

Szegedi Tudományegyetem  
Természettudományi Kar

# Digitális jelprocesszor-vezérelt zajgenerátor fejlesztése

Diplomamunka

Nagy Sándor  
fizikus hallgató

Témavezető :

Dr. Gingl Zoltán  
SZTE, Kísérleti Fizikai Tanszék

Szeged  
2002

# **Tartalom**

1. Bevezetés
2. A zajok matematikai leírása
  - 2.1. A statisztikus jellemzők leírása
  - 2.2. Véletlen folyamatok időbeli tulajdonságainak leírása
  - 2.3. A mintavételi tétel, diszkrét Fourier-transzformáció
3. Zajok osztályozása spektrális intenzitás szerint
4. Zaj előállítási módszerek
5. Digitális zajgeneráló algoritmus elméleti háttere
  - 5.1. Spektrum torzulása mintavételnél
  - 5.2. Bilineáris transzformáció
  - 5.3. Elsőfokú digitális szűrők paraméterezése
6. Digitális színes zajgenerátor megvalósítása
7. Az algoritmus implementálása DSP-re
8. Eredmények
9. Köszönetnyilvánítás
10. Függelék
11. Irodalomjegyzék

## **1. Bevezetés**

Az  $1/f$  zajra a XX. század első felében figyeltek fel, mint az alacsony frekvenciákon erős többlettel rendelkező zajra. Az  $1/f$  zaj igen sok fizikai rendszerben előfordul, megtalálható félvezetők vezetőképességi fluktuációjában, asztrofizikában, lézerfizikában, de biológiai rendszerekben, sőt gazdasági adatok ingadozásaiban is. Kutatása aktualitását nem veszítette el, mert általános előfordulására mai napig nincs magyarázat.

Tanszékünkön évek óta folyik kutatómunka ezen a területen. Eredmények születtek az  $1/f$  zaj amplitúdó és időbeli szerkezetének vizsgálatában, nemlineáris amplitúdó-transzformációkkal szembeni invarianciájának kutatásában, szintmetszeteinek tulajdonságának megfigyelésében, továbbá biológiai illetve más rendszerekhez kapcsolódóan a sztochasztikus rezonancia témakörében. Ezek után igény támadt, hogy más spektrumú zajokra is végezzünk hasonló vizsgálódásokat, azonban az ehhez szükséges eszközökben hiány mutatkozik.

Dolgozatom célja egy olyan digitális zajgeneráló algoritmus fejlesztése és megvalósítása, amely az említett kutatási témákban hasznos eszköz lehet. Az előállítandó zaj  $\frac{1}{f^\alpha}$  ( $\alpha = 0,1$ -től  $\alpha = 1,9$ -ig) spektrumú, és legalább négy dekád sávzélességben szolgáltat jelet. Mivel az előállítás digitális úton történik, ezért a létrejövő jelalak bármikor reprodukálható, és előnye, hogy az algoritmus könnyen generálható fehér zajból állítja elő a kívánt jelet. Az  $\frac{1}{f^\alpha}$  zaj előállítását megfelelően

paraméterezett elsőfokú digitális szűrők által szolgáltatott Lorentzi zajokat összegzésével végezzük el. A fejlesztés LabVIEW fejlesztőkörnyezetben történt, de a gyorsaság és megbízhatóság kedvéért az algoritmus átültetése DSP-re (digital signal processor) folyamatban van. Így sikerülhet elérni a 400 kHz-es mintavételezési frekvenciát, ami több mint 100kHz felső határfrekvenciájú  $\frac{1}{f^\alpha}$  spektrumú analóg jel előállítását teszi lehetővé. Továbbá a dolgozatban bemutatott rendszer nagyon rugalmas abból a szempontból, hogy csupán a paraméterek, de rosszabb esetben is csak a szoftver megváltoztatásával változatos jelalakokat állíthatunk elő.

A munka végső célja egy olyan viszonylag kompakt eszköz létrehozása, amit manuálisan, de akár számítógéppel is lehet vezérelni, és számos kutatási feladat megoldása során felhasználhatnak.

## **2. A zajok matematikai leírása**

### **2.1. A statisztikus jellemzők leírása**

Ha egy sztochasztikus  $U$  mennyiséget mérünk digitalizált formában, akkor lényegében a legteljesebb információt az egyes  $U$  értékekhez tartozó  $p_k$  értékek megadásával kaphatjuk. A  $p_k$  egy 0 és 1 közé eső valós,  $k$  pedig egy pozitív egész szám. Ekkor a valószínűségszámítás axiómája szerint:

$$\sum_k p_k = 1 \quad (2.1)$$

ahol az összegzést  $k$  minden lehetséges értékére kell elvégezni. A  $p_k$  valószínűségek segítségével megadható a folyamat  $M(U)$  várható értéke:

$$M(U) = \sum_k U_k p_k = 1 \quad (2.2)$$

Az  $U$  középértéket az előzőek felhasználásával a következőképpen kaphatjuk meg :

$$\bar{U}_N = \sum_k \frac{n_k}{N} U_k \quad (2.3)$$

ahol  $N$  a különböző feszültségértékek számát jelenti,  $n_k$  pedig megadja, hogy egy  $U_k$  feszültségértéket hányszor kaptunk. Mivel a  $p_k$  valószínűségek az  $n/N$  hányados határértékeiként adódnak  $N \rightarrow \infty$  esetén, ezért látható, hogy

$$M(U) = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{U}_N \quad (2.4)$$

A várható érték még nem elegendő a mennyiség kielégítő leírásra. Két teljesen különböző adathalmaz várható értéke megegyezhet, miközben a felvett diszkrét értékek  $M(U)$ -től való átlagos eltérése különböző lehet. Hogy elkerüljük azt, hogy az

ingadozás mértékét a összes  $p$  értékkel jellemezzük, célszerűnek látszik bevezetni egy újabb mennyiséget, a szórást, amit jelöljünk  $D(U)$ -val:

$$D(U) = \sqrt{\sum_k [U_k - M(U)]^2 p_k} \quad (2.5)$$

A  $D(U)$  mennyiség egy számmal jellemzi, hogy az  $U$  mennyiség mennyire ingadozik a várható érték körül. Természetesen a várható érték és szórás lényegesen kevesebbet mond, mint a  $p$  valószínűségek, de a gyakorlatban sokszor elegendő ezeket a paramétereket vizsgálnunk.

Adjuk meg az előzőekben bevezetett mennyiségeket, ha az  $U$  feszültség nem csak diszkrét értékeket vehet fel, hanem adott tartományon folytonos. Hogyan adhatjuk meg a folytonos értékészletű mennyiség valószínűségi leírását? Ekkor egy adott  $U$  érték előfordulásának valószínűsége nullával lesz egyenlő, mert a valószínűségek összegének most is egynek kell lennie. Így a felbontást finomítva közelítjük a folytonos esetet. Ekkor egyre több  $p$  értékünk lesz, az összegük viszont rögzített. Vezessünk be egy olyan  $p(U)$  függvényt, melyre a  $p(U)dU$  mennyiség azt adja meg, hogy mekkora valószínűséggel esik a feszültség az  $U$  érték körüli kicsiny  $dU$  nagyságú tartományba. A  $p(U)$  függvényt valószínűségi sűrűségfüggvénynek nevezik, és a diszkrét valószínűségértékek folytonos megfelelőjének tekinthetjük. A valószínűségek összegére vonatkozó (2.1) kifejezés most a következő alakú :

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(U)dU = 1 \quad (2.6)$$

A várható érték, a szórás és az eloszlásfüggvény definíciója folytonos esetre az előzőek alapján:

$$M(U) = \int_{-\infty}^{\infty} U * p(U) dU \quad (2.7)$$

$$M(U) = \int_{-\infty}^{\infty} [U - M(U)]^2 p(U) dU \quad (2.8)$$

$$F(U) = \int_{-\infty}^U p(U') dU' \quad (2.9)$$

Előfordulhat, hogy nem egy, hanem több folyamatot vizsgálunk. Vezessünk be egy olyan fizikai mennyiséget, ami maga is több mennyiségből tevődik össze. Ekkor elsősorban azt kell eldöntenünk, hogy a vizsgált mennyiségek függetlenek-e egymástól, az egyik mennyiség adott értéke befolyásolja-e a másik valószínűségi sűrűségfüggvényét [2]. Határozzuk meg két mennyiség összegének sűrűségfüggvényét, várható értékét és a szórását. Beláthatjuk, hogy ebben az esetben a várható értékek és a szórások négyzetei összegződnek, az eredő sűrűségfüggvény pedig a kiindulási sűrűségfüggvények konvolúciójával nyerhető [2]. Tehát ha  $Z = X + Y$ , akkor

$$M(Z) = M(X) + M(Y) \quad (2.10)$$

$$D^2(Z) = D^2(X) + D^2(Y) \quad (2.11)$$

$$p_z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x') p_y(x'-x) dx' \quad (2.12)$$

## **2.2. Véletlen folyamatok időbeli tulajdonságainak leírása**

Egy vizsgált folyamat tulajdonságai az időben változhatnak. Reális folyamatoknál ez valós probléma. Ekkor az időt mint új paramétert vezetjük be az eddig definiált mennyiségekben, tehát például a sűrűségfüggvény alakja  $p(x,t)$  lesz. Hallgatólagosan feltételeztük, hogy valami módon meg tudjuk határozni egy folyamat valószínűségi jellemzőit. Mivel az időfüggéstől nem tekinthetünk el, ezért sok azonos körülmények között levő egyforma rendszerre lenne szükség. Erre rendszerint nincs lehetőségünk, ezért újabb mennyiségeket kell bevezetnünk.

