségrűsűség függvénye megegyezik a bemenő időfolyamat sűrűségfüggvényével. Tehát ha közben, hogy az átmenetmátrixot meghatározzuk, információ nem vesz el (mivel egy Markov-folyamatot az átmenetmátrixa egyértelműen leírja), a jobb oldalon kapott időfolyamatnak az eredeti spektrumot is vissza kell adnia:  $S'(f)=S(f)$ . Az átmenetmátrix létrehozásakor a bemenő jelértékek korrelációja fontos paraméter, jelentésére és mérésére később visszatérünk.

Mielőtt a konkrét megvalósításra rátérnénk, végezzünk egy előzetes becslést az eredményekre vonatkozóan. Egy ideális 1/f zajhoz, divergencia miatt, a (2.39)-ben definiált autokorreláció függvény nem rendelkezhető, de egy sávhatárolt 1/f zaj autokorreláció függvénye létezik, és logaritmikus lecsengésű [9]:



$$\text{ha } S(f) = \begin{cases} \frac{C}{f} & f_1 < f < f_2 \\ 0 & f < f_1 \text{ vagy } f > f_2 \end{cases}$$

$$\frac{R(\tau)}{\langle u^2(t) \rangle} \approx 1 - \frac{C - \ln(2\pi f_2 \tau)}{\ln(f_2/f_1)}, \quad \text{ha } \frac{1}{f_2} \ll \tau \ll \frac{1}{f_1}. \quad (3.1)$$

Azaz a folyamat "memóriája" hosszú hatótávolságú. Diszkrét időlépésekben gondolkodva ez azt jelenti, hogy a folyamatot az elsőrendű átmenetmátrixa nem biztos, hogy kielégítően jellemzi. A belőle visszagenerált folyamat esetleg nem azonos az eredetivel, és nem  $1/f$  spektrumú. Van azonban olyan folyamat, mégpedig a Brown-mozgás, amely hasonlóan erősen korrelált az egymásutáni állapotaira nézve (ugyanis  $1/f^2$  zaj "memóriája" is végtelen hatótávolságú), mégis markovi folyamat, tehát leírható egy lépéses átmenetmátrixával. Célunk annak eldöntése, hogy a gaussi  $1/f$  zaj rendelkezik-e a reprodukálhatóságot maga után vonó markovi tulajdonsággal.

### 3.1.1 Az algoritmus lépései

Kövessük végig a (3.1) folyamatára egyes lépéseit. Ezen részprogramok minden egyes konkrét modellben azonosak. Eltérés csak a zajfolyamatok generálásának módjában van, ezeket a megfelelő modellek tárgyalásánál látjuk majd.

### A sűrűségfüggvény és a spektrum mérése

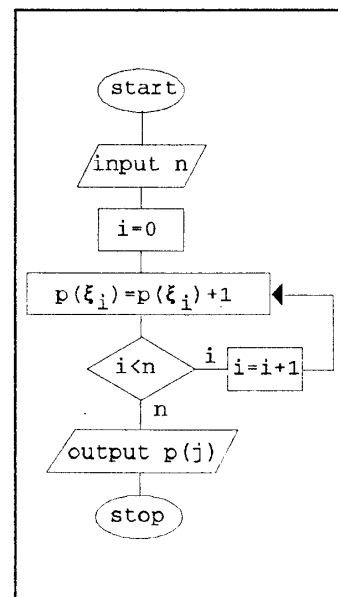
Az algoritmus bemenő időfüggvényének paraméterei tehát a sűrűségfüggvénye és a spektruma. A digitális feldolgozás miatt a vizsgálat során alkalmazásra került valószínűségi sűrűségfüggvényeket és spektrumokat a 2. fejezetben definiált megfelelő folytonos függvények diszkrét realizációjának

tekinthetjük. A Markov-folyamatok bevezetésénél látott  $t=0,1,2,\dots$  időpontokban beérkező  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$  lehetséges értékek egy véges diszkrét halmazt alkotnak, azaz a modellezett fizikai rendszerünk állapotainak halmaza a továbbiakban legyen az  $A=\{0,1,2,\dots,255\}$  halmaz. Az így egymásután érkező értékeket nagyságuk szerint szelektálva a relatív gyakoriságaikat kell feljegyezni. A (2.2) kifejezés szerint értelmezhető a  $P(\xi_i=j)=p_j$  valószínűség minden  $j=0,1,2,\dots,255$  diszkrét értékre. A valószínűségi sűrűségfüggvényt ezáltal tapasztalati úton származtatjuk a programban elhejezett

$$P(j) = P(j) + 1 \quad (3.2)$$

értékadó utasítással, ahol  $\xi_i=j$  egy beérkezett zajértéket jelent.

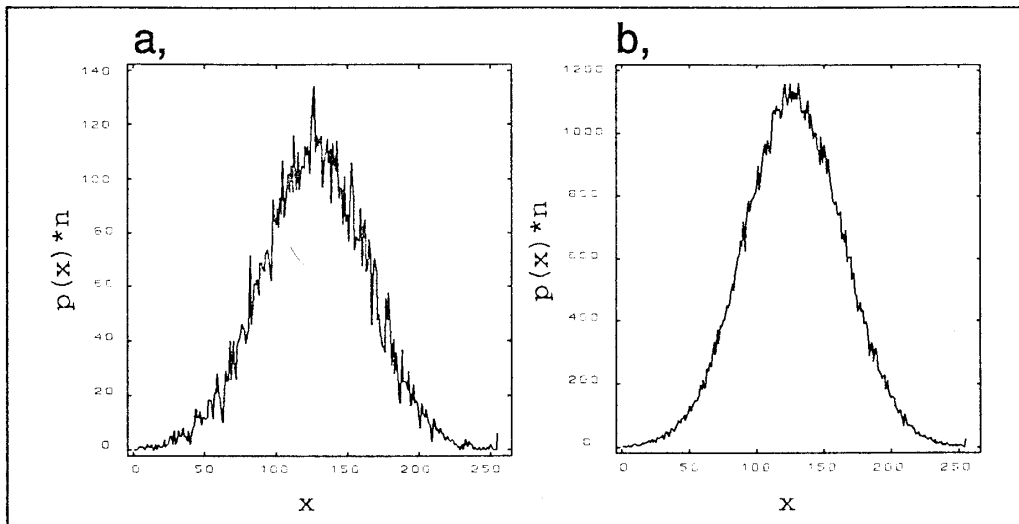
Az algoritmust a (3.2) ábrán láthatjuk. A konkrét megvalósítás során először 1024 db elemmel feltöltünk egy  $q$  tömböt, majd ezt a ciklust a  $P(q(i))=P(q(i))+1$  sorral egy újabb külső ciklusba ágyazva, azt sokszor végrehajtjuk. Ekkor tehát  $n=k*1024$  adatot használtunk fel, ahol a  $k$  értékét a továbbiakban a minták számának nevezzük. Az így kapott  $P$  vektor elemeinek a mérések számával ( $n$ -el) való osztása, azaz a tényleges relatív gyakoriságok kiszámítása



3.2. ábra A sűrűségfüggvény előállítás.

felesleges feladat, mivel a függvényt ábrázoló programok a tengelyeket megfelelően skálázzák. Így csak a tengelyek

beosztásait kell pontosan megadni. A (3.3) ábrán kettő így készült sűrűségfüggvényt láthatunk különböző számú mintából kiértékelve. Ezzel az eljárással stacionárius elsőrendű

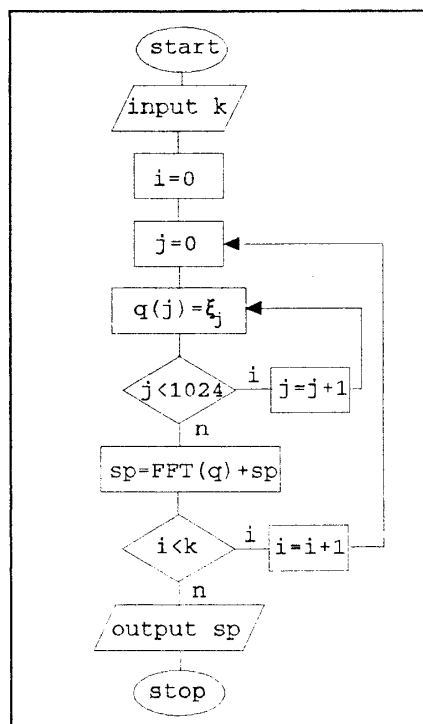


3.3. ábra Empírikusan meghatározott sűrűségfüggvények  
a,  $k=10$ ; b,  $k=100$  mintára.

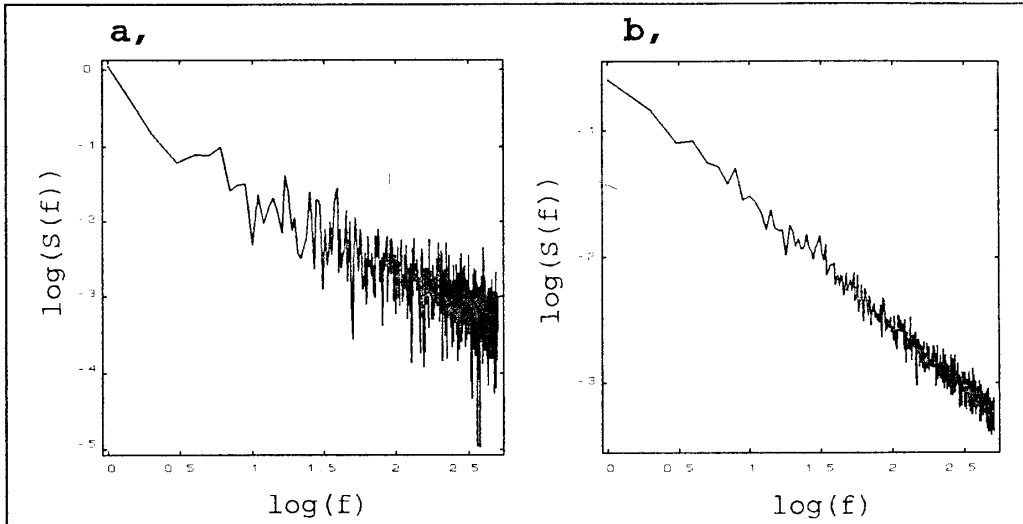
sűrűségfüggvényeket kapunk.

A teljesítménysűrűség-spektrum kiszámítását, ha a minták elemeinek számát kettő hatványaként választjuk meg, egy FFT (Fast-Fourier-Transformation) néven ismert algoritmussal végezhetjük [11]. Az FFT eljárást a programban egy függvényként kell meghívni, amint ez a (3.4) folyamatábrán látható. Az ábrán látott  $sp$  tömbben a  $q$ -beli időfüggvények mintánkénti spektrumainak átlagát tároljuk. A (3.5) ábrán egy  $1/f$  zaj így készült spektrumai láthatók.

Itt említjük meg még egyszer, hogy statisztikus folyamatok véges



3.4. ábra A spektrum  
kiszámításának  
algoritmusa.



3.5. ábra  $1/f$  zaj spektrumai a,  $k=2$ ; b,  $k=30$  mintára átlagolva.

megfigyelési időtartam alatt meghatározott paraméterei mindig csak becsült értékek, és ezek is statisztikusan ingadoznak az elméleti értékek körül. Hogy ez a statisztikai hiba kicsi maradjon, az egymástól független méréseket átlagolni kell.

#### Átmenetmátrix, együttes sűrűségfüggvény

A valószínűségi sűrűségfüggvény mérésénél látottakhoz hasonlóan az egymástól  $r$  lépésközre beérkezett értékek között értelmezhető

$$P(\xi_{n+r}=j|\xi_n=i) \quad (3.3)$$

feltételes valószínűségeket tapasztalati úton származtatjuk. A lehetséges  $(i,j)$  párosítások, ahol  $i,j= 0,1,\dots,255$ , relatív gyakoriságai sok mérés után konvergálnak. A megvalósítás ismét az, hogy sok ilyen  $(i,j)$  párt vizsgálva, egy lehetséges pár minden egyes előfordulása esetén a  $P$  mátrix  $p_{ij}$  elemét 1-gyel növeljük. Így az átmenetmátrix elemeinek megadása a (3.4) utasítás szerint történik:

$$P^r(q(i), q(i+r)) = P^r(q(i), q(i+r)) + 1, \quad (3.4)$$

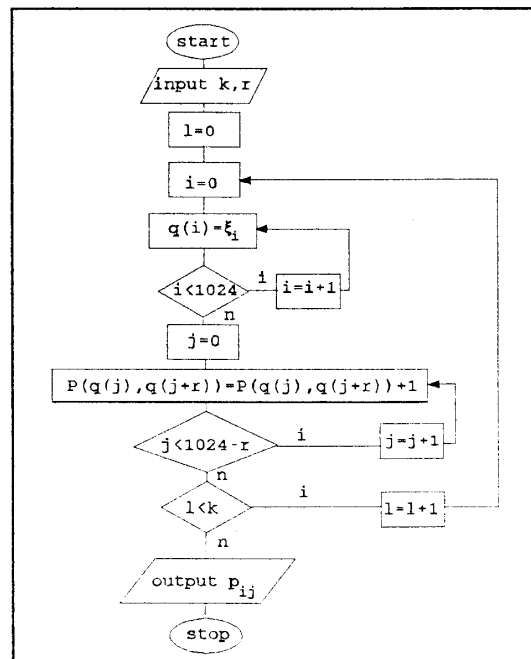
ahol a  $q(i)$  vektorban ( $i=0,1,\dots,1023$ ) az egymás után generált véletlen értékek vannak tárolva. A mérés egy elemi művelete most is egy ilyen vektor feltöltését jelenti. Ebből a vektorból egy  $r$  ( $r=1,2,3,\dots$ ) számú elemmel való eltolással  $1024-r$  db párt olvashatunk ki. A (3.4) sort tehát egy  $1024-r$  párt kiértékelő ciklusba, majd ezt egy külső ciklusba ágyazva, és azt ismét sokszor futtatva a  $P$  mátrixban egy együttes eloszlás sűrűségének diszkrét realizációját kapjuk. Elegendő csak az együttes sűrűségfüggvény, mivel ebből az  $r$ -lépéses átmenetmátrixot a

$$P^r(\xi_{n+r}=j | \xi_n=i) = \frac{P(\xi_{n+r}=j, \xi_n=i)}{P(\xi_n=i)} \quad (3.5)$$

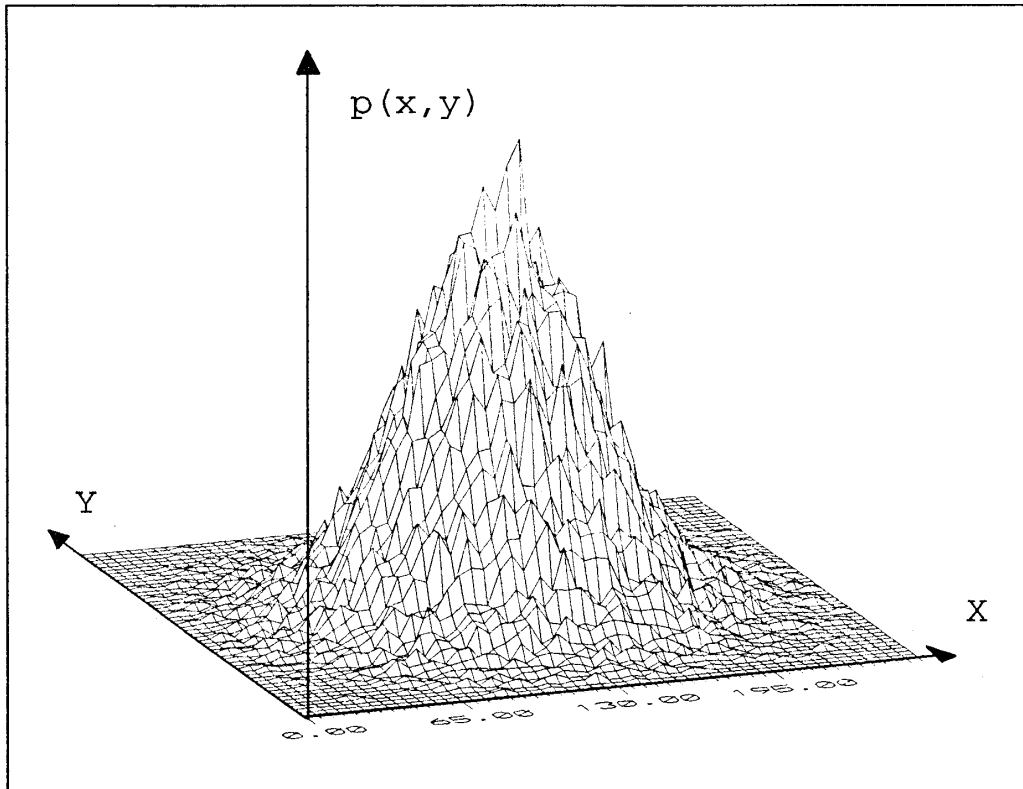
a (2.7) feltételes valószínűségekre vonatkozó összefüggés alapján

nyerhetjük, mivel  $P(\xi_n=i)$  ismert az ugyancsak a méréskor felvehető valószínűségsűrűség alapján. Az algoritmust a (3.6) ábrán láthatjuk. Ily módon egy stacionárius másodrendű valószínűségi sűrűségfüggvényt mérünk. A (3.7) ábrán egy fehérzaj így származtatott együttes sűrűségfüggvényét láthatjuk.

A mérések során így nyert átmenetmátrix egy  $256 \times 256$ -os ( $|A|=256$ ) négyzetes, homogén mátrix.



3.6. ábra Az átmenetmátrix előállítás.



3.7. ábra Együttes sűrűségfüggvény  $k=1500$  mintából.