Legegyszerűbb esetként vizsgáljuk meg a várható érték problémáját. Tekintsünk egy véletlenszerűen ingadozó  $U(t)$  feszültséget. Az  $\langle U(t) \rangle$  középértéket  $T$  időre vett  $U(t)$  jel átlagértékeként adjuk meg:

$$\langle U(t) \rangle_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U(t) dt \quad (2.13)$$

$T \rightarrow \infty$  esetén határértékként kapjuk az  $\langle U(t) \rangle$  időátlagot. Milyen kapcsolatban van ez a mennyiség az  $M(U)$  várható értékkel? Ha az  $M(U)$  időfüggetlen, akkor általában nem fog a két érték megegyezni, ezért első megszorításként azt mondhatjuk, hogy a statisztikai jellemzőknek időfüggetleneknek kell lenniük. Az olyan folyamatokat, melyekre az időbeli és sokaságra vett átlagok azonosak stacionáriusnak nevezzük. A stacionaritás azonban önmagában még nem jelenti, hogy az időbeli és térbeli átlagok megegyeznek. Létezik a stacionárius folyamatoknak egy olyan osztálya, amelyre már teljesül a kétféle átlag ekvivalenciája, és ezeket a folyamatokat ergodikusnak nevezzük.



Definiálhatunk néhány további mennyiséget, ami a véletlen folyamatok időbeli tulajdonságait írja le. Az  $x(t)$  sztochasztikus jel autokorreláció-függvénye:

$$R_{xx}(t, t + \tau) = M[x(t) * x(t + \tau)] \quad (2.14)$$

Az autokorreláció-függvény leírja, hogy a jel  $\tau$  idő múlva mennyire "hasonlít" önmagára, milyen a jelforrás memóriája. Korrelált folyamatok autokorreláció-függvénye többféle lehet. Ezek közül érdekes a periodikus függvények esete, melyekre a korrelációfüggvény is periodikus. Ez akkor fontos, ha zajban rejlő periodikus jeleket akarunk detektálni [4].

Ergodikus jelekre az autokorreláció-függvény:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau)dt \quad (2.15)$$

Mivel ekkor a folyamat stacionárius, ezért az autokorreláció-függvény nem függhet az időtől, ahogy ez a formulából is látszik.

Teljesen hasonló módon, a keresztkorreláció-függvény, két jel közötti kapcsolatot jellemez:

$$R_{xy}(t, t + \tau) = M[x(t) * y(t + \tau)] \quad (2.16)$$

ugyanaz ergodikus jelekre:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t + \tau)dt \quad (2.17)$$

A keresztkorreláció segítségével megadható például, hogy két véletlen folyamat függ-e egymástól, és az egyik folyamat másokra való hatása milyen időeltolódással jelentkezik. Hasznos lehet, ha a sztochasztikus folyamatokat a

frekvencia-tartományban is jellemezni tudjuk. Minden olyan folyamat esetén is hasznos a Fourier-térbeli leírás, amelyek periodikus komponenseket is tartalmaznak. Az említett célokra az úgynevezett teljesítménysűrűség-spektrumot használjuk, amely definíció szerint az autokorreláció-függvény Fourier-transzformáltja:

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (2.18)$$

illetve inverz transzformációval:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f\tau} df \quad (2.19)$$

$S_{xx}(f)df$  azzal a teljesítménnyel azonos, ami az  $f, f + df$  frekvenciatartományba esik, innen származik a mennyiség neve. A teljesítménysűrűség-spektrumot megkaphatjuk a jel amplitúdóspektrumából is, melynek definíciója a következő:

$$F_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.20)$$

A Wiener-Hincsin tétel alapján:

$$S_x(f) = F_x(f) * F_x^*(f) \quad (2.21)$$

ahol a \* a komplex konjugálás. Tehát az autokorreláció-függvény ismerete nélkül is kiszámítható a teljesítménysűrűség-spektrum.

Az előzőek analógiájára bevezethetjük két jel esetére a keresztteljesítménysűrűség-spektrumot:

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau = F_x(f) * F_y^*(f) \quad (2.22)$$

A keresztjelésítménysűrűség-spektrum fázisinformációt is hordoz, és a jel négyzetének várható értéke megadható a teljesítménysűrűség-spektrummal:

$$M[x^2(t)] = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df \quad (2.23)$$

### **2.3. A mintavételi tétel, diszkrét Fourier-transzformáció**

A jel időfüggésének mérése szükséges ahhoz, hogy statisztikai jellemzőit, spektrumokat, korrelációfüggvényeket, sűrűségfüggvényeket meghatározhassuk. Vannak analóg módszerek a mérésre de ma már a nagyobb pontosság és hatékonyság miatt a digitális módszerek sokkal elterjedtebbek. Időfüggés digitális mérésénél, a jel amplitúdóját kvantáljuk ugyancsak diszkrét időértékeknél. Az analóg-digitál konverter az analóg jelet egész számokká alakítja. Ilyenkor a jel torzul, de a pontosság mégis a legtöbb esetben kielégítő. Az időbeli kvantáltság azt jelenti, hogy az  $x(t)$  jelnek csak bizonyos  $t$  időpillanatbeli értékeit ismerjük. A továbbiakban periodikus mintavételezést tételezünk fel. Az  $x(t)$  folytonos függvényt a következő mintavételezett függvénnyel helyettesítjük [3]:

$$x_m(t) = \Delta t \sum_i x(t_i) \delta(t - t_i) \quad (2.24)$$

ahol  $\delta$  a Dirac-féle függvényt jelöli,  $\Delta t$  a két szomszédos mintavételi idő különbsége,  $x_m(t)$  a mintavételezéssel kapott függvény. A  $\Delta t$  szorzó egyrészt dimenzionális okok miatt van függvény definíciójában, másrészt így a mintavételezett jel energiája összemérhető az eredeti jel energiájával. Felmerül a kérdés, hogy mennyi legyen a

mintavételi idő, ha minimális információvesztéssel szeretnénk megmérni a jelet? Erre a kérdésre a mintavételi tétel ad választ[5]. Ha az  $x(t)$  jel Fourier felbontásában csak  $f_0$ -nál kisebb frekvenciájú komponensek vannak, akkor a jelet elég  $2f_0$  frekvenciával mintavételezni ahhoz, hogy ne veszítsünk információt.

Ennek a tételnek ellentmondó mintavétel meghamisítja a jelet. Ez leginkább a spektrum mérésében tükröződik, helytelen mintavételezés miatt a különböző frekvenciákhoz tartozó komponensek meghamisítják a spektrumot.

A gyakorlatban előforduló jelek általában sávkorlátozottak, ami azt jelenti, hogy van alsó illetve felső határfrekvenciájuk. Ebben az esetben tehát teljesíthető a mintavételi tétel feltétele. De mi van abban az esetben, ha nem ismerjük a felső határfrekvenciát, vagy meghaladja a mérőműszer által biztosított tartományt? Ilyenkor aluláteresztő szűrőt kell a mérőrendszerbe iktatni, ami levágja a magas frekvenciákat. Ez természetesen a jel torzítását jelenti, de ez a torzítás nem befolyásolja például a spektrum mérését a kisebb frekvenciákon. Ha spektrális analízist végzünk, akkor mindig használnunk kell szűrőt.

Az  $x(t)$  jel mintavételezése során a gyakorlatban egy véges számú adatsort kapunk, ami  $N$  számú  $x$  elemből áll. A spektrum kiszámítására ekkor a mintavételezett függvény alakjának figyelembe vételével a következő formulát kapjuk:

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i2\pi \frac{kj}{N}} \quad (2.25)$$

Itt tehát  $x_i$  az  $x(i * \delta t)$  mennyiségnek felel meg, és  $F$  az úgynevezett diszkrét Fourier-transzformált,  $k = 0..N - 1$ .

A diszkrét Fourier-transzformált kiszámítására  $N^2$  komplex szorzásra van szükség. A komplex exponenciális függvény tulajdonságait kihasználva azonban a feladat megoldható  $N * \log_2 N$  művelettel is, ami rendkívül nagy különbséget jelent nagy  $N$ -ek esetén. Ezt az eljárást Cooley és Tukey fejlesztette ki, és gyors Fourier-transzformáció (*FFT*) néven ismert [6].

### **3 Zajok osztályozása spektrális intenzitás szerint**

A különböző eredetű zajok egy lehetséges csoportosítását a teljesítménysűrűség-spektrumuk alapján adhatjuk meg [11].

#### **Fehérzaj**

A konstans teljesítménysűrűség-spektrumú zajokat az optikából vett analógia alapján fehérzajnak nevezzük:

$$S(f)=\text{konst.} \quad (3.1)$$

Mivel a jel energiáját a teljesítménysűrűség-spektrum alatti terület számértékileg megadja, látható, hogy ezek alapján a fehérzaj energiája végtelennek adódna. Azonban a valóságban a jelek sávkorlátoltak. Az ilyen spektrumú jelsorozat egymást követő elemei között semmiféle összefüggés nincs; a Wiener-Hincsis-tétel alapján az autókorrelációs függvénye a Dirac-féle  $\delta$  függvény. Fehérzajt mutat például egy R értékű ohmos ellenállás. Ezt a zajt termikus zajnak is nevezik, T hőmérsékleten  $S(f)=4kTR$  a spektrum értéke, ahol k a Boltzmann-állandó [7]. Digitális előállításra igen egyszerű, mert véletlenszámok sorozata is fehérzaj.

#### **1/f<sup>2</sup>-zaj**

Ha egy jel teljesítménysűrűség-spektruma

$$S(f)=C \frac{1}{f^2}, \quad C=\text{konst.} \quad (3.2)$$

alakú, akkor  $1/f^2$ -zajról beszélünk. Ez is gyakori jelenség, ugyanis fizikai rendszerekben gyakran előfordul, hogy egyik mennyiség a másik integráljaként, vagy deriváltjaként adódik. A Fourier-transzformáció

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n F(f) \quad (3.3)$$

tulajdonsága miatt a fehér zaj időbeli integráljaként adódó zaj  $1/f^2$ , az  $1/f^2$  zaj deriváltjaként adódó zaj pedig fehér spektrumú.  $1/f^2$  zajt mutat például egy Brown-mozgást végző részecske [8]. Az  $1/f^2$  egy diszkrét reprezentációja az ún. random walk:

$$Y_{i+1} = Y_i + X_i \quad (3.4)$$

Ahol  $Y$  a kimenő,  $X$  a bemenő érték. Tehát véletlenszámot adunk a sorozat előző tagjához, és az így kapott érték lesz a sorozat aktuális értéke.

### Az $1/f$ zaj

A természetben a legkülönfélébb területeken előforduló zajtípus az  $1/f$  zaj. Megtalálható a félvezető eszközökben, biológiai rendszerekben, de megfigyelték folyók vízállásingadozásában, vagy a klasszikus zenében is. Általában ide az  $1/f^\alpha$ , ahol  $\alpha \approx 1$  spektrumú zajok tartoznak. A szigorúan  $\alpha = 1$  kitevőjű jel végtelen energiájú, ezért reális esetben szükségképpen sávkorlátozottnak kell lennie. Az alsó határfrekvencia meghatározhatósága a mérések véges időtartama miatt korlátozott. Félvezető eszközökre  $10^{-6}$  Hz frekvenciáig kimutatható az  $1/f$  függés. Egyes esetekben az alsó határfrekvencia  $10^{-10}$  Hz, ami 300 éves ciklusoknak felel meg [9], de

a Nílus vízállásingadozásában több mint 2000 éves periódusú komponensek is kimutathatók.

### Színes zajok

Ide az  $\frac{1}{1+(f/f_0)^2}$  (Lorentzi), és azok az  $1/f^\alpha$  típusú zajok tartoznak,

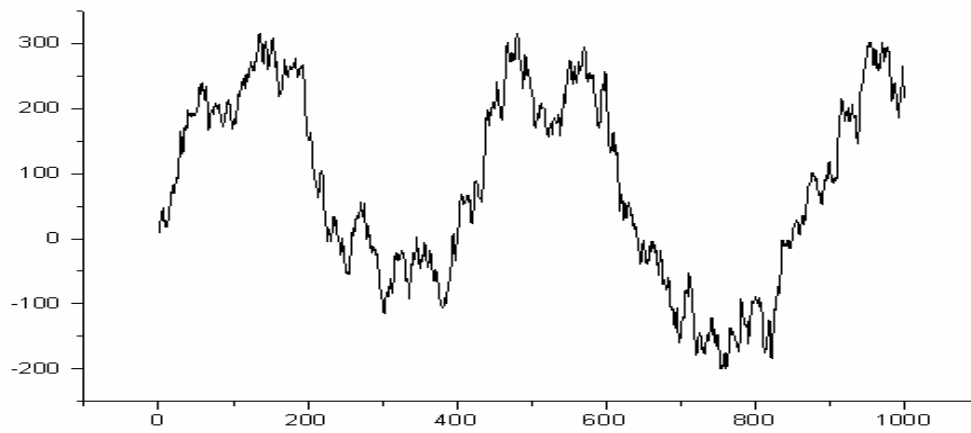
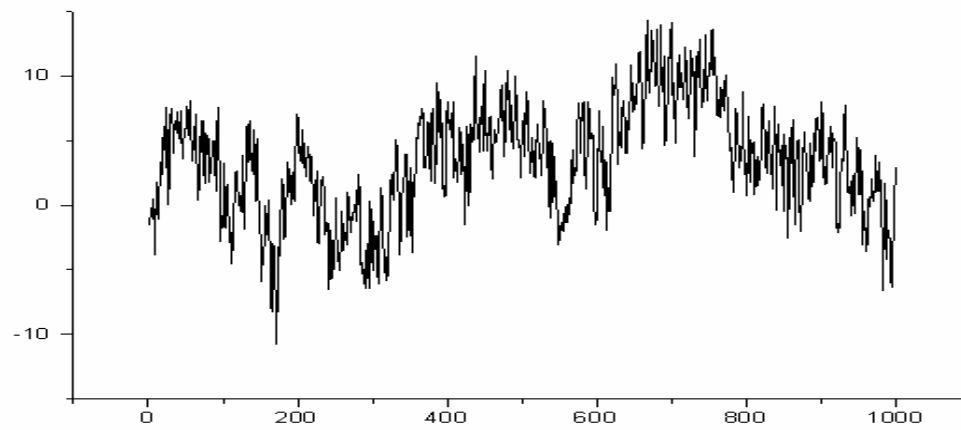
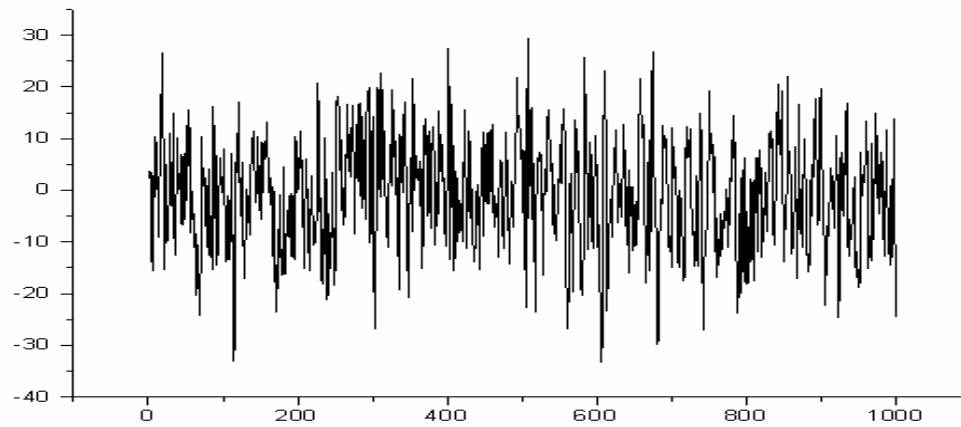
amelyeknek  $\alpha$  kitevője tipikusan nulla és kettő közé esik, tehát az  $1/f$  zaj is ilyen. Vannak kettőnél nagyobb kitevőértékek is, de azok divergálnak, ezért egy másik kategóriába tartoznak. Például a kozmikus sugárzás spektruma az  $\alpha \approx 2,7$ , a Föld forgási-frekvenciaingadozása az  $\alpha \approx 2$  értékkel írható le.

Az exponenciális lecsengésű autokorreláció-függvénnyel rendelkező zajok teljesítménysűrűség-spektruma a Wiener-Hincsis-tételből adódóan Lorentzi:

$$R(\tau) = C * e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \leftrightarrow S(f) = C \frac{\tau_0}{1 + (2\pi f \tau_0)^2} \quad (3.5)$$

Belátható, hogy a Poisson-folyamatokra ezek a kifejezések fennállnak [5]. Ha egymástól független Poisson-folyamatokat összegzünk, a  $\tau_0$  értékekre pedig  $q(\tau) = \frac{1}{\tau}$  eloszlást feltételezünk, sávkorlátolt  $1/f$  zajt kapunk [10].





3.1. ábra. Fehér,  $1/f$ , illetve  $1/f^2$  zaj mintáinak egy-egy részlete.

## **4. Zaj előállítási módszerek**

Hatékony lehet a zaj megértése szempontjából, ha tanulmányozzuk a különböző 1/f-zaj, színes-zaj, fehér-zaj generálási módszereket. Ezek lehetnek valódi fizikai rendszerek jelei, vagy numerikus szimulációk által szolgáltatott jelek. Ezekben megkereshetjük a közös pontokat, és a korlátaikat is. A zajok matematikai előállítása sokféle lehet, és eszerint a statisztikus tulajdonságok is különbözhetnek. Figyelni kell a zaj paramétereire, hosszú mérés esetén a megbízható működésre, hogy hosszú távon ne következzen be semmilyen változás. Fontos szempont lehet a mérendő adat teljes reprodukálhatósága, erre a célra egyértelműen a digitális jelgenerálás, illetve a digitálisan tárolt adatok az előnyösek.

### **Meade módszere**

Ezzel a módszerrel 1/f zajt állíthatunk elő. Tekintsünk egy olyan Gauss-eloszlású valószínűségi változót, amely időfüggésére jellemző, hogy állapotát mindig egyenlő  $T$  idők eltelte után változtatja. Ez tehát azt jelenti, hogy négyzetjelet kapunk, ami az  $n * T < t < (n + 1) * T$  időintervallumokban konstans - ahol  $n$  egész szám -, de az amplitúdója az egymás utáni ilyen intarvallumokban más és más a Gauss-eloszlásnak megfelelően. Ha több ilyen folyamatot összegzünk, amelyekre a  $T_i$  kapcsolási idők rendre egy  $T_0$  időből származnak az alábbi összefüggés szerint [12]:

$$T_i = \frac{T_0}{2^i} \quad (4.1)$$

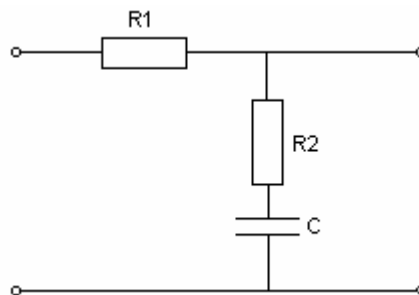
akkor az eredő folyamat spektruma  $1/f$  lefutású lesz, és a sűrűségfüggvény is Gauss-függvény lesz a centrális határeloszlás tételnek megfelelően. Az ilyen folyamat sávkorlátozott, mivel az  $S(f) \propto 1/f$  összefüggés csak az  $1/T_0, 1/T_n$  intervallumban lesz igaz, ahol  $T_n$  a legrövidebb kapcsolási idejű folyamatra jellemző.

### Keshner módszere

Egy másik lehetséges  $1/f$  vagy színes zaj generálási elvet az elektronika területéről veszünk. Ezt az elvet jól használhatjuk a gyakorlatban  $1/f$  zaj generátor építésére is. Tegyük fel, hogy egy lineáris, kondenzátorokból és ellenállásokból álló hálózati elem átviteli függvénye a következő alakú:

$$A(\omega) = \frac{1 + i\omega CR_2}{1 + i\omega C(R_1 + R_2)} \quad (4.2)$$

Egy ilyen tulajdonságú elemet mutat be az alábbi ábra.