A konkrét méret említésével magyarázhatóvá válik az állapothalmaz mérete is. A Shannon-tételnek megfelelő,  $f_{av}$  frekvencia megválasztásával az időfolyamatok leírása csak az amplitúdóértékek finomabb beosztásával javítható. Az analóg-digitál konverter 12 bites bináris számokat szolgáltat. Hogy ebből mégis csak 8 bitet ( $2^8=256$ ) használunk fel, annak az oka az, hogy az átmenetmátrix mérete, és így a számolási idő is az állapotok számával négyzetesen nő. Egy mátrixelemet 4 byte-on ábrázolunk. Így esetünkben az átmenetmátrix 256 Kbyte-os mérete az amplitúdóbeosztás szempontjából is megfelelőnek bizonyult.

## Kimeneti sűrűségfüggvény és spektrum

Az együttes sűrűségfüggvény elkészültével már csak az utolsó lépés van hátra, azaz vissza kell generálni a sűrűségfüggvénynek megfelelő folyamatot. Ezt az inverzelem módszerrel végezzük. (A módszert alátámasztó tétel feltételez egy egyenletes eloszlású generátort, rendelkezésünkre állt egy ún. additív véletlenszám-generátor, amellyel egyenletes eloszlású fehérzajt állíthatunk elő.) A tétel a következő [13]:

Legyen adott a  $\xi$  valószínűségi változó  $f(x)$   $x \in [a, b]$  sűrűségfüggvénye, melynek eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \int_a^x f(y) dy \quad . \quad (3.6)$$

Legyen  $u$  egyenletes eloszlású a  $[0, 1)$  intervallumban, ekkor  $F^{-1}(u)$  valószínűségi változó eloszlásfüggvénye  $F(x)$ . Bizonyítása egy sor:

$$P(F^{-1}(u) \leq x) = P(u \leq F(x)) = F(x) \quad . \quad (3.7)$$

Tehát egy  $u$  véletlen értékhez az  $x = F^{-1}(u) \in [a, b]$  értéket kapjuk. Ekkor azonban hallgatólagosan feltettük, hogy létezik  $F^{-1}$  (azaz hogy  $F$  szigorúan monoton nő). Azonban az  $F(x)$  lehet monoton is, ekkor az  $F^{-1}$  érték helyett az  $F(x) = u$  egyenlet gyökének az  $x_0 = \inf\{x \mid u < F(x)\}$  értéket tekintsük. A feladat tehát a  $P(\xi_i = i) = p_i$   $i = 0, \dots, 255$  valószínűségekkel megadott diszkrét  $\xi_i$  valószínűségi változó generálása. Az eloszlásfüggvény ekkor

$$F(x) = P(\xi_i < x) = \sum_{j: x_j < x} p_j \quad , \quad (3.8)$$

ahol  $x_j$  a  $\xi_i$  változó lehetséges értékeit jelöli.

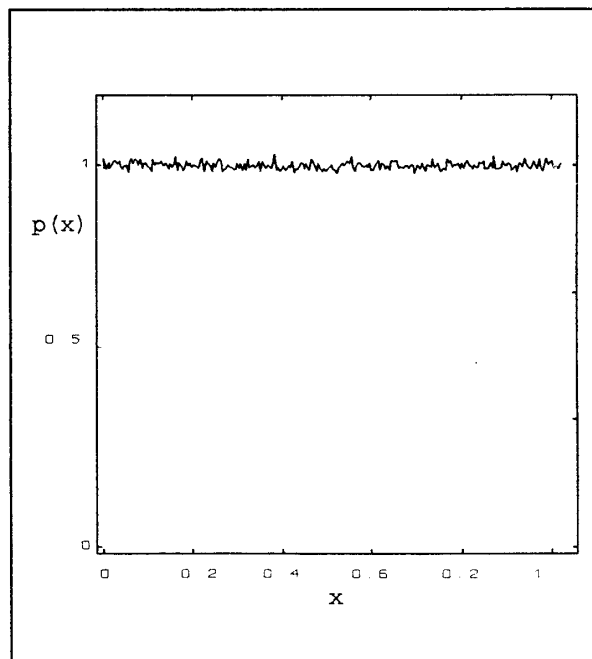
Az inverz függvény helyett a

$$G(u_i) = \min(j \mid u_i < \sum_{k=1}^j p_k) \quad (3.9)$$

függvényt használva a  $\xi_i = G(u_i)$  a keresett diszkrét eloszlást követi. Az algoritmus jobban látható, ha bevezetjük a

$$\begin{aligned} q_0 &= p_0 \\ q_1 &= p_0 + p_1 \\ &\vdots \\ q_{255} &= p_0 + \dots + p_{255} \end{aligned} \quad (3.10)$$

jelölést. Ekkor egymásután generálva az  $u_i$  egyenletes eloszlású számokat, a  $G(u_i)$  függvény értéke azon  $j$  index megkeresését jelenti, melyre  $q_{j-1} \leq u_i < q_j$  teljesül. Ezt a programrészletet ismét egy 1024 db, a kívánt sűrűségfüggvényű, véletlenszámot generáló ciklusba helyeztük. A (3.8) ábrán az egyenletes eloszlású  $u_i$  számok sűrűségfüggvénye látható, melyet 5000 mintából kaptunk.

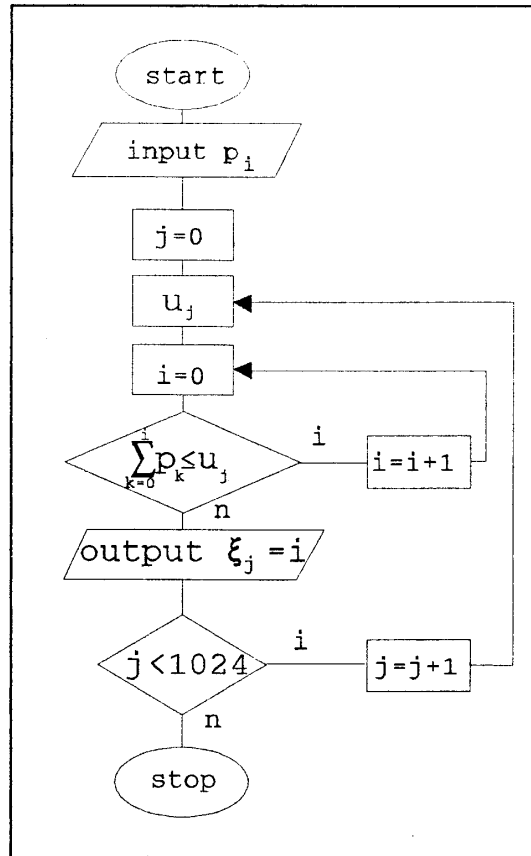


3.8. ábra Az alkalmazott egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye  $k=5000$  mintából.



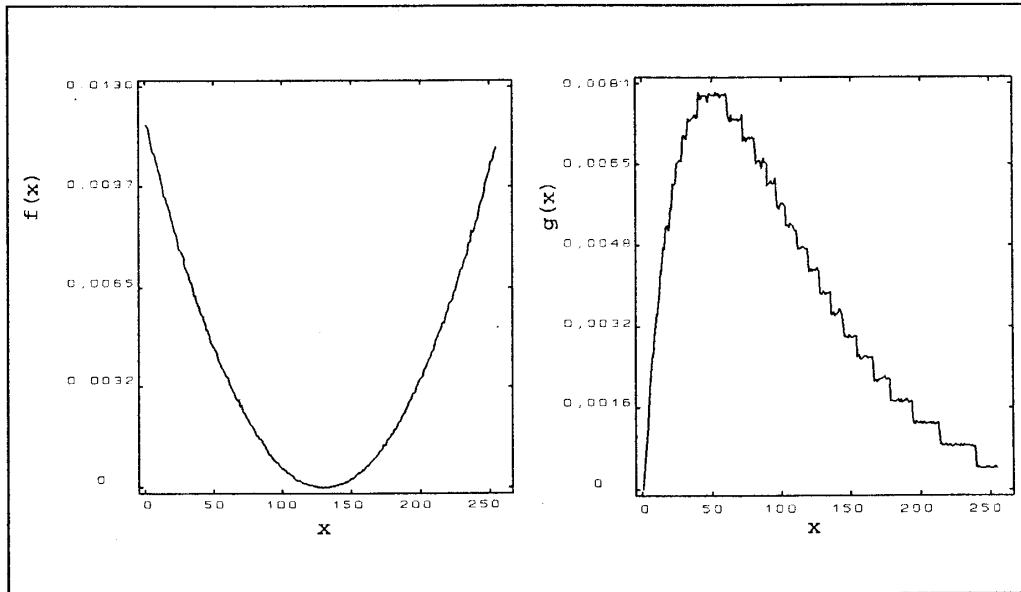
A (3.9) ábrán az inverzelem módszer algoritmus látható. A legbelső ciklus magjában szereplő

értékösszehasonlítások száma elérheti a 256-ot. Ez sok időt igényel, mivel több ezer mintára van szükség. A megfelelő index (ami a keresett  $\xi_j$  valószínűségi változót is jelenti) visszakeresését intervallum felezgetéssel végezzük. (Ezt a módszert nevezik bináris keresésnek, szukcesszív approximációnak is.) Ezzel maximum 8 db összehasonlításra van szükségünk, és így a gépidő lényegesen csökken. A módszer tesztelése az, hogy egy adott



3.9. ábra Az inverzelem módszer algoritmus.

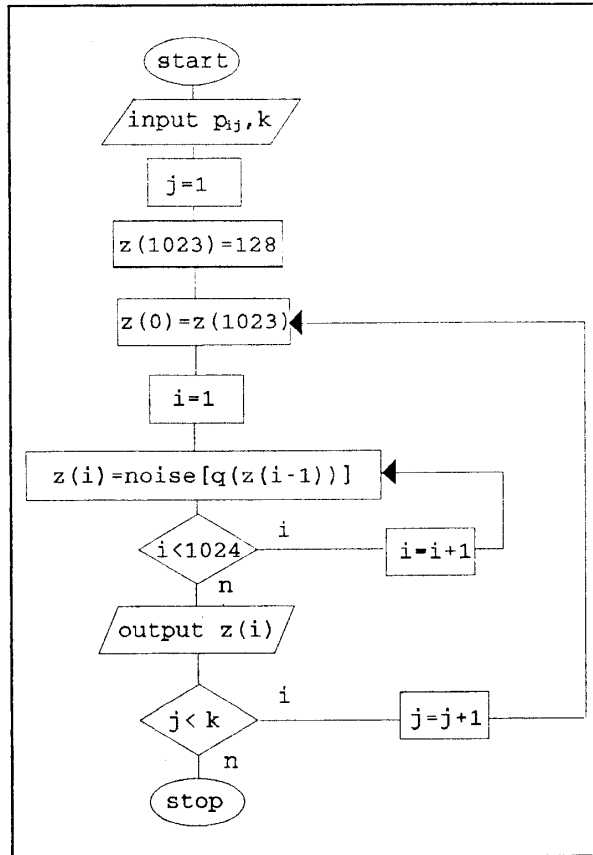
$f(x)$  sűrűségfüggvényből előállítjuk a függvénynek megfelelő véletlen folyamatot, majd ebből a (3.2) ábrán látott algoritmussal visszanyerjük a tapasztalati sűrűségfüggvényt 256 diszkrét pontban. A módszer hatásosságát bemutató példaként a (3.10) ábrán az  $f(x) \sim (x-130)^2$  és a  $g(x) \sim xe^{-x}$  függvényekre már a visszagenerált sűrűségeket láthatjuk.



3.10. ábra Sűrűségfüggvények visszagenerálása az inverzelem módszerrel  $k=3000$  mintából.

A  $P(\xi_{n+1}=j|\xi_n=i)$   $i, j=0, 1, \dots, 255$  kifejezéssel definiált átmenetmátrixból való folyamatvisszaállításnál az előbbi algoritmus módosul. Ekkor a  $\xi_n=i$  érték egy feltételt szab a következő  $\xi_{n+1}=j$  érték meghatározására, mert a  $P(\xi_{n+1}=j|\xi_n=\text{konst.})=p_j$  valószínűségek a  $\xi_n=\text{konst.}$  függvényei. Ezen feltételes valószínűségek az átmenetmátrix  $\xi_n$ -dik sorához tartozó metszetet (ill. vektort) adják. Ezzel azonban az előző esetet kaptuk meg, mivel egy ilyen metszethez már tudunk véletlenszámot generálni, mint láttuk. Hogy melyik metszetről kell a következő  $\xi_{n+1}$  véletlenszámot generálni, azt az előző lépéskor kapott és most, mint feltételként szereplő  $\xi_n$  véletlenszám adja meg. Így a következő érték csak az előző függvénye, a markovi tulajdonságnak megfelelően. A folyamatot a  $\xi_0=128$  értéktől indítjuk. Az algoritmus, melyet a (3.11) ábrán láthatunk, itt is 1024 db számot generál egy ciklusban.

Az ábrán a Z vektor 1024 elemű, ez tartalmazza sorrendben a véletlen értékeket, a q tömb a  $P_{ij}$  átmenetmátrix sorvektorait adja. A noise szubrutin pedig az inverzelem módszerrel egy véletlen értéket ad vissza a Z vektor következő elemeként. A programot a (3.2) és a (3.4) ábrán látott algoritmusokkal összekapcsolva a kimenő sűrűségfüggvény és a spektrum kiszámítható. A



3.11. ábra A folyamat visszaállítása az inverzelem módszerrel.  
 egyben az egész algoritmus tesztelését is jelenti.

### 3.1.2 Az algoritmus tesztelése

#### Brown-mozgás

Vizsgáljuk meg ismét az átmenetmátrixok bevezetésénél példaként említett egydimenziós szimmetrikus bolyongást. Az ott látott jelöléssel ez a  $p=1/2$ ,  $r=0$  átmenetvalószínűségeket jelenti. Azaz egy részecske mozgásának ennél a modelljénél az  $i$  állapotból az  $i-1$  vagy az  $i+1$  állapotba azonos,  $1/2$

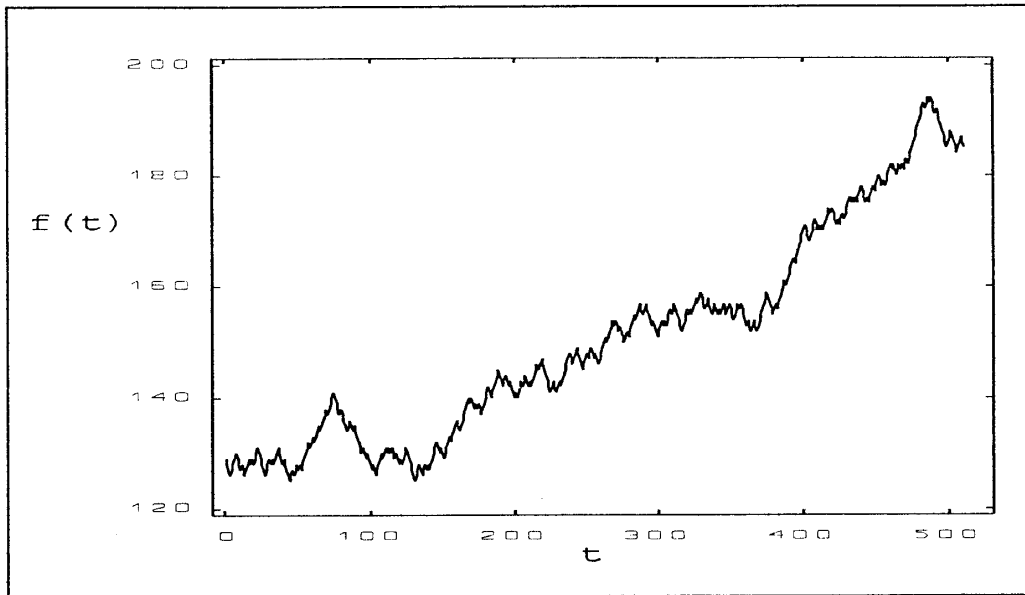
valószínűséggel jut a részecske, függetlenül attól, hogy jutott oda és hogy jut tovább. Ha  $\xi_n$  az  $n$ -edik lépés utáni helyzetet jelenti, akkor  $\xi_0, \xi_1, \dots$  Markov-láncot alkot. Ha  $\eta_1, \eta_2, \dots$  független valószínűségi változók, melyek csak a  $-1, +1$  értéket vehetik fel  $1/2, 1/2$  valószínűséggel, akkor  $\xi_n$  előállítható a  $\xi_n = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$  módon. Az állapottér legyen ismét a  $0, 1, \dots, 255$  elemekből álló halmaz. A  $0$  és a  $255$ . állapotot definiáljuk úgy, mintha ott rugalmas fal lenne elhelyezve. Egy ilyen folyamat átmenetmátrixa:

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & \dots \\ p & r & p & \\ 0 & p & r & p \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

A  $p_0=1$  (és így az  $r_0=0$ ) miatt a  $0$  állapotba került részecske minden esetben az  $1$  állapotba kerül vissza. Ez pontosan a rugalmas falnak felel meg. A konkrét megvalósítás során az  $\eta_n$  valószínűségi változót a (3.8) ábrán látható, egyenletes eloszlást szolgáltató, generátorral állítjuk elő. Legyen  $n$ -edik értéke  $\lambda_n \in [0, 1)$ , akkor  $\eta_n$ -t definiáljuk az

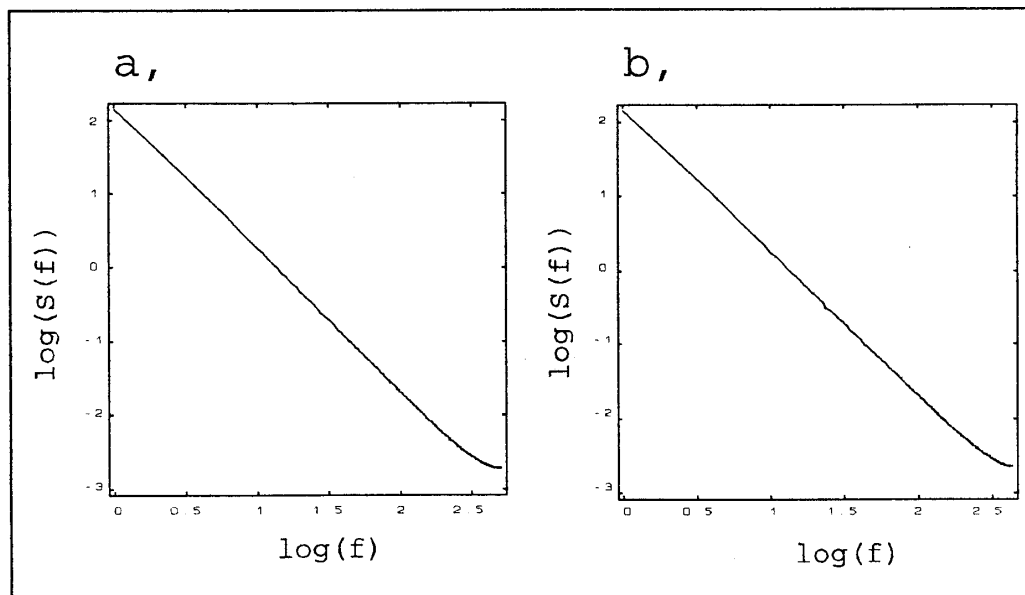
$$\eta_n = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } \lambda_n > 0.5 \\ -1 & , \text{ ha } \lambda_n \leq 0.5 \end{cases} \quad (3.12)$$

hozzárendeléssel. A részecskét a  $\xi_0=128$  állapotból indítjuk. Egy ciklusban 1024 lépést tesz. Az algoritmus hasonló az előzőekhez. A (3.12) ábrán a részecske egy ilyen ciklusát láthatjuk. A részecske bolyongásának, mint időfüggvénynek a spektruma  $1/f^2$  [16]. A (3.13/a) ábrán 5000 mintára átlagolt spektrumot láthatunk. Az átmenetmátrix 30000 mintából készült, s ebből a visszagenerált folyamat spektruma ismét 5000 minta átlaga, ez a



3.12. ábra A Brown-mozgás időbeli képe.