**4.1. ábra. Elemi szűrőtag  $1/f^\alpha$  zajok előállításához.**

Sok különböző átviteli függvényt állíthatunk elő, ha több ilyen tagot egymás után sorba kapcsolunk [9]. Ha minden tag után elhelyezünk egy egyszeres erősítésű elválasztó erősítőt, akkor elkerülhetjük az impedanciák egymásra hatását, és ekkor az

eredő átviteli függvény egyszerűen az egyes tagok átviteli függvényeinek szorzata lesz:

$$A(\omega) = \prod_k \frac{1 + i\omega CR_{2k}}{1 + i\omega C(R_{1k} + R_{2k})} \quad (4.3)$$

ahol  $R_{1k}$  és  $R_{2k}$  a  $k$ -adik tagra jellemző ellenállásértékek. Nem szorítjuk meg az általánosságot, ha a  $C$  kapacitást minden tagra azonosnak választjuk. Ha egy ilyen rendszer bemenetére fehér-zajt vezetünk, akkor a kimeneten megjelenő zaj spektruma  $|A(\omega)|^2$ -tel lesz arányos. Ezzel a módszerrel többféle spektrum előállítható. A közelítés pontosságát és a frekvenciatartomány szélességét a tagok száma határozza meg.

### Digitális fehér, $\frac{1}{f^2}$ , és Lorentzi zaj generátor

Mivel fehér-zaj esetén a jelsorozat egymást követő elemei teljesen függetlenek egymástól, tehát a zaj korrelálatlan, ezért digitális előállítása nagyon egyszerű, mert véletlenszámok sorozata ilyen zajt ad. Az irodalom többféle módszer ismer egyenletes eloszlású véletlenszámok generálására. Az egyik az úgynevezett additív véletlenszám-generátor, aminek definíciója a következő:

$$r_i = (r_{i-24} + r_{i-55}) \bmod M \quad (4.4)$$

ahol  $r_i$  jelenti a generált számokat,  $M = 2^{32}$ , ami a számítógép szóhosszának felel meg. Probléma ebben az esetben az, hogy az első 55 számot hogyan válasszuk meg. Ebben segíthet, egy másik, hasonlóan egyszerű módszer; definíciója:

$$r_{i+1} = (r_i * a + c) \bmod M \quad (4.5)$$

Ahol  $a = 1664525$ ,  $c = 32767$ ,  $M$  értéke itt is  $2^{32}$ . A képletekben használt paraméterek ún. „mágikus számok”, tapasztalati úton alakultak ki. Mindkét eljárás ciklushossza  $2^{32}$ . Munkám során én a második módszert alkalmaztam véletlenszámok előállítására.

A fenti módszerrel kapott véletlenszámokból Gauss-eloszlású véletlen számokat a centrális határeloszlási tételt felhasználva úgy kaphatunk, hogy ha sok független, egyenletes eloszlású számot összegzünk.

Brown, azaz  $\frac{1}{f^2}$  zajt legegyszerűbben fehér zaj integrálásával generálhatunk,

vagyis a következő összefüggés alapján:

$$x_{i+1} = x_i + c \quad (4.6)$$

ahol  $c$  egy véletlenszám. Lorentzi típusú zajokat hasonlóan lehet generálni, mint a Brown zajt [13]:

$$x_{i+1} = q * x_i + c \quad (4.7)$$

ahol  $c$  ugyancsak véletlenszám,  $q$  pedig egy paraméter, amitől a jel töréspontja függ.

### Független Lorentzi zajok összegzése

Mivel az irodalomban az  $1/f$  zajt általában, mint Lorentzi típusú zajok szuperpozíciójaként értelmezik, ezért kézenfekvőnek tűnik a megoldás, hogy erre alapozva alkossunk  $1/f$ , illetve színes zajt generáló algoritmust. Előnye ennek az eljárásnak, hogy a zaj generálása során elegendő csak egyenletes eloszlású véletlen

számokat generálni, hisz sok független Poisson folyamat összegzéseként a centrális határeloszlási tétel értelmében eleve Gauss-eloszlású jelsorozatot kapunk. Az általam elkészített zajgenerátor is ezen az elven működik, ezért a későbbiekben még lesz szó a módszerről.

### Fehérszaj teljesítménysűrűség-spektrumának átskálázása

Egy másik lehetőség, a Wiener-Hincsin összefüggésekből adódik. Mint ismeretes egy zaj teljesítménysűrűség-spektruma kiszámítható az autokorrelációfüggvényének ismerete nélkül is a következő módon:

$$S_x(f) = F_x(f) \cdot F_x^*(f) \quad (4.8)$$

ahol az  $F_x^*$  a jel  $F_x$  amplitúdó-spektrumának komplex konjugáltját jelöli. Mivel tudjuk, hogy a fehér zaj teljesítménysűrűség-spektruma konstans, ezért ha ennek a zajnak az amplitúdó-spektrumát megszorozzuk  $\frac{1}{\sqrt{f}}$ -fel, akkor  $1/f$  zajt kapunk:

$$S_x(f) = F_x(f) \cdot F_x^*(f) = konst. \quad (4.9)$$

A fentiek alapján tehát egy lehetséges diszkrét  $1/f$  zajgenerátor algoritmus a következő [15]:

- Állítsunk elő egy  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$  Gauss eloszlású véletlenszám sorozatot, ahol  $N$  egész szám,  $s$  a  $2$  egész számú hatványa (az FFT miatt). Az így kapott véletlenszám sorozat egy Gauss eloszlású fehér zaj diszkrét reprezentációjának tekinthető.

- Számítsuk ki az így kapott fehér zaj diszkrét Fourier-transzformáltját (FFT).

Igy az  $F_0, F_1, \dots, F_{N-1}$  komplex számsorozathoz jutunk.

- Az  $F_i$  komplex számokat szorozzuk meg  $f^{1/2}$ -nel (vagy színes zajok esetén értelemszerűen), illetve a jelen esetben  $\frac{1}{\sqrt{i}}$ -vel, azaz végezzük el a következő műveleteket:

$$F_i = \frac{F_i}{\sqrt{i}}, F_{N-i} = \frac{F_{N-i}}{\sqrt{i}}, \text{ ahol } i = 1..N/2 \quad (4.10)$$

Az így kapott  $F_0, F_1, \dots, F_{N-1}$  komplex számsorozaton végezzük el az inverz FFT-t, ezáltal megkapjuk a kívánt Gauss-eloszlású  $1/f$  teljesítménysűrűség-spektrumú zaj diszkrét reprezentációját.

Ezzel a módszerrel bármilyen spektrum előállítható a szorzótényező, vagy szorzófüggvény megfelelő megválasztásával. Ennek az előállítási módnak az egyszerűsége mellett van annyi hátránya, hogy nem tudunk tetszőlegesen hosszú zajfolyamot előállítani, ugyanis ha a keletkező mintát tartalmazó zajokat összefűznénk, akkor az összefűzés határán ugrás, zavar keletkezne, s az eredmények torzulnának.

## **5. Digitális zajgeneráló algoritmus elméleti háttere**

### **5.1. Spektrum torzulása mintavételnél**

Egy analóg bemeneti  $U(t)$  feszültség diszkrét jelek sorozatává alakítható, ha  $t_\mu = \mu T_m$  egyenlő időközönként mintát veszünk a bemeneti jelből. A mintavétel frekvenciája  $f_m = \frac{1}{T_m}$ . A mintavétel során kapott lépcsős függvény (5.1. ábra) annál pontosabban közelíti az analóg bemeneti jelet, minél kisebb a  $T_m$  mintavételi periódusidő [17]. A mintavételi tétel betartásával kiválaszthatjuk a megfelelő  $T_m$ -et. A lépcsős függvény nem alkalmas matematikai leírásra, ezért az 5.2. ábrán látható Dirac-impulzussorozattal helyettesítjük:

$$\tilde{U}(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} U(t_\mu) T_m \delta(t - t_\mu) \quad (5.1)$$

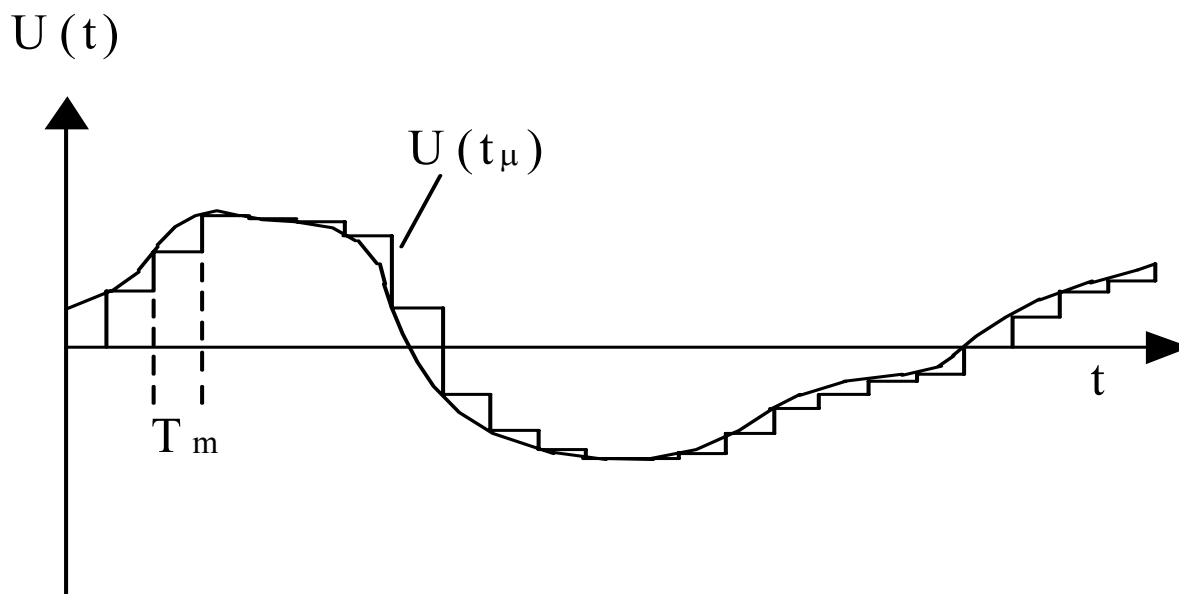
Az  $U(t_\mu) T_m$  impulzus nagyságát szimbolikusan a hozzá tartozó vonal hosszával jellemezzük. A vonal hossza nem osztévesztendő a minta értékével, mert a Dirac-impulzus végtelen nagy, és időtartama végtelenül kicsi, de az alatta lévő terület véges értékű. A Dirac-impulzust helyettesítsük közelítőleg  $r_\varepsilon$  négyszögimpulzussal. A határátmenet:

$$U(t) T_m \delta(t - t_\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(t_\mu) r_\varepsilon(t - t_\mu) \quad (5.2)$$

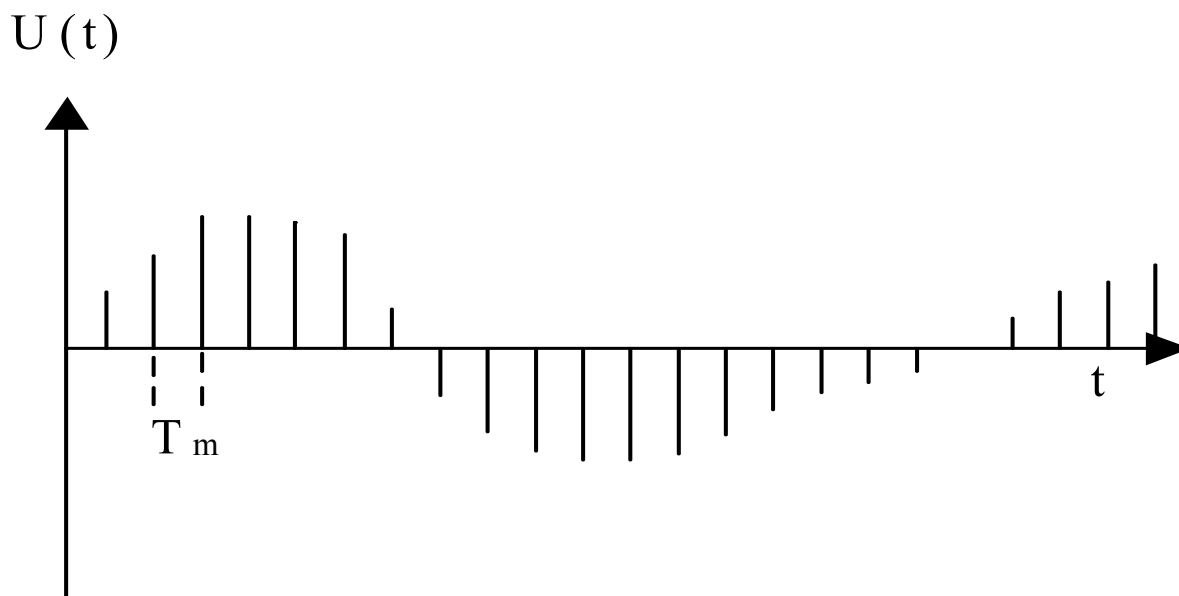
Vizsgáljuk meg hogy a mintavételezés mennyiben változtatja meg a bemeneti jel spektrumát. Ehhez Fourier-transzformálni kell a jelet:

$$\tilde{F}(jf) = T_m \sum_{\mu=0}^{\infty} U(\mu T_m) e^{-2\pi j \mu f T_m} \quad (5.3)$$





5.1. ábra. Az  $U(t)$  bemenő jel és az  $U(t_\mu)$  mintái.



5.2. ábra. Bemenő jel ábrázolása impulzussorozattal.

Így a spektrum  $f_m$  mintavételi frekvencia szerint periodikus. Ezen periodikus függvény Fourier-sorfejtése után látható az  $\tilde{F}(jf)$  spektrum a  $-f_{\max} \leq f \leq f_{\max}$  tartományban megegyezik az eredeti függvény  $|\tilde{F}(jf)|$  spektrumával. Minvégig

figyelembe kell vennünk, hogy ne sértsük meg a mintavételi tételt, tehát fenn kell állnia a következő összefüggésnek:

$$f_m \geq 2f_{\max}. \quad (5.4)$$

Gyakorlati alkalmazásoknál figyelembe kell venni, hogy tökéletes Dirac-impulzusokat nem lehet előállítani, tehát az impulzust véges amplitúdójú és időtartamú jellel kell helyettesíteni, tehát a (5.2) egyenlet határátmenetét fel kell adnunk. Helyettesítsük be a (5.2) egyenletet a (5.1) egyenletbe véges  $\varepsilon$ -ra az

$$\tilde{U}(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} U(t_{\mu}) r_{\varepsilon}(t - t_{\mu}) \quad (5.5)$$

közelítő impulzussorozatot kapjuk. Fourier-transzformációval az eredő spektrum:

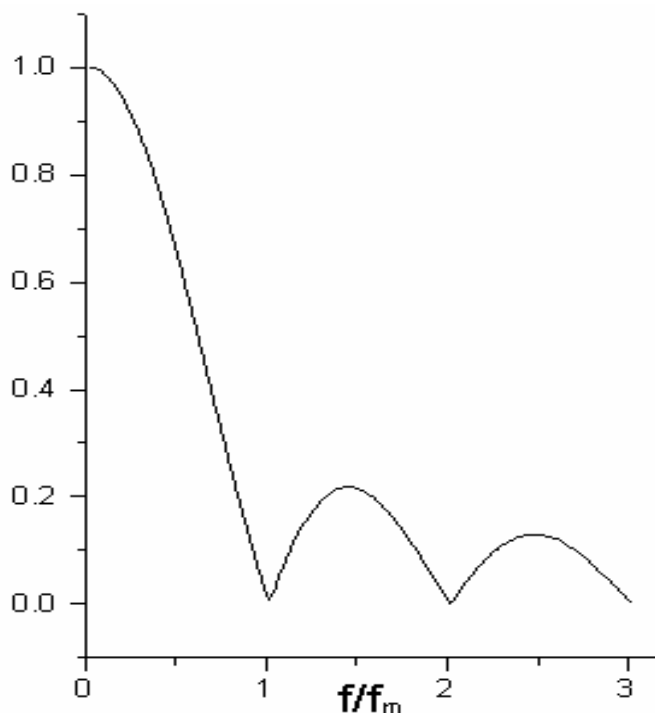
$$\tilde{F}'(jf) = \frac{\sin(\pi\varepsilon T_m f)}{\pi\varepsilon T_m f} \tilde{F}(jf) \quad (5.6)$$

Ez a Dirac-impulzusokra kapott spektrumtól annyiban különbözik, hogy egy módosító függvénnyel van szorozva, amely növekvő frekvenciákon egyre nagyobb járulékos csillapítást okoz (5.3. ábra). Lépcsős függvény esetén az  $\varepsilon T_m$  impulzusszélesség egyenlő a  $T_m$  mintavételezési periódusidővel, tehát a spektrum:

$$\tilde{F}'(jf) = \frac{\sin(\pi f / f_m)}{\pi f / f_m} \tilde{F}(jf) \quad (5.7)$$

Ez a torzulás a digitális zajgenerátor fejlesztésekor is megjelenik, mégpedig akkor, amikor a digitális jelet analóggá alakítjuk, mert az D/A konverter nem Dirac-impulzusokat állít elő. Ennek értelmében a megfelelő amplitútóértékeket korrigálni kell. A mintavételi frekvencia felénél a súlyozó függvény értéke 0,64, 0,2  $f_m$ -nél pedig

0,94, tehát ha az  $f_{\max}$ -hoz képest a mintavételi frekvenciát elég nagyra választjuk, akkor a torzulás elhanyagolható.



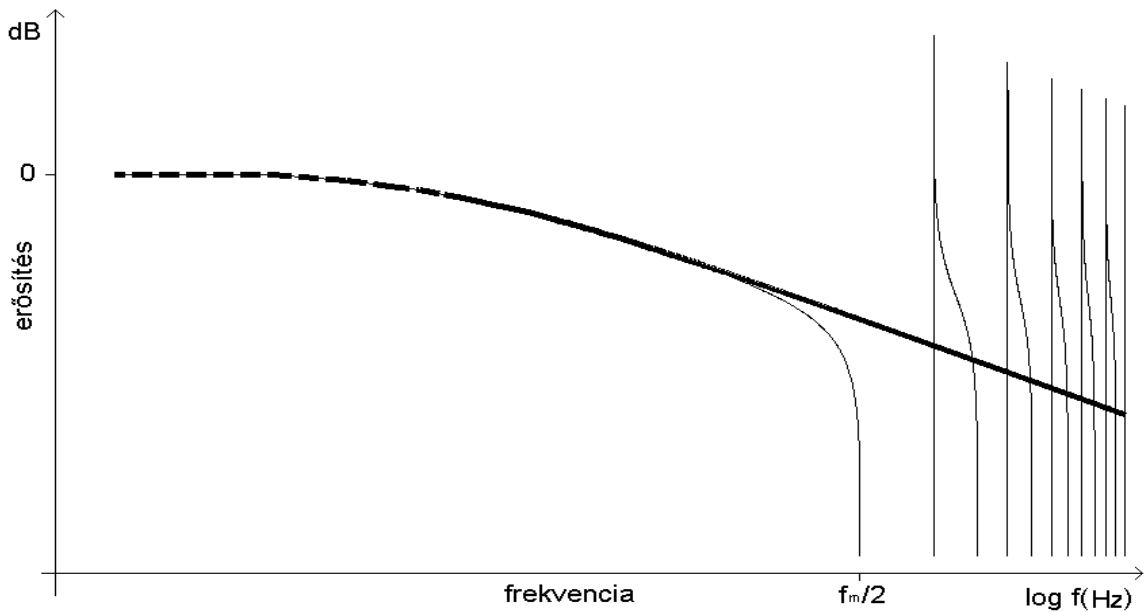
5.3. ábra. A  $\frac{\sin(\pi f / f_m)}{\pi f / f_m}$  súlyozó függvény.