(3.13) ábra jobb oldalán látható. Mindkét spektrum menete  $1/f^{1,9}$ .



3.13. ábra a, A Brown-mozgást végző részecske eredeti spektruma; b, visszanyert folyamat spektruma, minták száma  $k=5000$ .

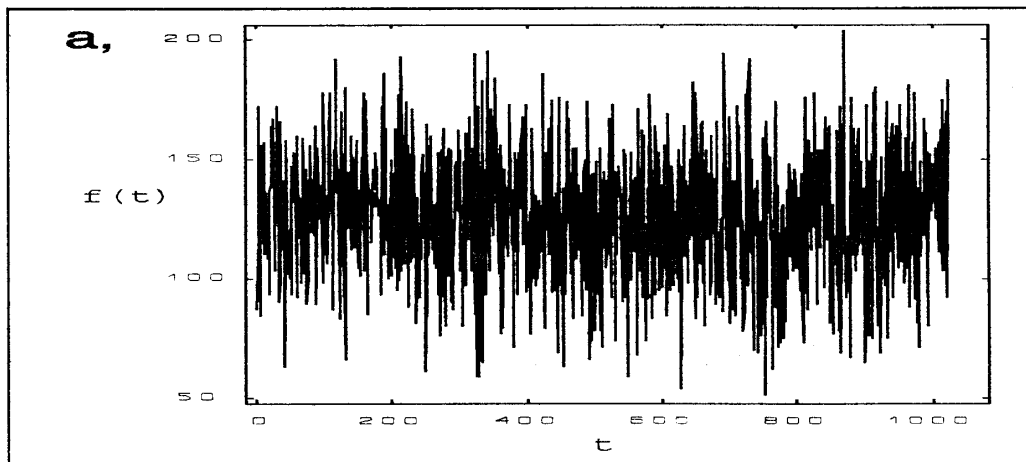
Az algoritmus elvégzése után az eredeti folyamat sűrűségfüggvényét és spektrumát visszakaptuk.

### Fehérzaj

Legyen  $\eta_n$  egy  $(0,1)$  paraméterű normális eloszlású zajgenerátor által a  $t_n$  pillanatban előállított zajérték. Ebből a következő módon származtattuk a  $\xi_n$ , ismét 0 és 255 közötti, diszkrét értékeket felvevő zajfolyamatot:

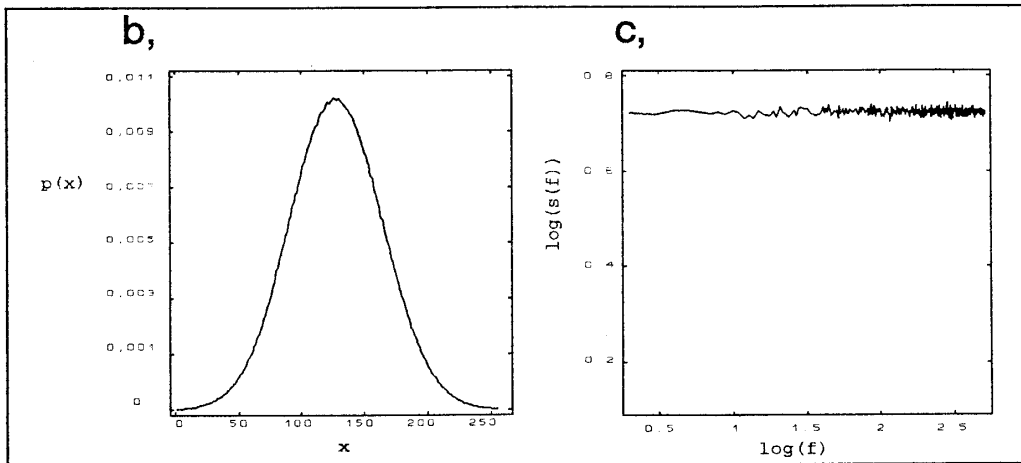
$$\xi_n = \begin{cases} [(\eta_n + d) * \frac{256}{2d}] & , \text{ ha } -d < \eta_n < d \\ 0 & , \text{ ha } \eta_n \leq -d \\ 255 & , \text{ ha } \eta_n \geq d \end{cases} \quad (3.13)$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az  $\eta_n \in [-d,d]$  intervallumba eső elemeket átranszformáljuk a  $[0,255]$  tartományba. A hozzárendelésben szereplő  $[\ ]$  zárójel egészrészképzést jelent, így a  $d=3.5$  választással a  $[-3.5,+3.5]$  intervallumba eső számokból ismét az  $A=\{0,\dots,255\}$  diszkrét állapothalmazhoz jutunk. Az eredeti zajfolyamatból átlagban minden 100000 elemből 47 esik a  $[-3.5,+3.5]$  intervallumon kívülre. Ezen  $\eta_n$  értékekhez a  $\xi_n=0$  és  $\xi_n=255$  tartozik, azonban a határok ilyen definiálása nem rontja el a statisztikát. A (3.14) ábrán a  $\xi_n$  zajfolyamatot, a sűrűségfüggvényét és a spektrumát láthatjuk.



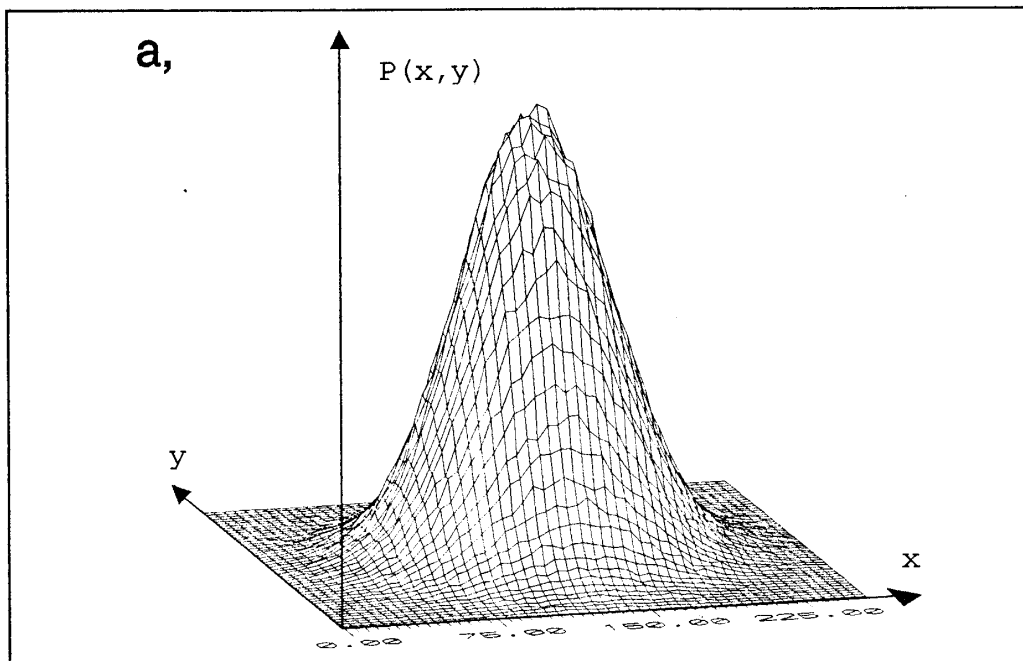
3.14/a ábra A fehérzaj időfüggvénye.

Fehérzaj esetén az egymás után következő értékek korrelálatlanok,

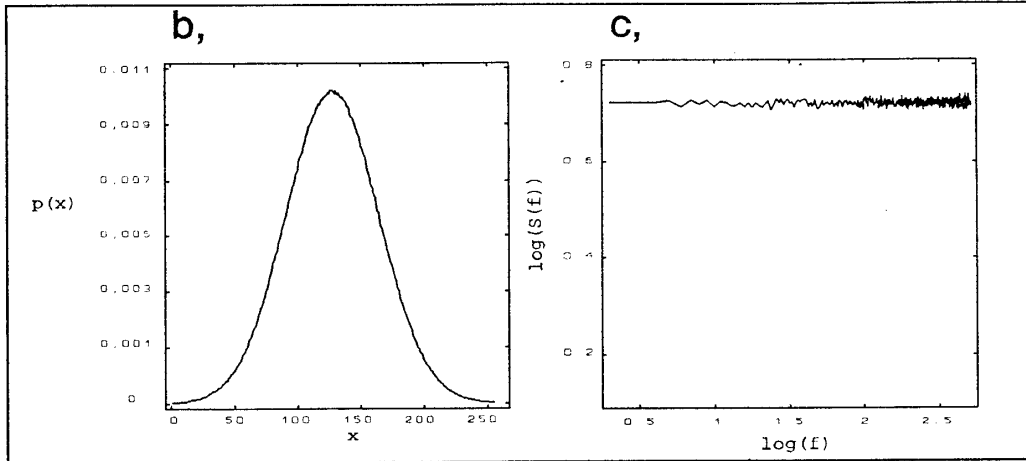


3.14. ábra b, A fehérzaj sűrűségfüggvénye;  
c, spektruma  $k=5000$  mintából.

a korrelációs együttható zérus. A (3.15) ábrán az együttes sűrűségfüggvényt, a kimeneti jel sűrűségfüggvényét és a spektrumát láthatjuk. Az algoritmus elvégzése után ismét visszkapjuk a folyamatot, a korrelálatlanságát megtartotta.



3.15/a ábra A fehérzaj együttes sűrűségfüggvénye  $k=30000$  mintából átlagolva.



3.15. ábra b, A visszaállított fehérzaj sűrűségfüggvénye;  
c, spektruma  $k=5000$  mintából átlagolva.

### 3.2 Az $1/f$ zaj markovi tulajdonságának vizsgálata a számítógépes modellek alapján

Ha azonban olyan folyamatokat vizsgálunk, ahol a korrelációs együttható több lépés esetén sem nulla, az átmenetmátrix meghatározásánál a korrelációt is figyelembe kell venni, hogy a konkrét  $r$  lépésszámot meghatározhassuk.

A korrelációs együttható mérését a (2.11) kifejezés alapján a felvett 1024 db-os mintákkal is elvégezhetjük. Ehelyett azonban az együttes sűrűségfüggvényből származtatjuk a korrelációs együtthatót. Ezt kétféle módon is megtehetjük.

A (2.25)  $Q(x_1, x_2)$  kifejezéséből kapott

$$Q(x_1, x_2) = \sum_{i,j=1}^2 (x_i - m_i) b_{ij} (x_j - m_j) = konst. \quad (3.14)$$

egyenlet egy másodrendű felület kanonikus egyenlete. Ha az ebben szereplő  $(b_{ij})$  mátrixra teljesül, hogy  $\text{rang}(b_{ij})=2$  és pozitív definit, akkor a kanonikus alak egy ellipszist határoz meg az



$(x_1, x_2)$  síkban [14]. A  $(b_{ij})$  mátrix (2.30) alakjából következik, hogy

$$\det(B) = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} (1-\rho) > 0, \text{ mert } 0 < \sigma_1^2 \sigma_2^2, \quad 0 < \rho < 1, \quad (3.15)$$

azaz pozitív definit mátrix. Ezenkívül:

$$\frac{1}{\sigma_1^2} \neq 0, \quad \det(B) > 0, \quad (3.16)$$

azaz másodrendig a főminorok determinánsa nem zérus, tehát  $\text{rang}(b_{ij})=2$ . A (3.14) egyenlet hatványozásával kapott  $x_3=p(x_1, x_2)=\text{konst.}$  egyenlet, ahol  $p(x_1, x_2)$  a (2.24) kifejezésben látott másodrendű valószínűségi sűrűségfüggvény ( $m_1=m_2=128$ ), szintén egy ellipszis pontjait határozza meg az  $x_3=\text{konst.}$  síkban. A  $\rho$  korrelációs együttható ezen ellipszis tengelyeinek viszonyából meghatározható. Ha elvégezzünk egy főtengelytranszformációt, amely az  $(x_1, x_2)$  koordinátarendszer eltolásából és elforgatásából áll, a kanonikus egyenlet az

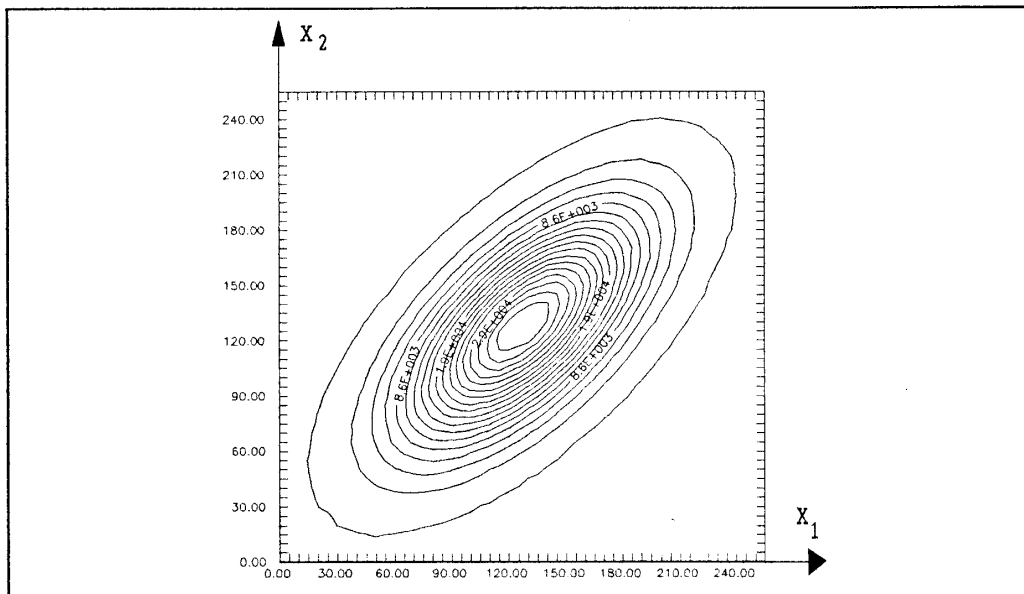
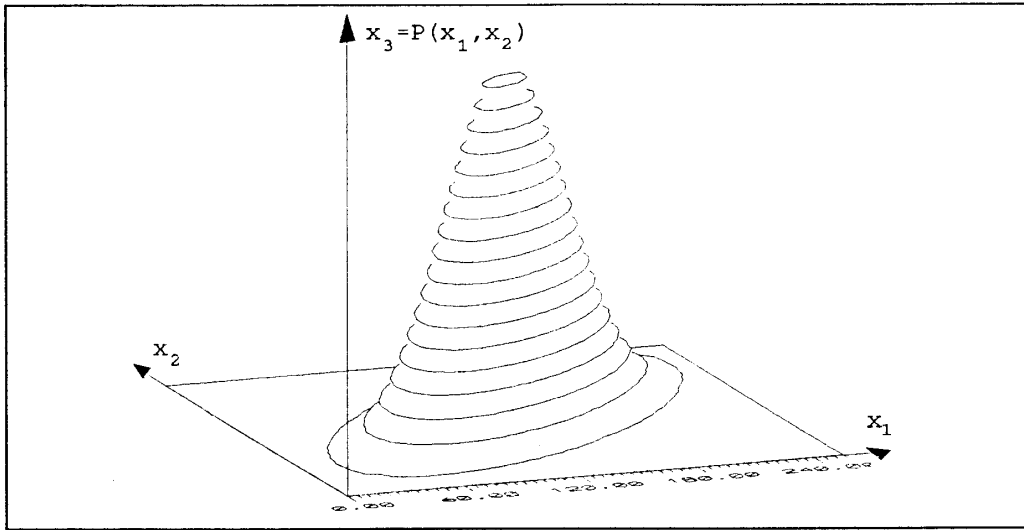
$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \quad (3.17)$$

ismert alakot veszi fel, ahol

$$a^2 = \frac{c}{1-\rho}, \quad b^2 = \frac{c}{1+\rho}, \quad (3.18)$$

ahol a  $c > 0$  konstans. A (3.16) ábrán egy mért  $p(x_1, x_2)$  sűrűségfüggvény szintvonalas ábrázolását láthatjuk. Az  $(x_1, x_2) \rightarrow (y_1, y_2)$  koordináta transzformáció során az eltolást a  $(128, 128)$  vektorral kell végrehajtani, mivel az ellipszisek középpontja (a  $p(x_1, x_2)$  kifejezésében szereplő  $m_1=m_2=128$  várható értékek miatt) ebben a pontban van. Az elforgatást a  $(b_{ij})$  mátrix sajátvektoraiból adódóan  $\alpha=45^\circ$ -al kell végrehajtani, amint ez az

ábrán is látható.