## **5.2. Bilineáris transzformáció**

Minden digitális szűrő a  $0 \leq f \leq \infty$  frekvenciatartományban  $2\pi f_m$  körfrekvenciával periodikus átviteli függvényű. A kihasználható frekvenciatartomány azonban a mintavételi-tétel miatt a  $0 \leq f \leq f_m/2$  tartományra korlátozódik, ezért a digitális szűrők tervezésénél úgy járunk el, hogy a megfelelő analóg szűrő esetében a frekvenciatengelyt transzformáljuk. A  $0 \leq f \leq \infty$  tartományt a  $0 \leq f \leq f_m/2$  tartományra képezzük le és a karakterisztika nagyobb frekvenciákon periodikusan ismétlődik. Ehhez végezzük el a következő helyettesítést:

$$f = \frac{f_m}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi f'}{f_m} \quad (5.8)$$

Láthatjuk, hogy ha  $f \rightarrow \infty$ , akkor  $f' \rightarrow f_m / 2$ . Ha pedig  $f' \ll f_m$ , akkor  $f \approx f'$  (5.4. ábra). A frekvenciatengely torzulása okozta hiba annál kisebb, minél nagyobb az  $f_m$  mintavételi frekvencia az átvitel szempontjából érdekes frekvenciatartományhoz képest [17].



**5.4. ábra. Aluláteresztő szűrő karakterisztikája  
a frekvenciatengely transzformációja előtt és után.**

Vezessük be  $\Omega = \frac{f}{f_0}$  normált frekvenciát, illetve az  $\Omega_m = \frac{f_m}{f_0}$  normált

mintavételi frekvenciát. Most  $f_0$  a szűrő határfrekvenciája. Ezekkel az (5.8) egyenlet:

$$\Omega = \frac{\Omega_m}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi \Omega'}{\Omega_m} \quad (5.9)$$

A határfrekvencia a leképezés hatására eltolódhat, ezért toljuk el annyira a frekvenciakaraktisztikát a transzformáció előtt, hogy a határfrekvencia a transzformáció után ugyanaz maradjon. Így az (5.9) egyenletből:

$$\Omega = l * \operatorname{tg} \frac{\pi \Omega'}{\Omega_m} \quad (5.10)$$

$$\text{ahol } l = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\Omega_m} \quad (5.11)$$

Látható, ha  $\Omega' = 1$ , akkor  $\Omega = 1$ . Az  $\tilde{A}(z)$  digitális átviteli függvény számításához a  $P$  komplex változójú egyenlet transzformáltja szükséges. Az (5.10) egyenletből  $P = j\Omega$ -val:

$$P = l * \operatorname{tg} \frac{\pi P'}{\Omega_m} = l * \frac{e^{2\pi P'/\Omega_m} - 1}{e^{2\pi P'/\Omega_m} + 1}, \quad (5.12)$$

$\Omega_m = \frac{f_m}{f_0} = \frac{1}{T_m f_0}$ ,  $2\pi P' f_0 = p'$  és  $e^{p'T_m} = z$  helyettesítéssel a következő eredmény

adódik, amit bilineáris transzformációnak nevezünk:

$$P = l * \frac{z-1}{z+1}, \text{ ahol } l = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\Omega_m}. \quad (5.13)$$

Tehát az  $A(P)$  átviteli függvényvel jellemzett analóg szűrő karakterisztikáját úgy transzformálhatjuk digitális szűrővé, hogy a normált  $P$  komplex frekvenciaváltozót a fenti összefüggés szerint helyettesítjük, és így olyan  $A(z)$  átviteli függvényt kapunk, amely digitális szűrővel realizálható. Ahogy az 5.4. ábrán is látható, az analóg és digitális szűrő frekvenciamenete hasonló, a különbség annyi, hogy a digitális szűrőnél a karakterisztika  $\Omega$ -irányban annyira összenyomott lesz,

hogy az analóg szűrő  $P = \infty$ -ben vett értékét már  $\Omega_m / 2$  frekvencián elérjük. Az ebből adódó torzulás kiküszöbölhető, ha  $\Omega_m$ -et elegendően nagyoknak választjuk.

### **5.3. Elsőfokú digitális szűrők paraméterezése**

Szükségünk lesz a digitális szűrő átviteli függvényének meghatározásához a késleltető tag átviteli függvényére. Mivel minden jel felbontható szinuszos jelek összegére, elég, ha megvizsgáljuk, hogy a késleltető mit ad vissza az  $x(t_\mu) = x_0 \sin \omega t_\mu$  bemeneti szekvenciára. Mivel a rendszer lineáris, ezért a kimeneten is szinuszjel fog megjelenni. Tehát a bemenet:

$$x(t_\mu) = x_0 e^{j\omega t_\mu}. \quad (5.14)$$

A kimeneti szekvencia [17]:

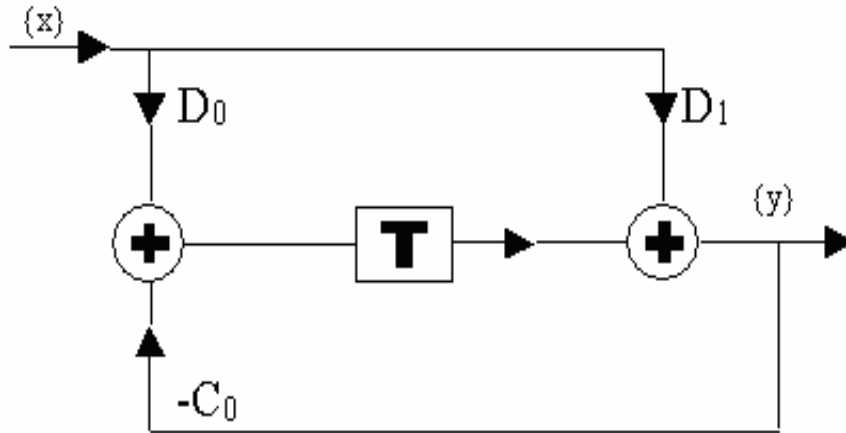
$$y(t_\mu) = x_0 e^{j\omega(t_\mu - T)}. \quad (5.15)$$

Ezek alapján a késleltető átviteli függvénye,  $p = j\omega$ -val, és  $z = e^{pT}$ -vel:

$$A(p) = \frac{1}{e^{pT}} \Rightarrow \tilde{A}(z) = z^{-1}. \quad (5.16)$$

A 5.5. ábrán az elsőfokú digitális szűrő vázlatát láthatjuk. Ebben az esetben csak egy késleltető tag szükséges. A késleltetőkre vonatkozó (5.16) egyenlet alapján a transzformációs összefüggés felírható:

$$Y(z) = D_1 X(z) + \frac{D_0 X(z) - C_0 Y(z)}{z}. \quad (5.17)$$



5.5. ábra. Elsőfokú digitális szűrő.

Ebből pedig egyszerű átalakításokkal adódik az átviteli függvény:

$$\tilde{A}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{D_0 + D_1 z}{C_0 + z} \quad (5.18)$$

Meg kell határoznunk a  $D_0$ ,  $D_1$ ,  $C_0$  értékeket a digitális szűrő elkészítéséhez.

Az elsőfokú digitális szűrő átviteli függvényének általános alakja a következő:

$$\tilde{A}(z) = \frac{D_0 + D_1 z}{C_0 + C_1 z}. \quad (5.19)$$

Amit az analóg,

$$A(P) = \frac{d_0 + d_1 P}{c_0 + c_1 P} \quad (5.20)$$

átviteli függvényből bilineáris transzformációval kapunk [17]. Ha összehasonlítjuk az

(5.19) egyenletet az (5.20)-al, láthatjuk, hogy  $C_1$  értéke 1, ahogy annak lennie kell,

mivel csak egy késleltető tagunk van. Ha elvégezzük a  $P = l * \frac{z-1}{z+1}$  helyettesítést az

(5.20) egyenletben, egyszerű átalakítások után kapjuk a következő összefüggéseket.

$$C_0 = \frac{c_0 - c_1 l}{c_0 + c_1 l}, \quad D_0 = \frac{d_0 - d_1 l}{c_0 + c_1 l}, \quad D_1 = \frac{d_0 + d_1 l}{c_0 + c_1 l} \quad (5.21)$$

Mivel aluláteresztő szűrőt, illetve szűrőket szeretnénk készíteni, ezért szűkítsük le az (5.20) egyenletet az elsőfokú aluláteresztő szűrő általános átviteli egyenletére:

$$A(P) = \frac{A_0}{1+P}. \quad (5.22)$$

Ezt összehasonlítva a (5.20) egyenlettel kapjuk, hogy

$$c_0 = c_1 = 1, \quad d_0 = A_0, \quad d_1 = 0. \quad (5.23)$$

Ezeket az értékeket helyettesítsük be az (5.21) egyenletekbe:

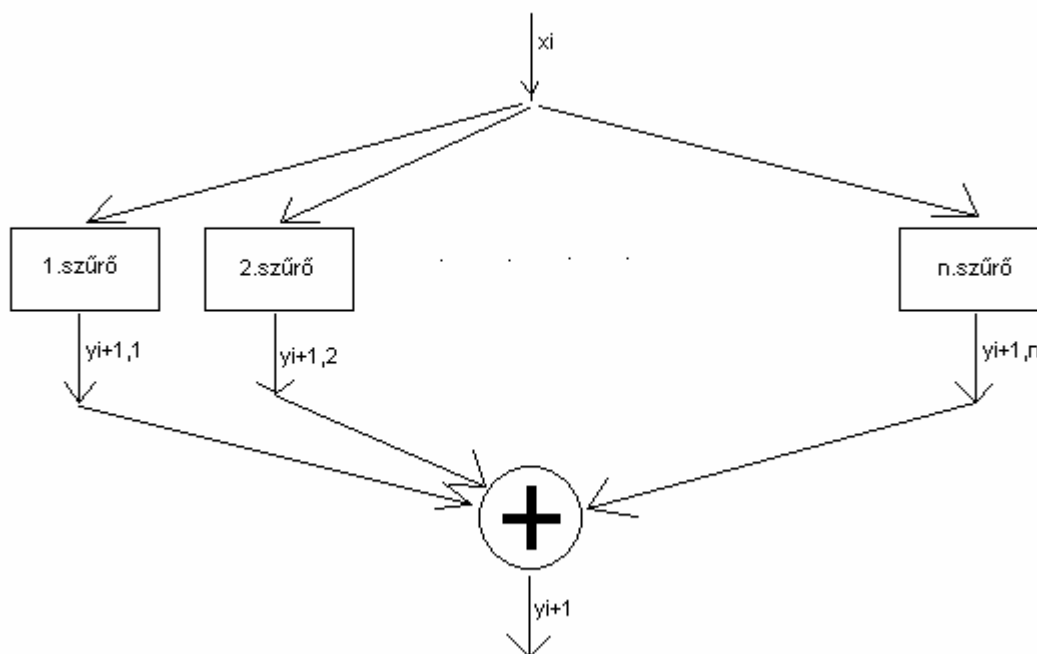
$$C_0 = \frac{1-l}{1+l}, \quad D_0 = D_1 = \frac{A_0}{1+l} \quad (5.24)$$

$$\text{ahol } l = \text{ctg} \frac{\pi}{\Omega_m}, \quad \Omega_m = \frac{f_m}{f_0} \quad (5.25)$$



## **6. Digitális színes-zajgenerátor megvalósítása**

Mint ahogy a bevezetőben említettem, célunk egy olyan digitális zajgenerátor megvalósítása, amely a kívánt spektrumú véletlen jelet Lorentzi-zajok összegeként állítja elő. Ehhez véletlenszámokat kell generálni, amit bevezetve adott számú digitális szűrőbe, a kimeneti értékeket összeadjuk.