3.16. ábra Az együttes sűrűségfüggvény síkmetszetei.  
Minták száma  $k=2,6 \cdot 10^5$ ,  $\rho=0,6$ .

Ha az együttes sűrűségfüggvény felvételekor a  $\xi_n$  és  $\xi_{n+1}$  értékek közötti korreláltság nő, azaz  $\rho$  közelít az egyhez, az ellipszis laposabb lesz, amiből következik, hogy az ellipszis excentricitása is tart az egyhez. Az  $e=1$  esetben az ellipszis egy szakasszá fajul. Ha a  $\rho$  korreláció csökken, az ellipszis egy

szabályos körhöz közelít, azaz ha  $\rho \rightarrow 0$ , akkor  $e \rightarrow 0$ . Az excentricitás az ellipszis tengelyeinek hosszából az

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{2\rho}{1+\rho}} \quad (3.19)$$

egyenlettel adható meg. Ebből a  $\rho = \rho(e)$  inverz függvény a szigorú monotonitás miatt kifejezhető:

$$\rho = \frac{e^2}{2 - e^2} \quad (3.20)$$

A korrelációs együttható így a nagy és a kistengelyek hosszának mérésével meghatározható.

A másik módszer a 2.4 fejezetben már megemlített  $p(x_2|x_1)$  feltételes sűrűségfüggvény konkrét alakjából adódik. Legyen  $\xi_1$   $(m_1, \sigma_1)$ ,  $\xi_2$  pedig  $(m_2, \sigma_2)$  paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor a (2.7) kifejezésből adódóan az átmenetmátrixot a  $\xi = x_1$  feltétel melletti  $p(x_2|x_1)$  szintén normális eloszlású feltételes valószínűségi sűrűség adja meg:

$$P(\xi_{n+1} = x_2 | \xi_n = x_1) = P(x_2|x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x_2 < \infty \quad (3.21)$$

ahol  $m = m_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho (x_1 - m_1)$ ,  $\sigma = \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}$ .

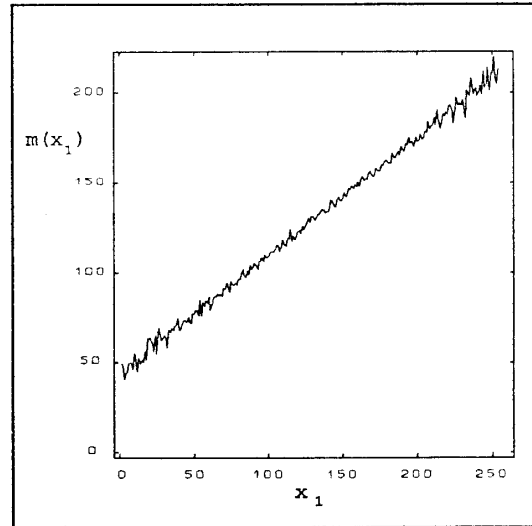
Ez egy  $(m, \sigma)$  paraméterű normális eloszlás. A  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók egymás után ugyanazokat az értékeket veszik fel, így mindkettő ugyanazt a normális eloszlást írja le:  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma'$ ,  $m_1 = m_2 = m'$ . Emiatt a feltételes eloszlás várható értéke módosul:

$$m = m' + \rho (x_1 - m') = \rho x_1 + \text{konst.} \quad (3.22)$$

amely pedig  $x_1$  lineáris függvénye. Méréseinkben a  $p(x_2|x_1)$  feltételes együttes eloszlás egy átmenetmátrix realizációja, ha  $x_1, x_2 \in A = \{0, 1, \dots, 255\}$  állapothalmaznak. Használjuk ismét az

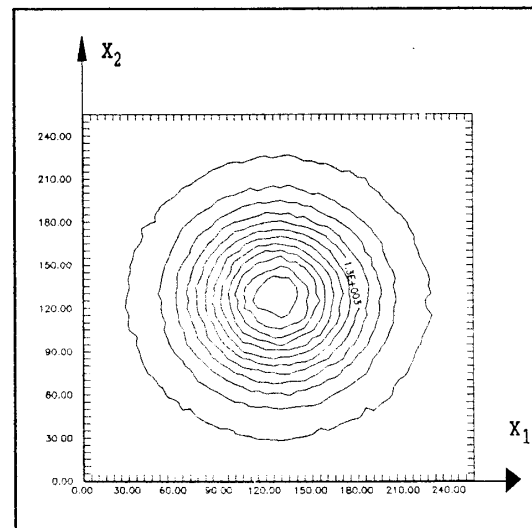
$x_1=i$ ,  $x_2=j$  jelölést. Az átmenetmátrix  $x_1=i$  sorához tartozó diszkrét valószínűségek normális eloszlást követnek. Mivel egy normális eloszlás várható értéke egyben a sűrűségfüggvény maximumhelyét (modusát) is megadja, a (3.22) egyenletben  $m$  az  $x_1=i$  feltételhez tartozó modust

adja meg:  $m_i=m(x_1=i)$ , ahol  $i=0,1,\dots,255$ . Az átmenetmátrix minden sorában a maximumok indexeit kikeresve éppen az  $m_i=m(x_1=i)$  függvényt kapjuk meg, amely a (3.22) kifejezésből adódóan egy  $\rho$  meredekségű egyenes. A (3.17) ábrán egy maximumkereső algoritmussal előállított  $m(x_1=i)$  függvény látható. Ebből egyenesillesztéssel a  $\rho$  közvetlenül megkapható.



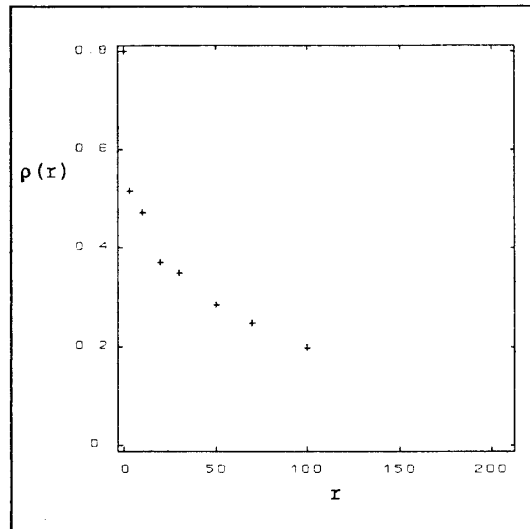
3.17. ábra A mátrix ( $x_1$ ) soronként vett maximumainak helyfüggése,  $\rho=0,6$ .

Egy  $r$  lépéses átmenetvalószínűségre a  $\rho$  korrelációs együttható a fent látott módon mérhető. A lépésszám növelésével a korreláció csökken. Nagy lépésszámokra  $\rho \rightarrow 0$ , az átmenetmátrix pedig a fehérzajra kapott mátrix felé közelít (3.18 ábra). Ezt a konvergenciát a (2.56)



3.18. ábra A  $\rho=0$ -ra az ellipszisek körök lesznek.

ergodicitási feltétel írja le. A mérések során a korrelációs együtthatót úgy kell megválasztani, hogy az átmenetmátrix egy korrelált jelet határozzon meg. Másképpen: válasszuk úgy az  $r$  lépésszámot, hogy  $\rho(r) > 1/e$ , azaz korrelációs időn belüli átmenetmátrixokat mérjünk. A



(3.19) ábrán a  $\rho = \rho(r)$  függvényt láthatjuk. Az ábrát

3.19. ábra A korreláció lépésszámfüggése.

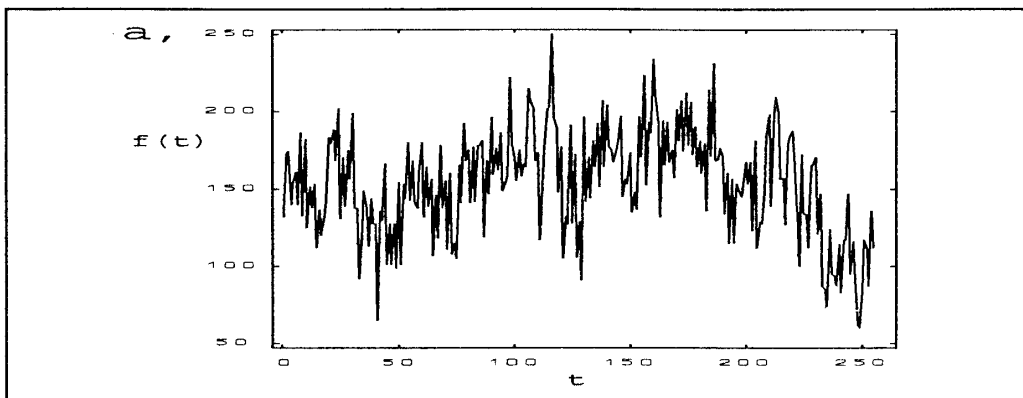
a (3.22) összefüggésen alapuló módszerrel határoztuk meg. A két módszer relatív hibája kisebb, mint 5%, ez a pontosság az  $r$  lépésszám meghatározásához tökéletesen elegendő.

### 3.2.2 1/f modell (A)

Az első 1/f zajmodellt az FFT algoritmus segítségével állítjuk elő. Legyen  $\eta_n \in [0, 255]$  ismét a (0,1) paraméterű normális eloszlású fehérzajt előállító generátor  $t=n$  időpillanatban nyert diszkrét értéke. Ezen értékekre végezzük el az FFT transzformációt. Az így kapott  $f_1$  diszkrét frekvenciájú Fourier-komponenseket szorozzuk be  $f_1^{-\alpha/2}$ -vel, ahol  $\alpha > 0$  valós szám. Ezzel a fehérzaj teljesítménysűrűség-spektrumát egy 1/f<sup>α</sup> spektrumba skálázzuk át. Így az inverz FFT transzformációval kapott  $\eta'_n$  zajértékek spektruma 1/f<sup>α</sup>. Az  $\alpha=1$  esetben (0,1) paraméterű normális eloszlású 1/f zajt kapunk. Egy ciklusban ezzel a módszerrel ismét 1024 elemet számítunk ki, majd ismét a

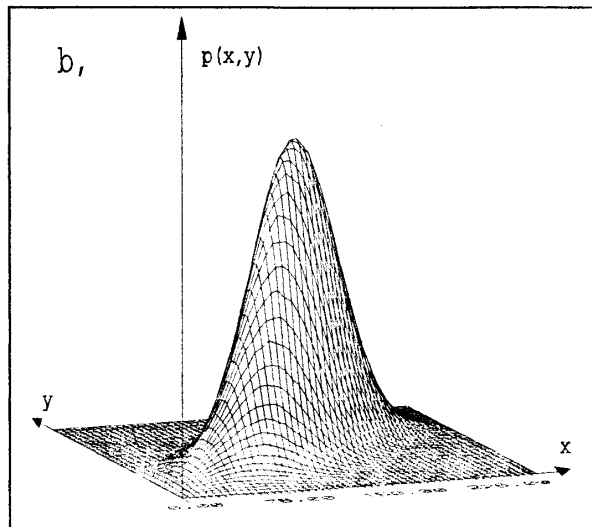
$$\xi_n = \begin{cases} [(\eta'_n + d) * \frac{256}{2d}] & , \text{ ha } -d < \eta'_n < d \\ 0 & , \text{ ha } \eta'_n \leq -d \\ 255 & , \text{ ha } \eta'_n \geq d \end{cases} \quad (3.23)$$

hozzárendeléssel kapjuk ismét az  $A=\{0,1,\dots,255\}$  diszkrét állapothalmazú normális eloszlású folyamatot. A (3.20) ábrán egy minta időbeli képe és egy 260000 mintából készült  $r=1$  lépéses ( $\rho=0.6$ ) együttes sűrűségfüggvénye látható.

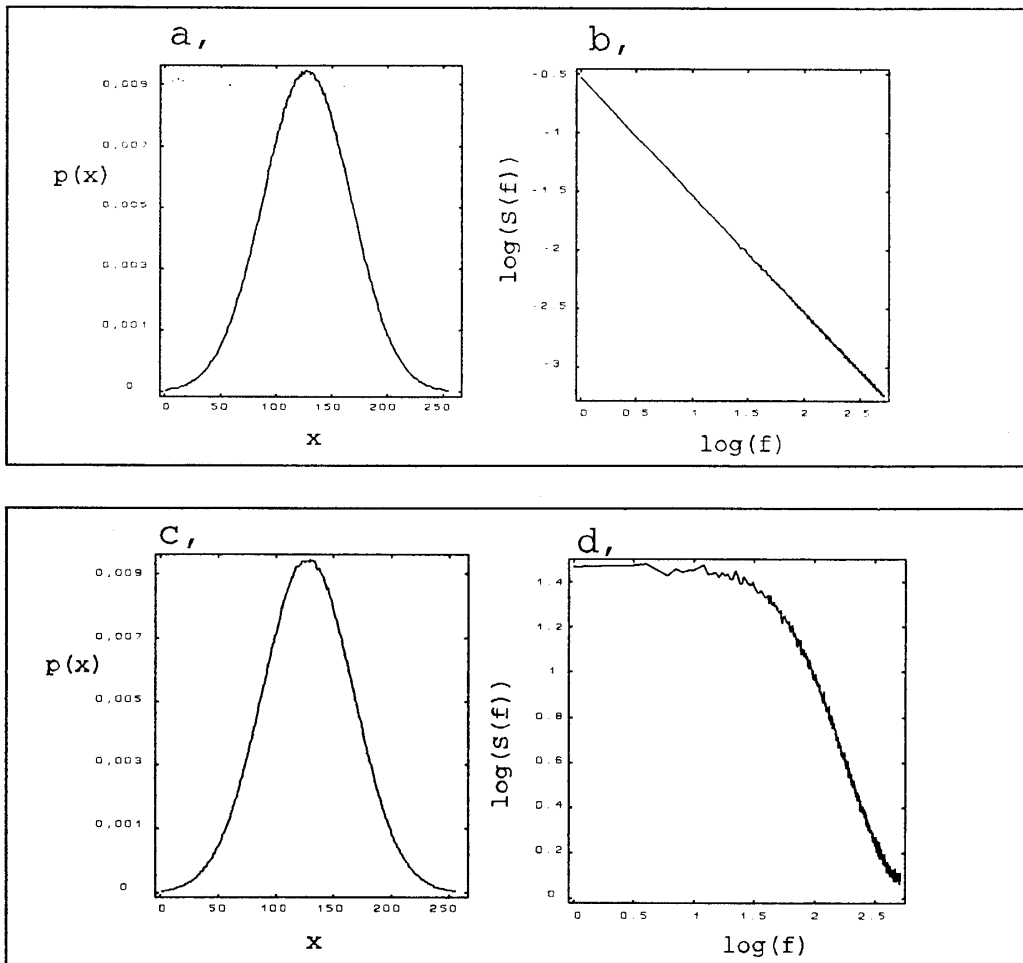


3.20. ábra Az A modell időfüggvénye (a) és együttes sűrűségfüggvénye (b).  $k=260000$ .

Az eredeti és a visszagenerált zajfolyamat 5000 mintás sűrűségfüggvényei és spektrumai a (3.21) ábrán láthatók. A (b) ábrán a spektrum meredeksége  $\alpha=1,00$ .



3.20/b ábra



3.21. ábra Az A modell sűrűségfüggvénye (a), spektruma (b); a visszagenerált jel sűrűségfüggvénye (c), spektruma (d).

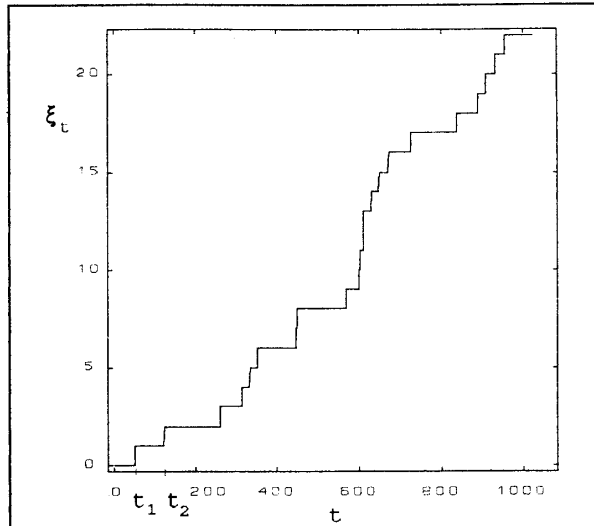
A visszanyert zajfolyamat lorentzi spektrummal rendelkezik, ami bizonyíték arra, hogy a fenti módon generált gaussi  $1/f$  zaj nem Markov-folyamat.

### 3.2.3 $1/f$ modell (B)

A második zajmodell elemi Poisson-folyamatok összegzésével állít elő  $1/f$  zajt.

Legyen  $\xi_t$  az a valószínűségi változó, mely pozitív egész értékű, és azt számlálja, hogy egy adott esemény hányszor következett be

a  $(0,t)$  időtartam alatt. Így  $\xi_t-t$  egy nemcsökkenő lépcsős függvényként lehet ábrázolni. A (3.22) ábrán egy ilyen függvény látható. Az esemény a  $t_1, t_2, \dots$  időpillanatokban jelenik meg; a  $\beta$  bekövetkezéseinek száma mindig csak 1-gyel nő.



Ilyen folyamatra példa egy 3.22. ábra Egy esemény számlálása. radioaktív anyag által kibocsátott röntgenfotonok száma, egy gép meghibásodásai, stb. Ezek az események Poisson-eloszlást követnek [10].

Legyen annak a valószínűsége, hogy legalább egy esemény bekövetkezik egy  $h$  hosszúságú időtartam alatt

$$p(h) = ah + o(h) \quad a > 0, \text{ ahol } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0. \quad (3.24)$$

$o(h)$  annak a valószínűsége, hogy kettő vagy több esemény következik be  $h$  idő alatt. Zárjuk ki, hogy ez a kettő vagy több esemény egyszerre következik be. Legyen  $P_m(t)$  annak a valószínűsége, hogy  $m$  esemény történt  $t$  idő alatt:  $P_m(t) = P(\xi_t = m)$   $m=0,1,2, \dots$ . Ezzel

$$o(h) = \sum_{m=2}^{\infty} P_m(h) \quad (3.25)$$

Tegyük fel, hogy diszjunkt időintervallumon bekövetkező események száma független egymástól. Emiatt annak a valószínűsége, hogy egyetlen esemény sem fordul elő a  $(0,t)$  idő alatt, kielégíti a



$$P_0(t+h) = P_0(t) P_0(h) = P_0(t) (1-p(h)) \quad (3.26)$$

egyenletet. Ezt átalakítva:

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -P_0(t) \frac{P(h)}{h} \quad (3.27)$$

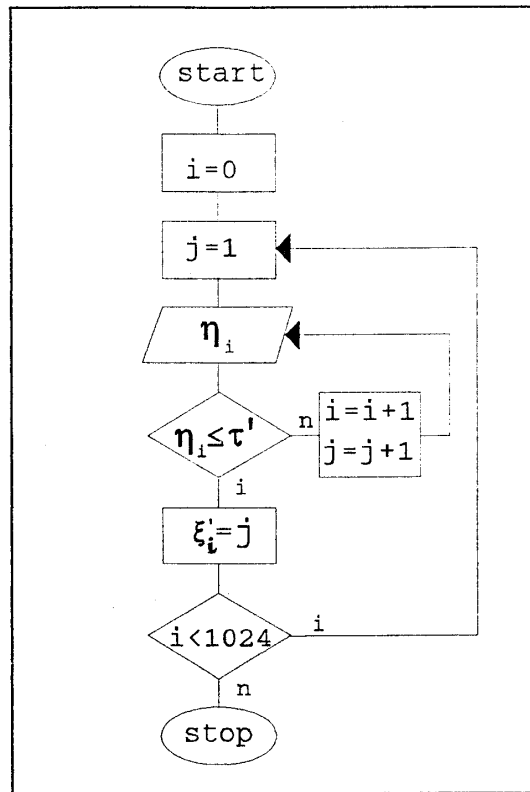
A  $h \rightarrow 0$  határértékképzéssel a  $P_0'(t) = -aP_0(t)$  differenciálegyenlethez jutunk. A  $P_0(0) = 1$  kezdetiérték-választással a  $P_0(t) = e^{-at}$  megoldást kapjuk. Tetszőleges  $m$  értékre a

$$P(\xi_t = m) = P_m(t) = \frac{a^m t^m}{m!} e^{-at} \quad (3.28)$$

kifejezést kapjuk, amely az  $at$  paraméterű Poisson-eloszlás sűrűségfüggvénye [10]. Az előfordulások számának várható értéke  $t$  idő alatt  $at$ .

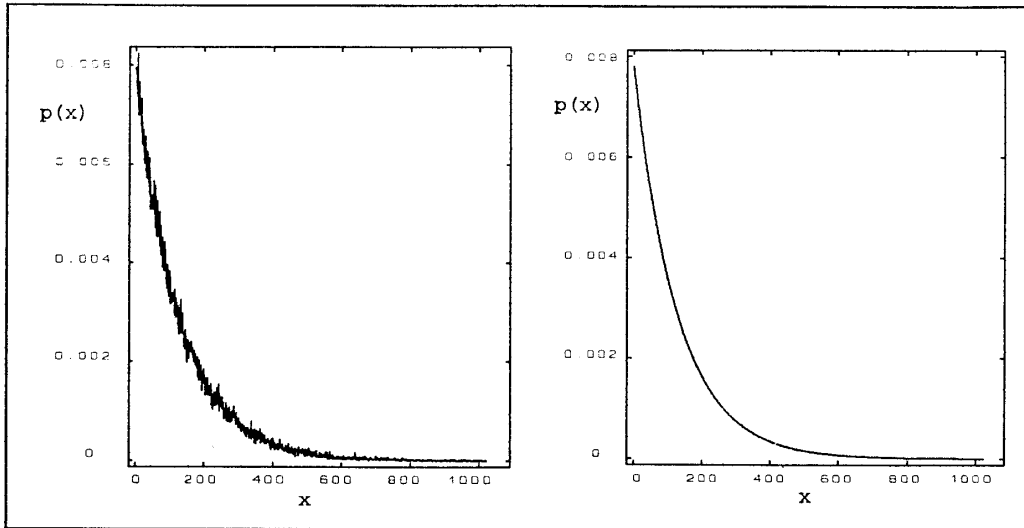
A megvalósított Poisson folyamatunk esetében a  $t$  időparaméter diszkrét időegységeknek felel meg:  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Legyen az  $\eta_{t=n} = \eta_n \in [0, 1)$  valószínűségi változó a (Brown-mozgás esetén) már említett egyenletes eloszlású generátor által a  $t=n$  időpillanatban szolgáltatott érték. Generáljuk folyamatosan ezen véletlen számokat. Legyen  $\tau' \in (0, 1)$  egy tetszőleges szám. Tekintsük egy elemi eseménynek valamely  $\eta_n$  véletlen értéknek a  $[0, \tau']$  intervallumban való előfordulását. Ekkor a diszkrét időparaméter szerepét  $n$ , a  $h$  idő alatti legalább egy esemény előfordulásának, azaz  $a$ -nak a szerepét pedig a  $\tau'$  játssza (mivel éppen  $\tau'$  az ún. geometriai valószínűsége egy véletlen  $\eta_n$  érték  $[0, \tau']$  intervallumba esésének). Az általunk generált folyamatban egyetlen esemény bekövetkezését vizsgáljuk ( $m=1$ ). Így a folyamatban egy szabad paraméter marad, mégpedig az egyes események közötti időtartam. Jelöljük azt a valószínűségi változót  $\xi_n'$ -vel, amely egy elemi esemény  $n$ -edik bekövetkezéséig az  $n-1$ -edik bekövetkezése óta eltelt. A (3.23)

ábrán látható algoritmus a  $\xi'_n$  valószínűségi változót állítja elő. Az algoritmust két paraméter vezérli: az  $i$  változó addig növekszik, amíg 1023-at el nem éri, ugyanis egy ilyen ciklusban 1024 időegységre állítjuk fel a folyamatot. A  $j$  paraméter az egyes bekövetkezések között eltelt időt számlálja, ez a keresett véletlen érték. A  $\xi'_n$  változó értékei felfoghatók úgy, mint valamely működési egységek élettartamai. Az első egység a  $\xi'_1$  időpillanatban hibásodik meg, ezt azonnal kicseréljük egy újra, amely a  $\xi'_1 + \xi'_2$  időpillanatban hibásodik meg, stb. A  $\xi_n = \xi'_1 + \dots + \xi'_n$   $n=1, 2, \dots$  ( $\xi_0 = \xi'_0$ ) összeggel definiált valószínűségi változó egy ún. "felújítási folyamatot" határoz meg. A felújításokat számláló  $N_t$  változó azt méri, hány felújítás történt a  $[0, t]$  intervallumon:  $N_t = n$ , ha  $\xi_n \leq t < \xi_{n+1}$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ . A (3.22) ábrán pontosan egy ilyen felújítási folyamatot láthatunk. Egy  $\lambda$  paraméterű Poisson-folyamat olyan felújításokat számláló folyamat, ahol egyes egységek élettartamai azonos  $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlásúak [10]. Így az általunk előállított egymástól független  $\xi'_n$  valószínűségi változók olyan exponenciális eloszlásúak, ahol  $\tau'$  az eloszlás paramétere. A (3.24/a) ábrán egy  $\tau' = 2/256$  paraméterű ilyen sűrűségfüggvényt



3.23. ábra A felújítási idők generálása.

láthatunk, amely két felújítás között eltelt időtartamok tapasztalati sűrűségfüggvénye. A (3.24/b) ábrán a számított  $p(x)=\tau'\exp(-\tau'x)$  sűrűségfüggvény látható.



3.24. ábra A felújítási idők mért és számított sűrűségfüggvénye.  $k=10000$ .

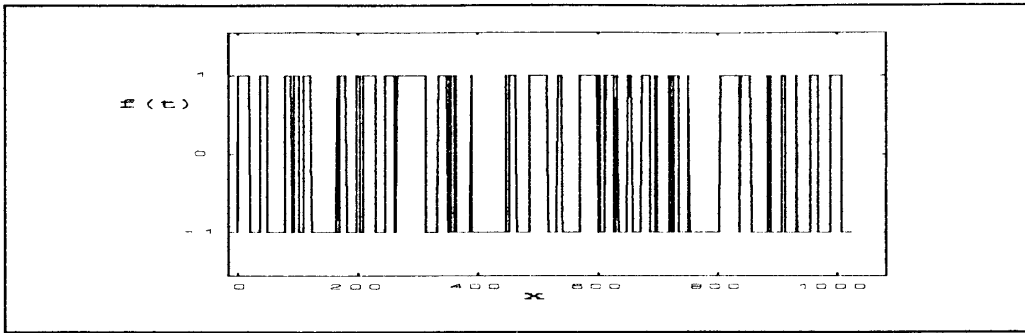
Egy mintának ismét 1024 időegységre eső folyamat felel meg. A minták számát a sűrűségfüggvény esetében  $10^4$ -re választottuk.

A  $\xi'_n$  véletlen értékeket egy ún. "random-szignál" előállítására használjuk fel. Ennek értékei csak kétfélek lehetnek:  $-1, +1$  (a  $\xi'_n$  értékeket ily módon kapcsolási időknek is nevezhetjük). A folyamatot a

$$\xi''_n = (-1)^j, \text{ ahol } \xi_j \leq n < \xi_{j+1}, \xi_j = \sum_{i=0}^j \xi'_i, j=0,1,\dots \quad (3.29)$$

hozzárendeléssel definiáljuk, amely azt jelenti, hogy a  $\xi'_0$  értéke által meghatározott időtartam alatt a  $\xi''_n=1, n=0,1,\dots,\xi'_0$ , a  $\xi'_0$  időpillanatban a folyamat  $-1$ -re vált és így marad egészen a  $\xi'_1+\xi'_2$  időpillanatig, stb. A random-szignált a (3.25) ábrán láthatjuk  $\tau'=19/256$  paraméterrel. Ha a  $\tau'$  paraméter kicsi, két billenés között sok idő telik el, ami az exponenciális

eloszlásból is adódik.



3.25. ábra A random-szignál időbeli képe.

A fenti ábrán látható Poisson-folyamat autokorreláció függvénye exponenciális lecsengésű (a  $\tau'$  paraméter reciprokát  $\tau^*$ -al jelölve) [5]:

$$R(\tau) = E^2 e^{-2\frac{\tau}{\tau^*}} \quad (3.30)$$

Esetünkben az  $E=1$ , mivel a folyamat a  $\pm 1$  értékeket veszi fel. A Wiener-Hincsin tételből következik, hogy ehhez a korreláció függvényhez lorentzi spektrum tartozik:

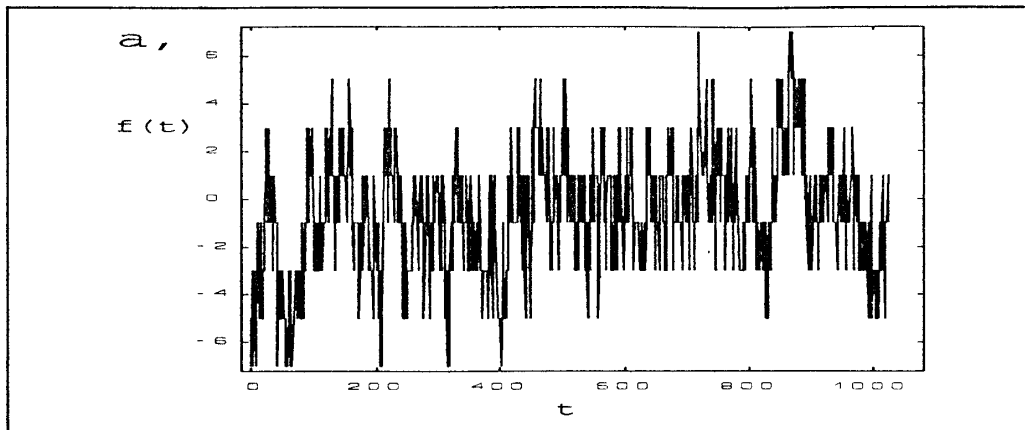
$$S(\omega) = C \frac{\tau^*}{1 + (\omega\tau^*)^2} \quad (3.31)$$

Ha több Poisson-folyamatot összegzünk úgy, hogy a  $\tau^*$  paraméter eloszlását egy  $\tau_1 < \tau < \tau_2$  intervallumban a  $g(\tau) = 1/\tau$ -nak vesszük, a  $1/f$  spektrumot kapunk. Ugyanis

$$S(f) \approx \int_0^{\infty} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} g(\tau) d\tau \approx \frac{1}{\omega \ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)} (\tan^{-1} \omega \tau_2 - \tan^{-1} \omega \tau_1) \quad (3.32)$$

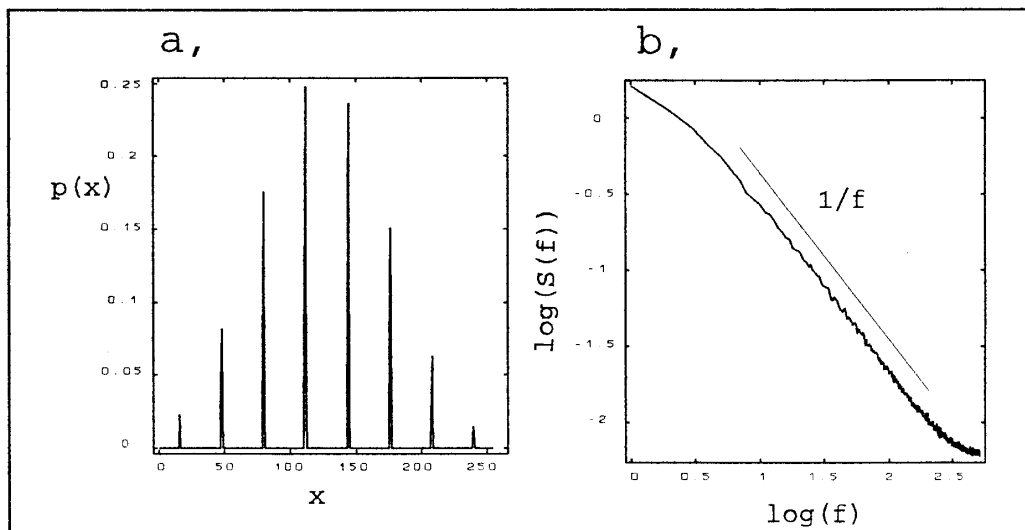
amiből az  $\omega \tau_1 \ll 1 \ll \omega \tau_2$  intervallumon  $1/f$  adódik. Az összegzést úgy végeztük el, hogy  $\tau' = (\tau^*)^{-1}$  az  $1/256, 2/256, 4/256, \dots, 256/256$  értékeket veszi fel, minden értékre előállítjuk a (3.25) ábrán látható Poisson-folyamatot, majd az amplitúdókat összegezzük. A

(3.26) ábrán egy így összegzett folyamat időbeli képe látható.



3.26. ábra A B modell időfüggvénye.

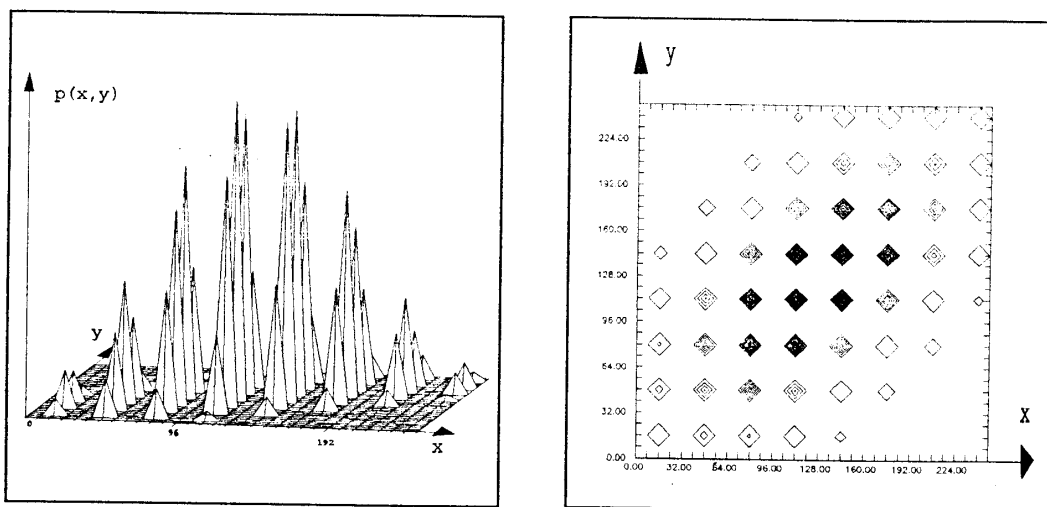
A (3.27) ábrán a folyamat sűrűségfüggvényét és a spektrumát láthatjuk. A sűrűségfüggvény a centrális határeloszlás tétel



3.27. ábra A B modell sűrűségfüggvénye  $k=100$  mintából (a), a spektruma  $k=1000$  mintából (b),  $\alpha=1.0$ .