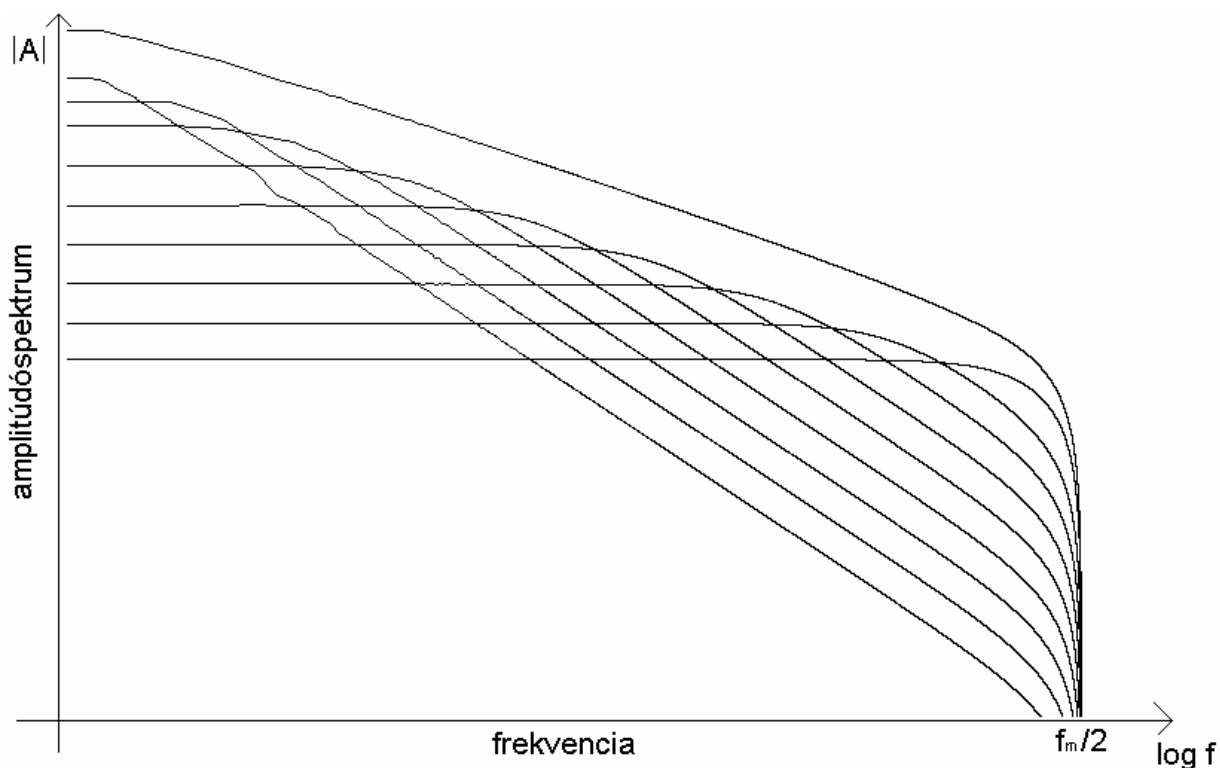


**6.1. ábra. A megvalósítandó digitális zajgenerátor algoritmus.**

Az 5.5. és 6.1. ábra alapján a megvalósítandó algoritmus a következő:

$$\begin{aligned} y_{i+1} = & D_1 * (x_i + x_{i-1}) - C_1 * y_{i1} + \\ & D_2 * (x_i + x_{i-1}) - C_2 * y_{i2} + \\ & \vdots \\ & D_n * (x_i + x_{i-1}) - C_2 * y_{in} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Itt a  $D$  és  $C$  betűk indexeit nem az 5.5. ábra értelmében használom. Mivel minden szűrőnél csak egy  $D$  és  $C$  érték van, ezért a (6.1) kifejezésben az indexek a szűrő sorszámát jelölik.

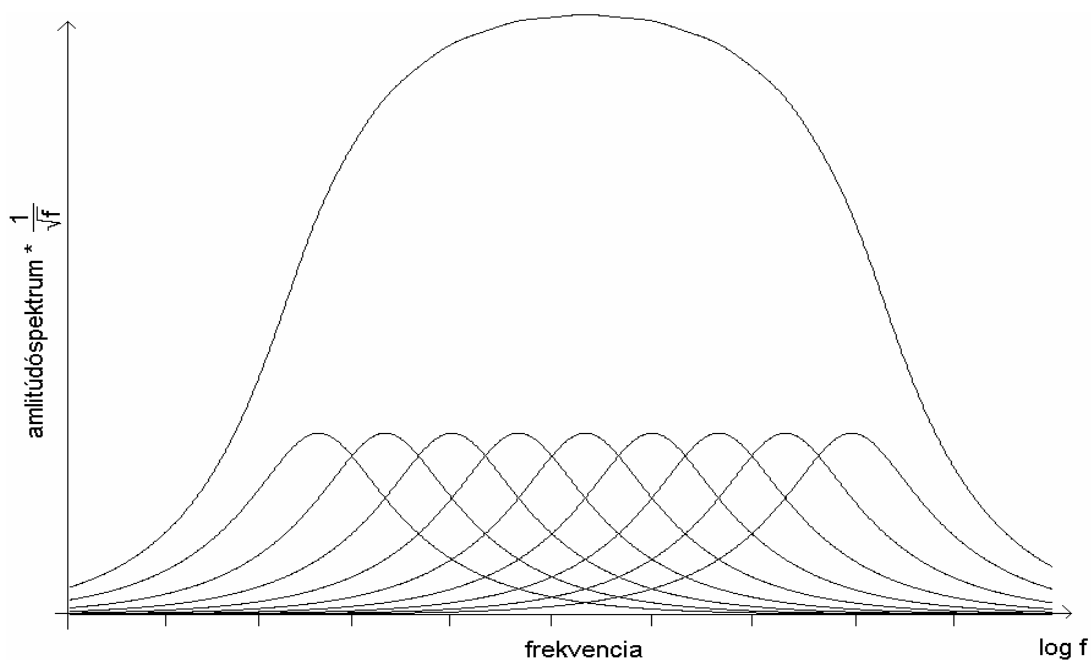


**6.2. ábra. A legfelső vonal a lorentzi zajok összegeként előálló megfelelő meredekségű amplitúdóspektrum.**

Felmerül a kérdés, hogy frekvenciaskálán milyen közökkel kell a szűrőket elhelyezni ahhoz, hogy a spektrum menete négy dekádon keresztül megfelelő legyen és ne legyen túlzottan hullámos, ugyanakkor, hogy a szűrők száma minél kevesebb legyen az algoritmus gyorsasága miatt. Meg kell határozni, hogy mennyi legyen a  $\Omega_m$  normált mintavételi frekvencia, és hogy mennyi legyen az egyes szűrők  $A_0$  paramétere, hogy a spektrum egyenes legyen az adott tartományon. Munkám kezdetekor úgy gondoltam, hogy dekádonként legalább négy szűrő kell, és így