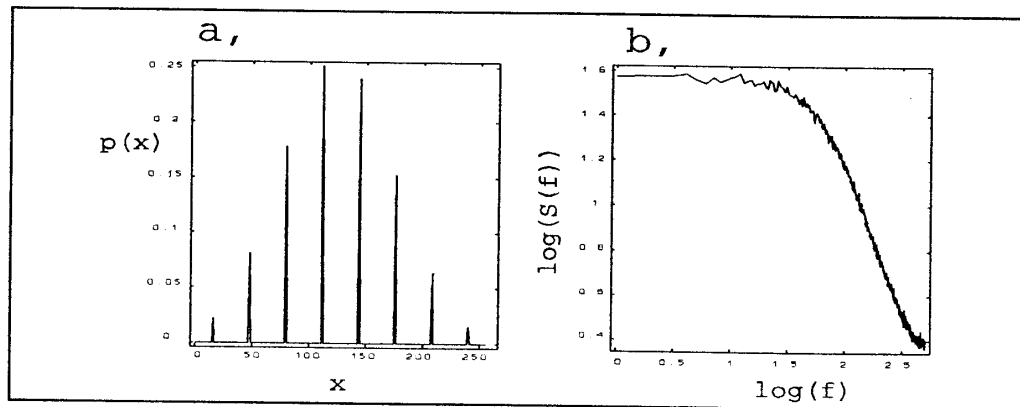
értelmében gaussi eloszlású. A folyamat csak néhány amplitúdóértékkel rendelkezik, egy lehetséges értékhez több mintaelem esik, így a minták számát elegendő kisebbre választani.

A folyamat együttes sűrűségfüggvényét  $r=1$  lépéssel  $k=30000$  mintából készítettük, a (3.28) ábrán a szintvonalas ábrázolása is



3.28. ábra A B modell együttes sűrűségfüggvénye.

látható. Az algoritmus eredményeképpen kapott zajfolyamat sűrűségfüggvénye és spektruma a (3.29) ábrán látható.



3.29. ábra A visszaállított folyamat sűrűségfüggvénye  $k=100$  mintából (a), spektruma  $k=1000$  mintából (b).

Az  $1/f$  spektrumot ebben az esetben sem kapjuk vissza, azaz az elosztott időállandójú lorentz-folyamatok szuperpozíciójával kapott  $1/f$  zaj sem Markov-folyamat.

#### 4. Kísérletek fizikai rendszerek zajával

A számítógépes modelleken kívül két elektromos áramköri modellt is vizsgáltunk. Ezekben egy Zener-diódát és egy MOSFET tranzisztort alkalmaztunk, melyek erős zajforrások [15,17].

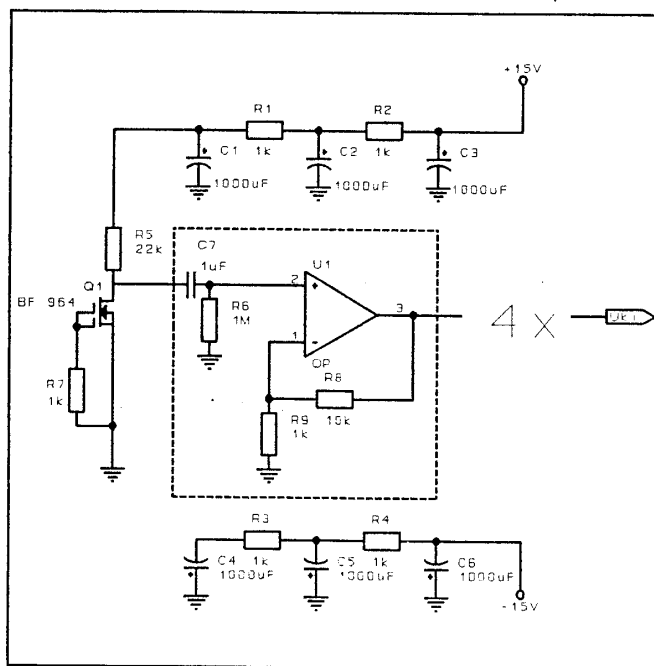
##### 4.1 Gyakorlati 1/f folyamat (C)

Az első fizikai modellben egy n-csatornás, kiürítéses módusú BF 964 jelű MOSFET tetródát alkalmaztunk. A (3.30) ábrán látható kapcsolási rajzon a draináram a 22K $\Omega$ -os ellenálláson feszültségingadozást hoz létre, melyet TL 081-es műveleti erősítővel a 10V -os tartományig erősítünk fel.

A műveleti erősítő előtt 0,16Hz alsó határfrekvenciájú felüláteresztő szűrőket helyeztünk el az alacsonyfrekvenciás komponensek és az egyenfeszültség levágására. A teljes 10<sup>4</sup>-szeres erősítést négy fokozattal érjük el. Erre ezen

erősítő átviteli görbéje miatt van

szükség, ugyanis körülbelül egy 30Hz-es alsó határfrekvencia felett az átvitel -20 dB/dekád -al csökken úgy, hogy az erősítés-



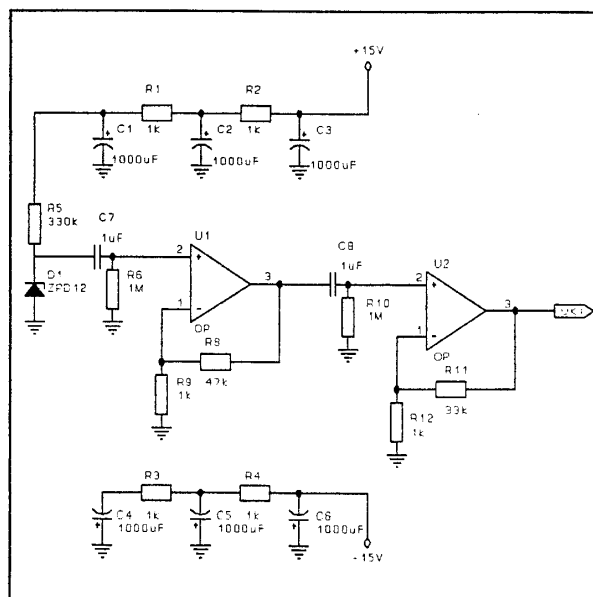
3.30. ábra A C modell kapcsolási rajza.

sávszélesség szorzat állandó marad, mégpedig közelítőleg 3MHz [18]. Emiatt az erősítést 10-szeresnek véve, 300KHz-ig egyenletes átvitelt kapunk. A későbbi felhasználást tekintve ez tökéletesen elegendő. Az áramkört  $\pm 15V$  feszültséggel tápláljuk. A hálózati zajok szűrését 0,16Hz felső határfrekvenciájú aluláteresztő szűrőkkel végezzük. A tranzisztor felerősített zaját feszültségosztón keresztül kapcsoljuk a (2.7) ábrán látott előmintavételező szűrőhöz. Az így megépített áramkör maximálisan 5,1V félértékszélességű Gauss-eloszlású feszültségjelet szolgáltat, melynek spektruma  $1/f^\alpha$ , ahol  $\alpha=0,88$ , ami az  $1/f$  modellezési célunkra megfelelő.

#### 4.2 $1/f$ modell (D)

A másik áramkörünket két részből állítottuk össze. Az első a zajforrás, egy Zener-dióda zaját erősíti fel, a másik egy alkalmas szűréssel ebből  $1/f$  zajt állít elő.

A (3.31) ábrán látható kapcsolásban egy ZPD12 jelű 12V-os diódát alkalmazunk zajforrásként. 15V-os tápfeszültségről egy 330K $\Omega$ -os ellenálláson át a diódát záróirányban, a letörési pont környezetében működtetjük. Ebben a tartományban a dióda fehérzajt szolgáltat [19]. A jel felerősítését



3.31. ábra A D modell kapcsolási rajza.



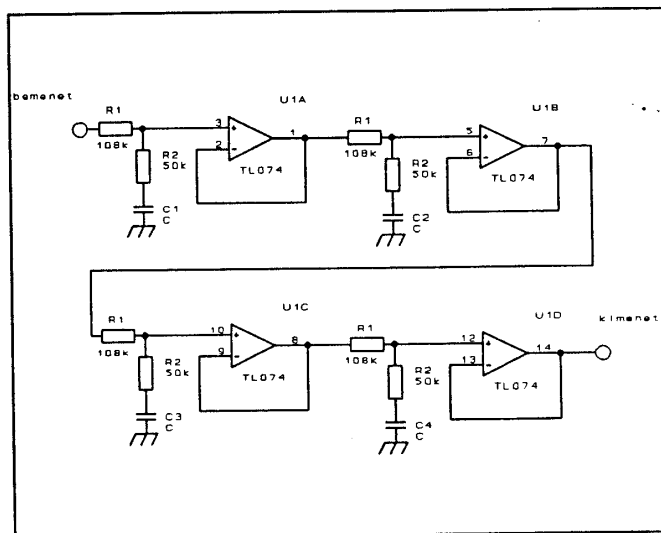
ismét TL 081 műveleti erősítőkkel végezzük. A két fokozattal megvalósított erősítés  $47 \cdot 33 \approx 1500$ -szeres. Az egyenletes átvitel felső határfrekvenciáját a 47-szeres erősítés határozza meg, ez közelítőleg 60KHz. Az előző áramkörhöz hasonlóan kétféle szűrést is végzünk az áramkörben: felüláteresztő szűrőkkel a kisfrekvenciás  $1/f$  zajt és az egyenszintet vágjuk le az erősítés előtt, az aluláteresztő szűrőkkel a hálózati zajokat szűrjük ki. Az áramkört  $\pm 15V$  feszültséggel tápláljuk. A kimeneten maximálisan 3,3V félértékszélességű, Gauss-eloszlású, fehérzaj mérhető.

A D modell másik áramköre egy szűrőlánc. Ennek alapja az, hogy egy  $A(f)$  átviteli függvényű áramkör a bemenetére adott  $x(t)$ ,  $S(f)$  spektrumú, jelet egy  $y(t)$  időfüggvényű,

$$S_y(f) = |A(f)|^2 S_x(f) \quad (3.33)$$

spektrumú jelbe viszi át. Ha  $|A(f)|^2 \sim 1/f$  és  $S_x = \text{konst.}$  (azaz a bemenő jel fehérzaj), akkor a kimeneten  $1/f$  zajt kapunk [20]. Az  $|A(f)|^2 \sim 1/f$  átviteli függvényt proporcionális szűrők felhasználásával biztosítjuk [21]. A (3.32) ábrán a teljes szűrőt láthatjuk.

Jelölje  $A_i(\omega)$ , ahol  $\omega = 2\pi f$ , egy proporcionális szűrő átviteli függvényét. A teljes szűrő átvitelét az egyes szűrők közé kapcsolt követő



3.32. ábra A szűrőlánc kapcsolási rajza.

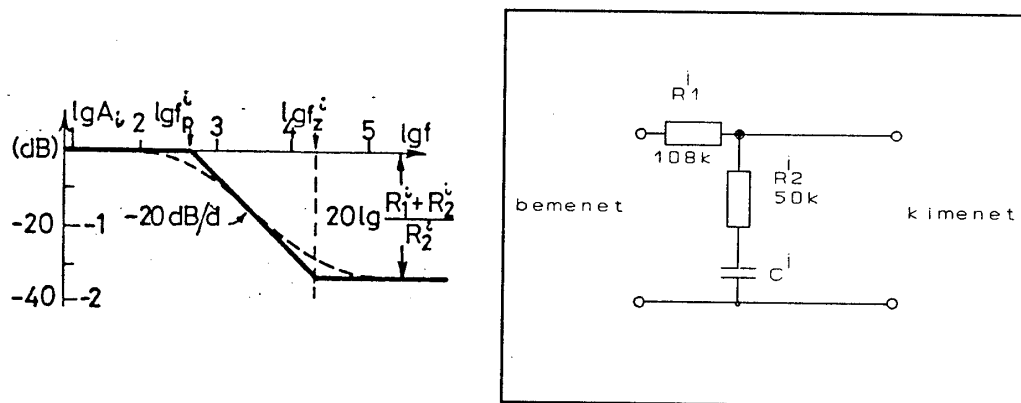
erősítők miatt az

$$A(\omega) = \prod_i A_i(\omega) \quad (3.34)$$

szorzat adja. Bode-diagramon a logaritmusképzés miatt ebből a szorzatból összeget kapunk:

$$20 \cdot \log(A(\omega)) = 20 \sum_i \log(A_i(\omega)) \quad (3.35)$$

A (3.33) ábrán egyetlen proporcionális szűrőtagot és Bode-diagramját láthatjuk.



3.33. ábra Proporcionális szűrő és átviteli függvénye.

Az átviteli függvénye:

$$A_i(\omega) = \frac{R_2^i + \frac{1}{j\omega C^i}}{R_1^i + R_2^i + \frac{1}{j\omega C^i}} = \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_z^i}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_p^i}}, \text{ ahol} \quad (3.36)$$

$$\omega_z^i = 2\pi f_z^i = \frac{1}{R_2^i C^i}, \quad \omega_p^i = 2\pi f_p^i = \frac{1}{(R_1^i + R_2^i) C}$$

Az  $f_p^i$  és  $f_z^i$  határfrekvenciák az  $R_1^i$ ,  $R_2^i$ ,  $C^i$  értékével megválaszthatók. Az  $f_p^i < f < f_z^i$  intervallumon a Bode-diagram -20dB/d meredekségű. Ez azonban csak közelítő egyenes, pontosan csak az intervallum közepén lévő inflexiós pontban igaz, míg a

valóságos szaggatott vonalú görbe  $-10\text{dB/dekád}$  meredekségű. Emiatt az  $|A_i(f)|^2$  az  $f_p^i < f < f_z^i$  intervallumon  $-20\text{ dB/d}$  meredekségű, tehát  $|A_i(f)|^2 \sim 1/f$ . Ha az egyes szűrőtagok  $f_p^i$  pólusfrekvenciáit az előző tag  $f_z^{i-1}$  zérusfrekvenciájához toljuk el az  $1/f$  menetű átvitel nagy tartományra is kiterjeszthető. Válasszuk azonosnak az összes szűrőtagban az  $R_1^i$  és  $R_2^i$  ellenállást. Ekkor a határfrekvenciák eltolását a  $c^i$  értékek beállításával végezhetjük. A  $\log(f_z^i) - \log(f_p^i) = 1$  (azaz  $f_z^i = 10 \cdot f_p^i$ ) kívánt feltétel a  $-10\text{dB/d}$  meredekségű egyenes alapján

$$20 \cdot \log\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right) = 10 \quad (3.37)$$

egyenletet követeli meg. Emiatt  $R_1^i = 2,16 \cdot R_2^i$ . Ezen feltétellel elérhető, hogy annyi szűrőtagra lesz szükségünk, ahány frekvenciadekád felett akarjuk az  $|A_i(f)|^2 \sim 1/f$  átvitelt biztosítani. A működési tartományt válasszuk  $1\text{Hz} < f < 10^4\text{Hz}$ -nek, azaz négy szűrőtagra van szükségünk. A határfrekvenciákra vonatkozó (3.36) kifejezésekből következik, hogy az  $R_1^i + R_2^i$  értéknek legalább  $10^5\Omega$ -nak lennie ahhoz, hogy  $f_{p0} = 1\text{Hz}$ , a legelső pólusfrekvenciánál  $C_0$  értéke a  $\mu\text{F}$ -os tartományba essék. Legyen  $R_1 = 1,08 \cdot 10^5\Omega$ ,  $R_2 = 5,03 \cdot 10^4\Omega$  így a  $C_0 = 1\mu\text{F}$ ,  $C_1 = 100\text{nF}$ ,  $C_2 = 10\text{nF}$ ,  $C_3 = 1\text{nF}$  névleges értékű kondenzátorokat alkalmazhatjuk. A panalen az ellenállásokat viszont két eltérő értékű ellenállás soros kapcsolásával állítottuk a pontos értékűre. Követő erősítőként TL 074 műveleti erősítőt alkalmaztunk, mert egyetlen tokban éppen a kívánt  $4\text{db}$  műveleti erősítő áll rendelkezésre.

Az így összeállított szűrővel a fehérzajú forrás jelét az  $1\text{Hz} < f < 10\text{KHz}$  intervallumon  $1/f$  spektrumú jellé alakítjuk át.

## **Előmintavételező szűrő, A/D konverter**

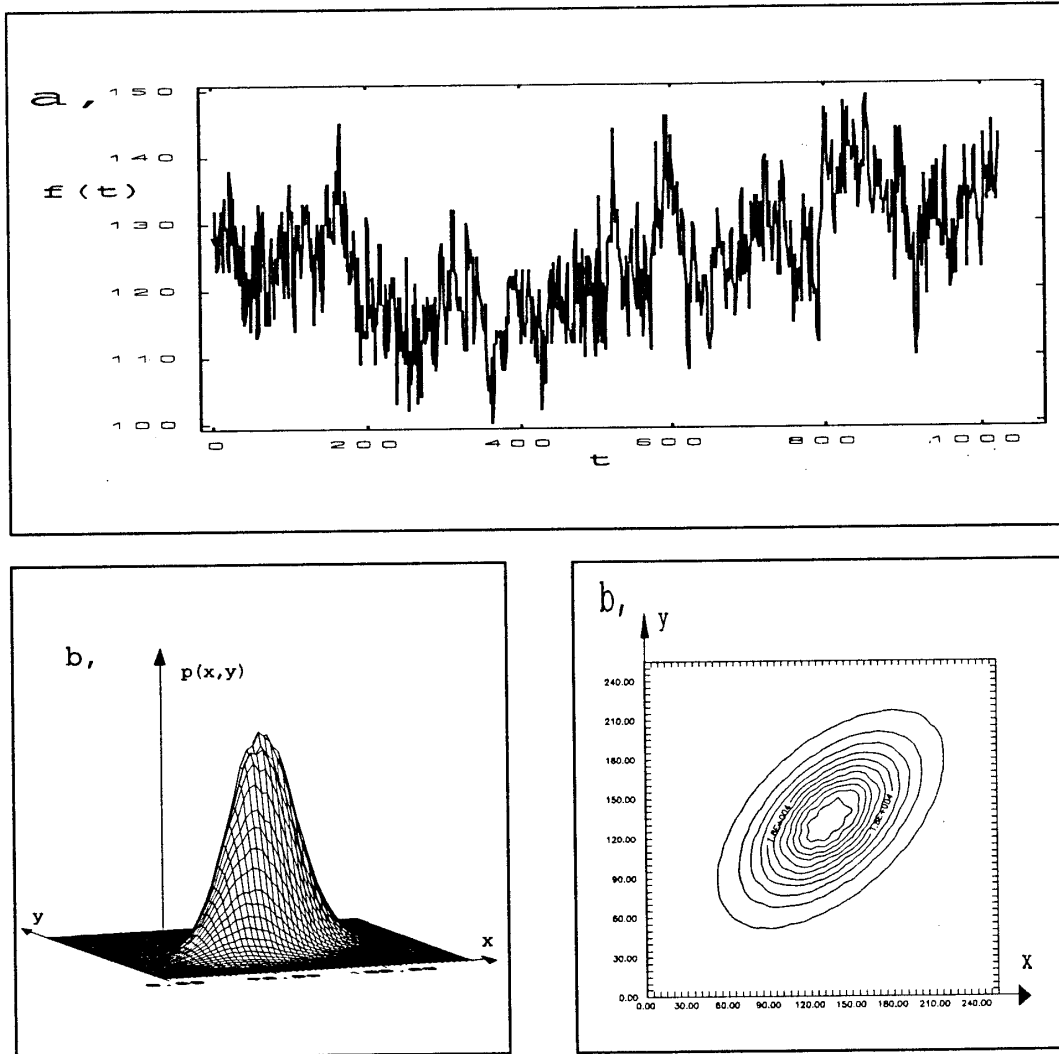
A (2.6.1) fejezetben láttuk, hogy a mintavételezés előtt a fent előállított jeleket sávhatárolttá kell tennünk. Ennek módja egy előmintavételezési szűrő alkalmazása. Méréseink során egy Cauer típusú elliptikus szűrőt alkalmaztunk, melynek jellemzője, hogy átviteli tartománya 3KHz-ig tart, és itt az átviteli ingadozása 0,1dB. 4,5KHz-nél az előbbi szinthez képest -50dB az elnyomása. A *C* és a *D* modellek  $1/f$  működési tartományai a 3KHz-ig terjedő intervallumot túlteljesítik.

A (2.6) fejezetben említett Shannon-tételnek megfelelően a digitalizálást  $f_{mv}=10\text{KHz}$  mintavételi frekvenciával végeztük el. Az alkalmazott A/D konverter egy PC-30 jelű átalakító kártya, melyet egy IBM AT/486 számítógépbe építve működtettünk. Az  $1/f_{mv}$  időközönként beérkező feszültségértékeket a konverter  $25\mu\text{s}$  alatt kódolja (szukcesszív approximációs elven) egy 12 bites bináris számmá.  $\pm 10\text{V}$  -os méréshatáron mérve ez 0,005V-os felbontást tesz lehetővé.

### **3.4 A kísérleti modellek eredményei**

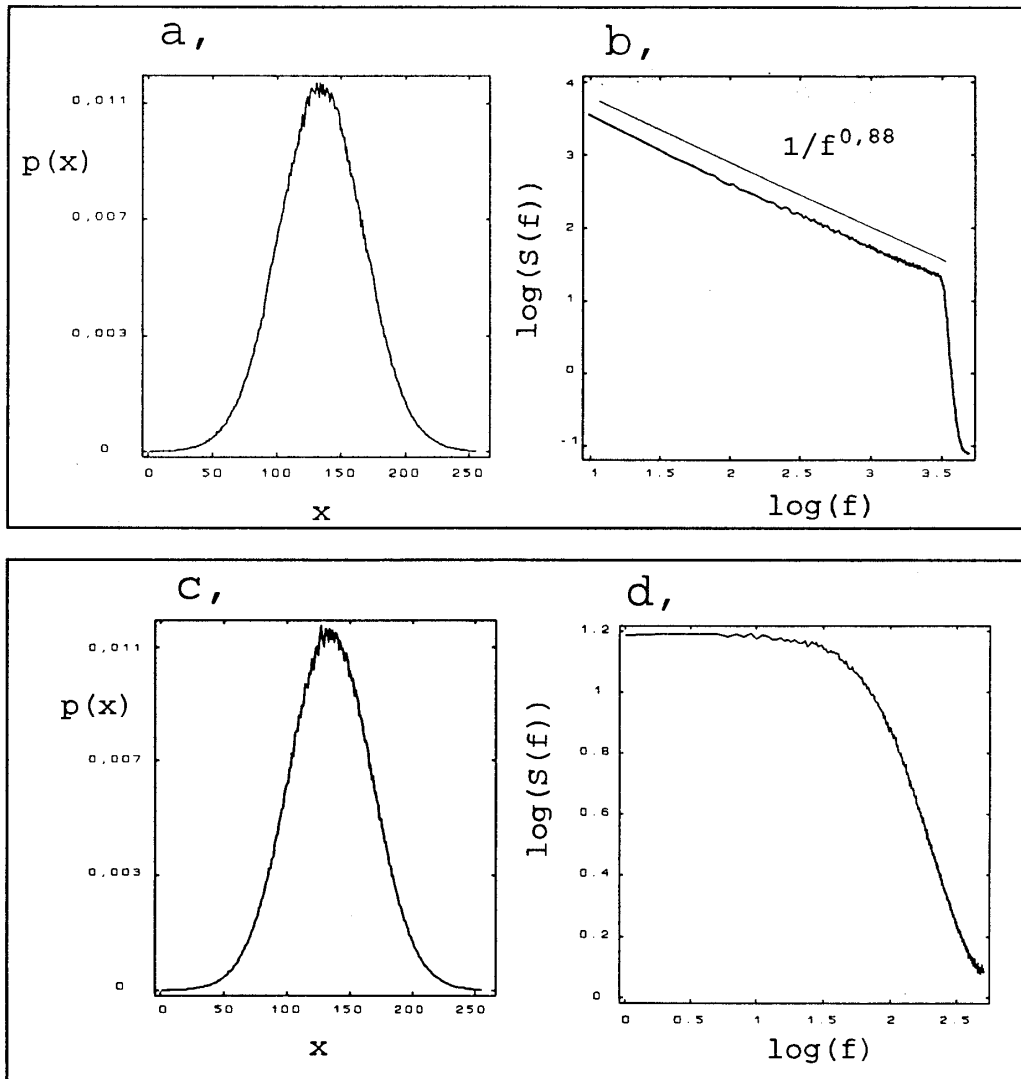
Az A/D konverter által szolgáltatott számokat 16-al elosztva 8 bites felbontást kapunk. Ekkor kapjuk ugyanis az eddigiekben is használt 256 értékű felbontást. Egy mintát ismét 1024 db elemből állítunk össze. Ezen minták számát továbbra is  $k$ -val jelöljük. A memóriába bekerült értékek további feldolgozása a bemutatott algoritmusok felhasználásával történt.

A (3.34) ábrán a C modell időfüggvényét és együttes sűrűségfüggvényét láthatjuk. Az  $r=5$  lépésszám választásával a korrelációs együttható  $\rho=0,5$ -nek adódik.



3.34. ábra A C modell időfüggvénye (a), együttes sűrűségfüggvénye (b)  $k=260000$  mintából.

A (3.35) ábrán az eredeti és visszagenerált sűrűségfüggvényt és teljesítménysűrűség-függvényt láthatjuk.



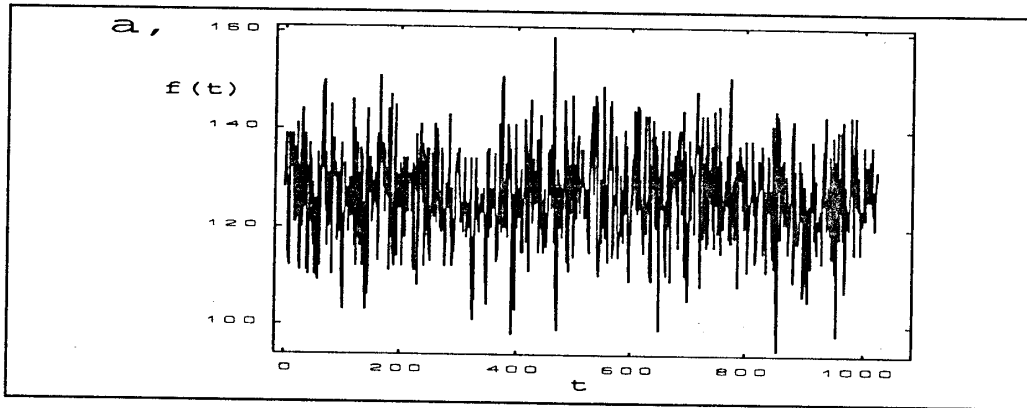
3.35. ábra a, A C modell sűrűségfüggvénye; b, spektruma.

c, Az visszaállított időfolyamat sűrűségfüggvénye;

d, spektruma. A minták száma  $k=5000$ .

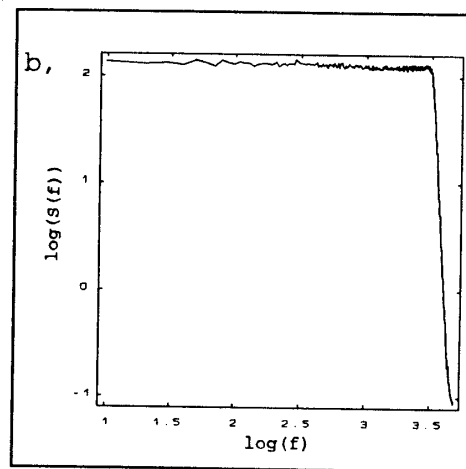
Az algoritmus eredménye az előzőekkel megegyező: a regenerált zaj lorentzi (3.35/d ábra). Tehát a MOSFET  $1/f$  zaja (mely egy valódi fizikai rendszerben fellépő Gauss-folyamat) sem markovi.

A D modell Zener-diódával előállított fehér zajának időfüggvényét és spektrumát a (3.36) ábrán láthatjuk.

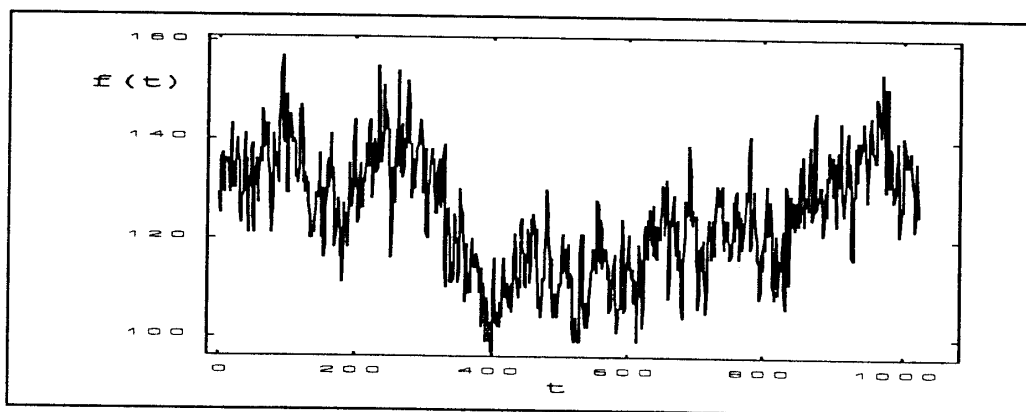


3.36/a ábra A D modell fehér zajának időfüggvénye.

Ebből a fehérzajból a szűrőáramkör segítségével  $1/f$  zajt készítünk. A (3.33) kifejezés lényegében ezen szűrő átviteli függvénye négyzetének mérését jelenti, ha a szűrő bemenetére fehérzajt adunk. Az így kapott jel időfüggvényét a (3.37) ábrán láthatjuk. Megfigyelhető, hogy ez a szűrés előtti fehérzajhoz viszonyítva "lomhább", ami pedig éppen a

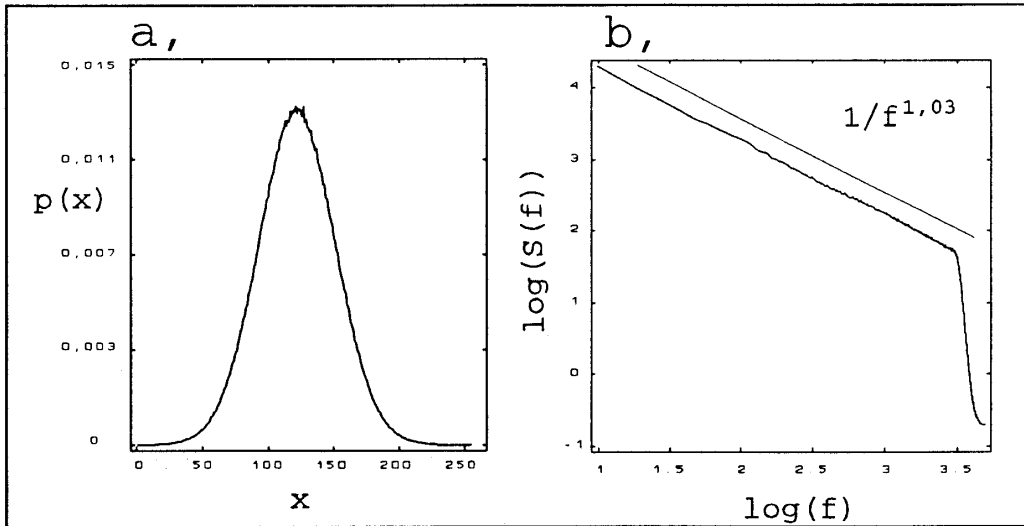


3.36/b ábra A fehérzaj spektruma.



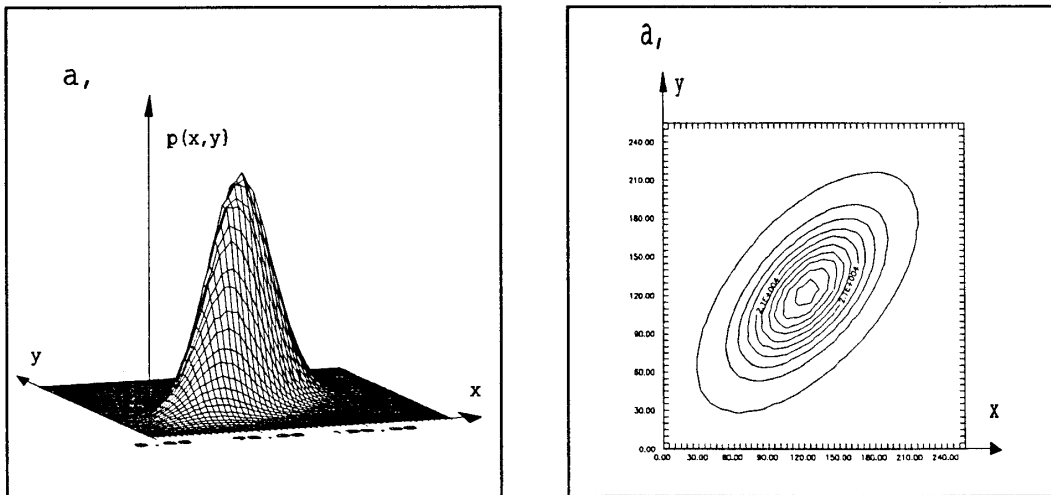
3.37. ábra A D modell  $1/f$  zajának időfüggvénye.

magasabb frekvenciájú tagok súlyának csökkenéséből adódik. A (3.38) ábrán a (3.37) jelhez tartozó sűrűségfüggvényt és spektrumot láthatjuk .



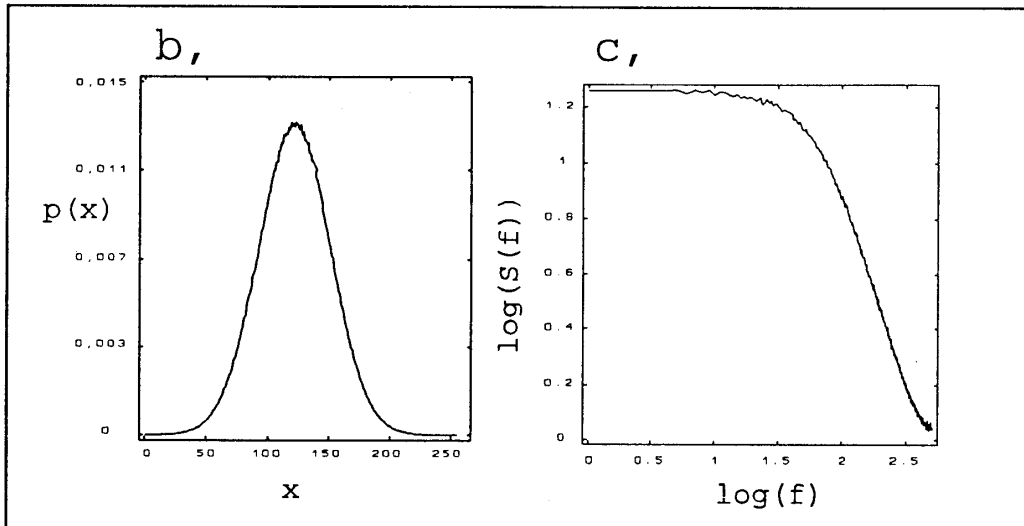
3.38. ábra Az  $1/f$  zaj sűrűségfüggvénye (a), spektruma (b)  $k=5000$  mintából.

A (3.39) ábrán az együttes sűrűségfüggvény és az algoritmus eredményeképpen kapott folyamat sűrűségfüggvénye és spektruma látható.



3.39/a ábra A  $D$  modell együttes sűrűségfüggvénye. Minták száma  $k=270000$ , a korrelációs együttható  $\rho=0,6$  .





3.39/b ábra Az algoritmussal kapott folyamat sűrűségfüggvénye és spektruma  $k=5000$  mintából.

Az eredeti jel spektrumát ebben az esetben sem kaptuk vissza, vagyis az eredeti Gauss  $1/f$  zaj ebben az esetben sem markovi.

## 5. A modelleken végzett mérések eredményeinek összefoglalása

Kísérleteink célja az 1/f folyamatok markovi tulajdonság vizsgálatán alapuló rekurzív modelljének felállítása volt. Ehhez két számítógépes ill. egy analóg modellt és egy valódi fizikai 1/f folyamattal rendelkező rendszert vizsgáltunk. A mérés egy algoritmus elvégzését jelentette. Ennek eredménye, hogy minden vizsgált folyamat esetében az algoritmussal újragenerált zajok spektrumai lorentzi görbék.

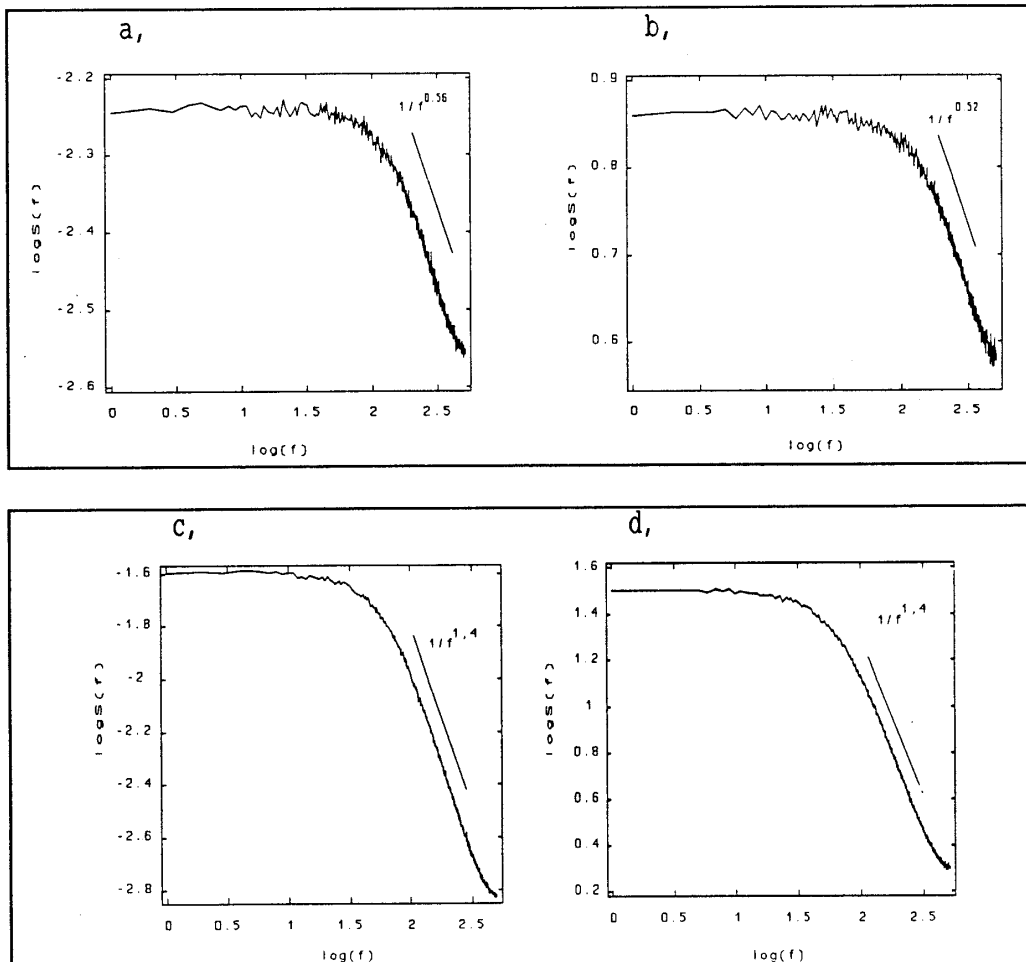
Ezt úgy értelmezhetjük, hogy az algoritmus működése közben a bemenő folyamat információtartalmából csak annyi marad meg, amennyi az adott korrelációjú jel markovi tulajdonságának megfelel. Ha az átmenetmátrix ismerete nem kielégítő a leírás szempontjából (mivel a másodrendű sűrűségfüggvény a (3.5) kifejezés szerint egyértelmű kapcsolatban van az átmenetmátrixszal), az azt jelenti, hogy ezeket a folyamatokat az elsőrendű és a másodrendű sűrűségfüggvényeik nem jellemzik egyértelműen. Tehát elsőrendű átmenetmátrix mérése nem elég egy 1/f folyamat iterációs modelljéhez. Más szóval: a vizsgált 1/f zajok egyike sem Markov-folyamat.

Egy továbblépési lehetőség a magasabb rendű átmenetmátrixok mérése, ami magasabbrendű együttes sűrűségfüggvények mérését jelenti. Lehetséges, ha a generált folyamat "emlékezetét" két lépésre kiterjesztjük, már kielégítő leírást kapunk. Ez tehát egy  $X_{n+1}=f(X_n, X_{n-1})$  rekurzív egyenletet jelentene. Ezenkívül a másik alapfeltételt, mely szerint Gauss-eloszlású 1/f zajokat vizsgáljunk, ugyancsak elejthetjük. Végző soron, ha találnánk egy  $r$ -ed rendű átmenetmátrixot, amelynek felhasználásával az

inverzilem módszer alapján  $r$  lépéssel a zaj visszagenerálható úgy, hogy ezzel az eredeti  $1/f$  folyamat is visszaáll, ezt az  $r$  lépéses modellt tekinthetjük a keresett iterációs modellnek.

Elindulhatunk az átmenetmátrix mérésével más úton is. Ez a (3.22) kifejezés újraértelmezéséből fakad. Tegyük fel, hogy van két valószínűségi változónk, legyenek ezek a mért  $\xi_n, \xi_{n+1}$  értékek.  $\xi_{n+1}$  értékét akarjuk becsülni  $\xi_n$  értéke alapján. Keressük e célból  $\xi_{n+1}$  értékének adott  $\xi_n$ -re vonatkozó  $M(\xi_{n+1}|\xi_n)$  feltételes várható értékét. A két változó együttes eloszlásából meghatározzuk az  $x$  változó  $y=M(\xi_{n+1}|\xi_n=x)$  függvényt, és a paramétereket becsüljük. Tehát keressük a  $\xi_n$  változónak azt a  $h(\xi_n)=a+b\xi_n$  lineáris függvényét, mely mellett az  $M[(\xi_{n+1}-h(\xi_n))^2]$  minimális (ez pedig a  $h(\xi_n)=M(\xi_{n+1}|\xi_n)$  esetben áll fenn). Ezt a feltételezett függvénykapcsolatot lineáris regresszióknak nevezzük. Esetünkben  $\xi_n, \xi_{n+1}$  együttes eloszlása két dimenziós normális eloszlás, a keresett feltételes eloszlás pedig mint (3.21) kifejezésnél láttuk  $(m_2+\rho\sigma_2/\sigma_1*(x-m_1), \sigma_2(1-\rho^2))$  paraméterű normális eloszlás. Ebből következik, hogy a feltételes várható érték  $M(\xi_{n+1}|\xi_n=x)=m_2+\rho\sigma_2/\sigma_1*(x-m_1)$ , azaz a  $\xi_{n+1}$  változó  $\xi_n$ -re vonatkozó regressziós görbéje egy  $\rho\sigma_2/\sigma_1$  iránytangensű egyenes. A  $\xi_{n+1}$  becslését a  $\xi_n$  változó értékéből így a  $\xi_{n+1}=m_2+\rho\sigma_2/\sigma_1*(\xi_n-m_1)$  adja. Esetünkben, mint láttuk  $m_1=m_2=m, \sigma_1=\sigma_2$ . Emiatt  $\xi_{n+1}=\rho\xi_n+k$  konst. Keressük ezen közelítő formula alapján az iterációs egyenletet a  $\xi_{n+1}=\rho\xi_n+\eta_n$  alakban, ahol  $\rho$  a korrelációs együttható,  $\eta_n$  a  $\xi_n$ -től független valószínűségi változó. A vizsgált esetben  $\eta_n$  egy fehérzajból származó véletlen számot jelent. Ez az iterációs egyenlet ugyancsak lorentzi spektrumot szolgáltat, és rendelkezik egy érdekes tulajdonsággal. Ha  $\rho \rightarrow 0$ , akkor fehérzajt kapunk eredményül. Ha  $\rho \rightarrow 1$ ,  $1/f^2$  zajt;  $0 < \rho < 1$  esetben pedig lorentzi

spektrum az eredmény. A  $\rho$  értékével a spektrum töréspontjától kezdődő egyenes dőlési szögét változtathatjuk, a  $\rho$  értékének megválasztásával az egyes esetekben ennek értelmében kapjuk a megfelelő spektrumokat (5.1/a,c ábra).



**5.1 ábra** Az eredeti algoritmussal generált spektrumok: b,  $\rho=0,18$  és d,  $\rho=0,61$ ; ezekhez az egyszerűsített rekurzióval készült spektrumok: a, és c, ábra.

Van azonban még egy érdekes tulajdonság, amely miatt nem érdektelen foglalkozni ezen egyszerűbb rekurziós formulával. Ha az (A) modellben nyerhető  $1/f^\alpha$  folyamatból előállítjuk az  $\alpha$ , mint paraméter,  $0 < \alpha < 2$  tartományba eső egyes értékeihez tartozó

átmenetmátrixokat, majd ezekből az algoritmus segítségével újrageneráljuk a zajfolyamatokat, akkor hasonló módon viselkedő lorentzi spektrumokat kapunk. Tehát ha belátható a két rekurziónak az azonos spektrumok előállításában való valamiféle ekvivalenciája, akkor a másodikként látott egyszerűbb rekurzió (pl. a számolási idők miatt) is azonosan alkalmazható. A (5.1) ábrán a itt említett két rekurzióval kapott spektrumok láthatók. A  $\xi_{n+1} = \rho \xi_n + \eta_n$  rekurziós formulában a  $\rho$  értékét vettük paraméternek, az  $1/f^\alpha$  folyamat esetén az  $\alpha$  értékét változtattuk. Eszerint először az  $1/f^\alpha$  folyamatban az  $\alpha=0,25$  és  $\alpha=2$  értékeket választva,  $k=30000$  mintából előállítottuk az egylépéses átmenetmátrixokat. Ezekből a (3.22) kifejezésen alapuló módszerrel a korrelációs együtthatók rendre  $\rho=0,18$  és  $0,61$ -nek adódtak. Ezen korrelációs együtthatókkal a  $\xi_{n+1} = \rho \xi_n + \eta_n$  rekurziós formulával  $k=5000$  mintából spektrumokat generáltunk. Ezek rendre az 5.1/a és 5.1/c ábrán láthatók. A korreláció ilyen választásával tehát illesztettük a  $\xi_{n+1} = \rho \xi_n + \eta_n$  rekurziót az  $1/f^\alpha$  folyamathoz. Az átmenetmátrixokból az inverzelem módszerrel is visszageneráltuk a spektrumokat, ugyancsak  $k=5000$  mintából, az 5.1/b ( $\alpha=0,25$ ) és az 5.1/d ( $\alpha=2$ ) ábrán láthatók. Így az egymásnak megfelelő spektrumok egymás mellé kerültek. Az ábrából látható, hogy a menetük jó egyezést mutat.

Ha a kétféle generálási mód megegyezik az eredményeket illetően, nem érdektelen egy magasabb rendű átmenetmátrixhoz is regressziós függvényt keresni. A  $\xi_{n+1} = \rho \xi_n + \eta_n$  lineáris rekurzió magasabb rendű általánosításában szereplő koeficienssek ugyanis éppen az átmenetmátrix alakjának felírásában használt korrelációmátrix elemeiből adódnak. Ezen tényezőkhez az egyes zajtípusok esetén esetleg szemléletes tartalom is rendelhető.

## 6. Az eredmények összefoglalása

Célul tűztük ki az 1/f zajok egyszerű, egy elemi Markov-folyamattal rekonstruálható modelljének megalkotását. A kísérleteinkhez szükséges 1/f zajokat számítógéppel generált és valódi fizikai folyamatból nyertük. A kísérleti mérésekhez zajforrásként MOSFET tranzisztort illetve Zener diódát alkalmaztunk. A számítógépes modellek egy egyenletes eloszlást szolgáltató vélelenszám generátorra épültek. Egyikben a Fourier-transzformációt alkalmaztunk, másokban pedig független Poisson-folyamatokat összegeztünk. A célul kitűzött feladat megoldására egy zajfolyamatot generáló algoritmust készítettünk, mely a vizsgált folyamatokhoz rendelhető átmenetmátrixot használja fel. Az algoritmus működését két újabb számítógépes modellel ellenőriztük. Az elvégzett kísérletek általánosságát a vizsgált folyamatok (gaussi) eloszlásának gyakori előfordulása, valamint a különböző módon előállított 1/f folyamatokra végzett vizsgálat támasztja alá.

A mérési eredmények alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy az 1/f folyamatok nem rendelkeznek markovi tulajdonsággal. Ezen a folyamatok a keresett iterációs modellnél összetettebb, bonyolultabb modellt követelnek meg. A további vizsgálatok egy lehetséges irányát az egynél magasabb rendű átmenetmátrixok mérésével jelöltük ki.

## Irodalomjegyzék

- [1] R.F. Voss: Proc. 33rd Annual Symp. on Freq control, Atlantic City, 1979.
- [2] F.N. Hooge: 1/f noise Physica 83B (1976) 14-23
- [3] Dr. Ferenc Pál: Hírközléelmélet Tankönyvkiadó, Bp. 1974.
- [4] Prékopa András: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal Műszaki K., Bp. 1980.
- [5] Fazlollah M. Reza: Bevezetés az információelméletbe Műszaki K., Bp. 1966.
- [6] Dr. Fekete István: Matematika és számítástechnika Akadémiai K., Bp. 1986.
- [7] Csáki Frigyes: Szabályozások dinamikája Akadémiai K., Bp. 1974.
- [8] Dr. Kiss László Béla: Zajmérések vanádiumpentoxid egykristályokon Doktori értekezés, 1984.
- [9] Dr. Kiss László Béla: Kézirat
- [10] S. Karlin, H. M. Taylor: Sztochasztikus folyamatok Gondolat K., Bp. 1985.
- [11] Norbert Hesselmann: Digitális jelfeldolgozás Műszaki K., Bp. 1985.
- [12] Dalos Gy., Szabó Cs.: Hírközlő csatornák véletlen hozzáférési módszerei Akadémiai K., Bp. 1984.
- [13] Deák Ferenc: Véletlenszám-generátorok és alkalmazásuk Akadémiai K., Bp. 1986.

- [14] Kérchy László: Bevezetés a véges dimenziós vektorterek elméletébe JATEPress, Szeged 1991.
- [15] Motchenbacher-Fitchen: Kis-zajú elektronikus áramkörök tervezése Műszaki K., Bp. 1977.
- [16] Nelson Max: Noise and stochastic processes Dover Publications, New York 1954.
- [17] Dr. Ambrózy András: Elektronikus zajok Műszaki K., Bp. 1972.
- [18] U. Tietze, Ch. Schenk: Anlóg és digitális áramkörök Műszaki K., Bp. 1990.
- [19] J. Belan, F. Maticsak, V. Mikolaj, F. Strapko, V. Latta: Dependence of voltage on the ratio of the avalanche and tunneling in reference diodes Proc. Noise in Physical Systems, 263, Akadémiai K., Bp. 1990.
- [20] Dr. Schnell László: Jelek és rendszerek mérés technikája Műszaki K., Bp. 1985.
- [21] Marvin S Keshner:  $1/f$  noise Proc. of the IEEE, Vol. 70, No. 3, March 1982.
- [22] Dévényi Dezső, Gulyás Ottó: Matematikai statisztikai módszerek a meteorológiában Tankönyvkiadó, Bp. 1988.



### Köszönetnyilvánítás

Ez a dolgozat a József Attila Tudományegyetem Természettudományi Karának Kísérleti Fizikai Tanszékén készült.

Köszönettel tartozom Dr. Hevesi Imre tanszékvezető egyetemi tanárnak, hogy munkámat a Kísérleti Fizikai Tanszéken lehetővé tette, Dr. Kiss László adjunktusnak a dolgozat elkészítésében nyújtott hasznos tanácsaiért és támogatásáért.

Köszönöm Gingl Zoltánnak a munkám minden területén nyújtott nélkülözhetetlen segítségét,

Vinkó Józsefnek a dolgozat alapötletét és értékes megjegyzéseit,

Márton Zsuzsannának a munkámban nyújtott segítségét és hasznos tanácsait,

Dr. Vajtai Róbertnek a segítőkész érdeklődését és hasznos tanácsait,

Dr. László Sándornak a dolgozat átolvasásában nyújtott segítségét.

Köszönettel tartozom Majkut Ferencnek a kísérleti panelek elkészítésében nyújtott segítségéért.