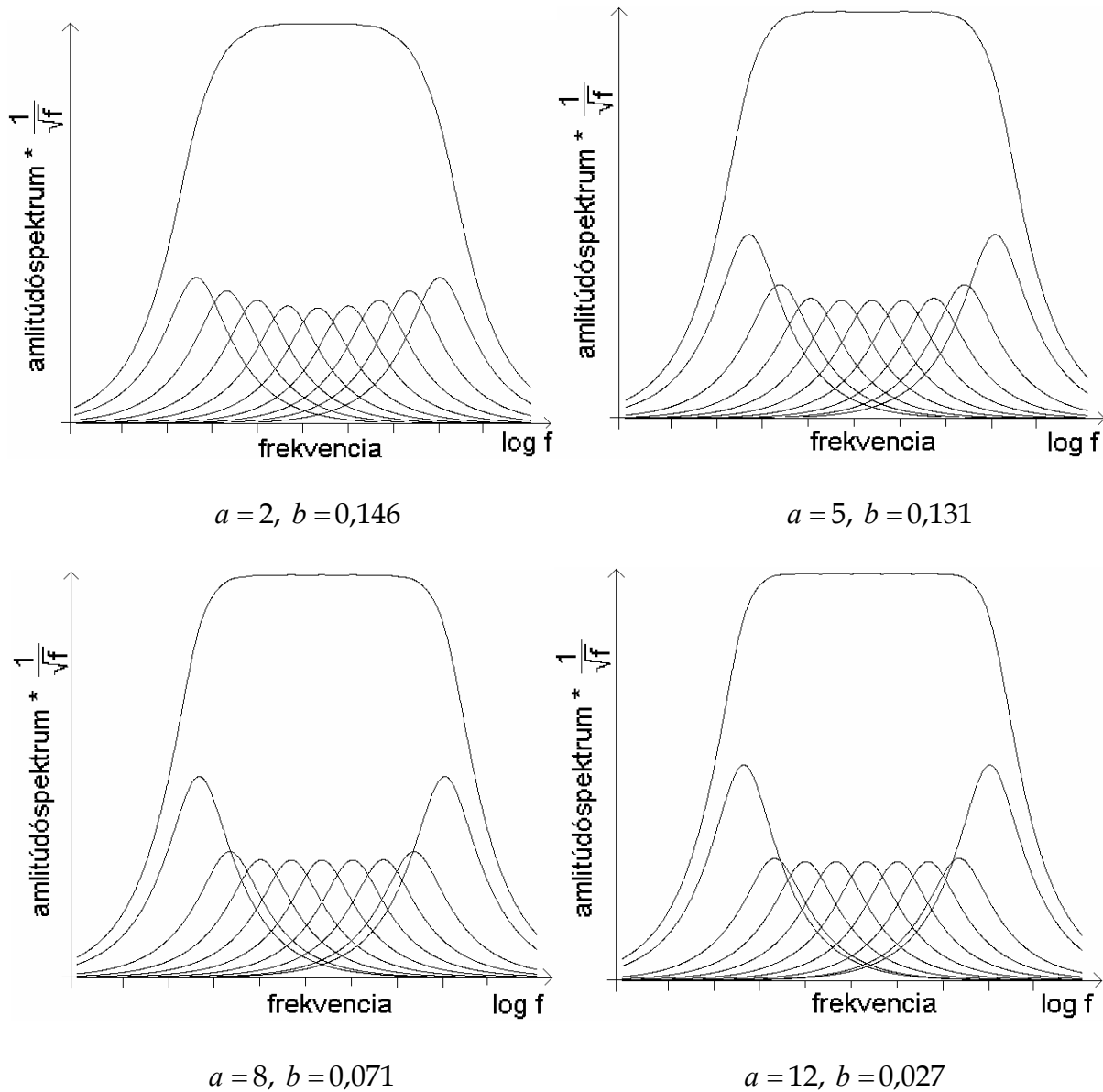
összesen 16-18 szűrőre lesz összesen szükség, de később kiderült, hogy kevesebb is elég, erről később szólok.

A legelső szűrő  $\Omega_m$  normált mintavételi frekvenciáját 5-re választottam. Ezek után megírtam az algoritmust LabVIEW fejlesztőkörnyezetben. Ehhez ki kellett számolni a  $D$  és  $C$  paramétereket, és a 6.2. ábrához hasonló képet kaptam, csak nem kilenc, hanem 16 szűrővel. Ezek után megvizsgáltam, hogy a létrejövő eredő spektrum mennyire felel meg a kívánalmaknak, tehát mennyire egyenes lefutású. Ehhez beszoroztam a spektrumot  $\frac{1}{\sqrt{f}}$ -el, mert ekkor  $1/f$  zaj esetén az eredő spektrumnak egy 0 meredekségű egyenesre kell illeszkednie; a következő ábrát kaptam.



6.3. ábra. A felső görbe az eredő  $1/f$ -zaj, az alsók pedig az egyes szűrők

amplitúdóspektruma beszorozva  $\frac{1}{\sqrt{f}}$ -el.



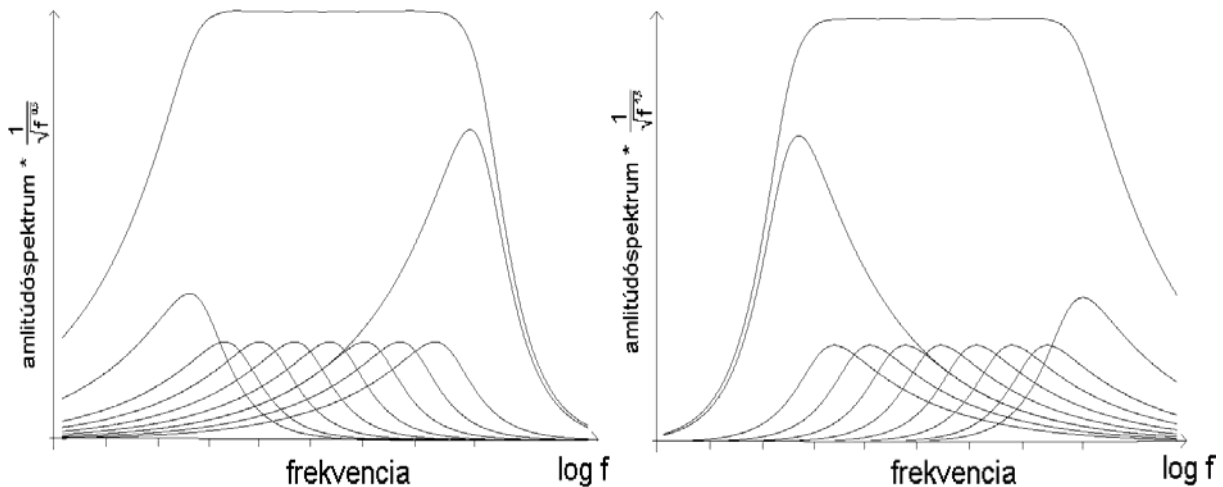
**6.4. ábra. Amplitúdóspektrumok (szorozva  $\frac{1}{\sqrt{f}}$ -el) az  $1 + x^a * b$**

**függvénnyel való szorzás után, 1/f-zaj esetén.**

A 6.2. és a 6.3. ábra ugyanazokkal a paraméterekkel felvett spektrumot mutatja, mégis igazán csak a másodikon látszik, hogy mennyire nem megfelelő a lefutása. Úgy gondoltam, hogy ezt a görbét egy hatványfüggvénnyel való szorzással jól lehetne korrigálni:

$$f(a, b) = 1 + x^a * b \tag{6.2}$$

Itt  $x$  jelenti a spektrum szimmetriatengelyétől mért távolságot.  $a$  és  $b$  a változó paraméterek. Látható, hogy az eredő spektrum annál szélesebb tartományon egyenes, minél nagyobb  $a$  értéke, s ennek megfelelően  $b$  értéke minél kisebb. Ha  $a \rightarrow \infty$ , akkor már csak az első és az utolsó szűrő együtthatója nem egy. Tehát semmi szükség a hatványfüggvénnyel való szorzásra, elég, ha az említett szűrőtagok spektrumát paraméterezzük úgy, hogy az amplitúdójukat egy jól meghatározott számmal megszorozzuk. Az 6.4. ábra  $1/f$  zajra vonatkozik, de vajon mi a helyzet más kitevőjű zajoknál?

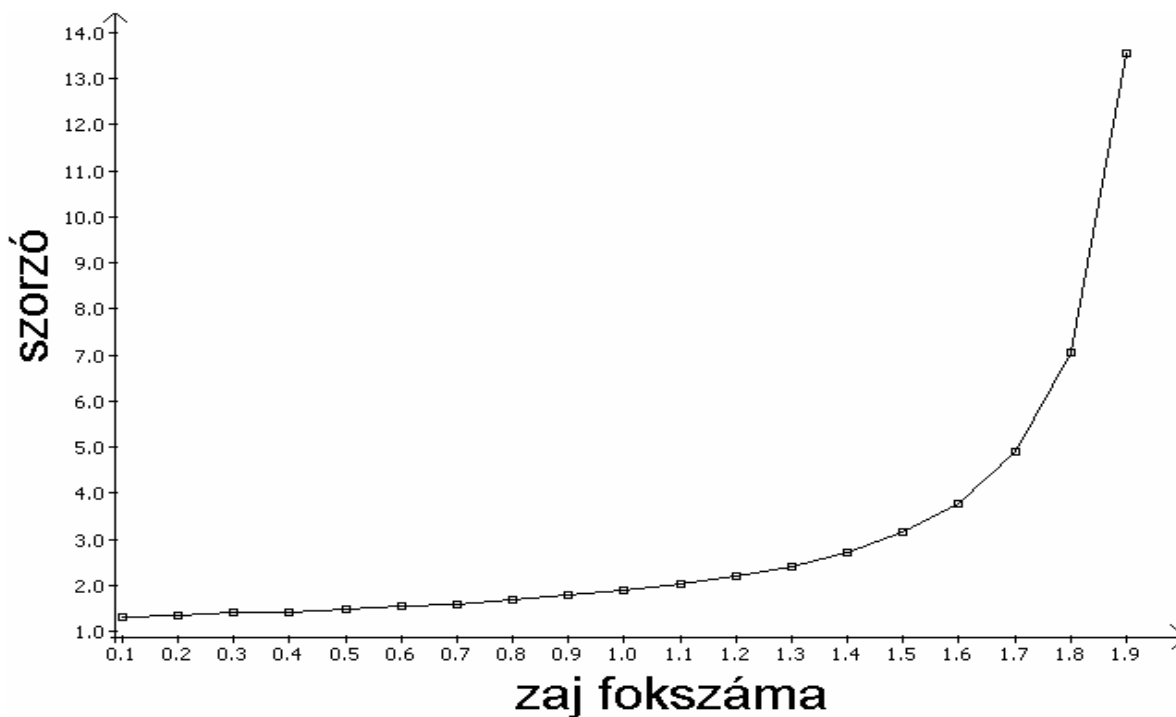


6.5. ábra. Amplitúdóspektrumok (szorozva  $\frac{1}{\sqrt{f^{0.5}}}$ -el, illetve  $\frac{1}{\sqrt{f^{1.5}}}$ -el) az első és

utolsó szűrő amplitúdójának korrigálása után,  $1/f^{0.5}$ -, és  $1/f^{1.5}$ -zaj esetén.

Ahogy a 6.5. ábráról is látszik, nem  $1/f$ -zaj esetén is azt kaptam, hogy elég csak az első és utolsó szűrő paramétereit megváltoztatni, azonban nem ugyanazzal az értékkel kell beszorozni a két amplitúdót. Az is érdekes, hogy a szorzótényezők az  $1/f$ -zajra szimmetrikusak, például ugyanazzal az értékkel kell megszorozni  $1/f^{0.5}$

zaj esetén az első szűrőt, mint  $1/f^{1.5}$  zajnál az utolsót, tehát ha a 6.6. ábrán az első szűrők szorzóit ábrázoltuk volna, akkor hasonló, csak monoton csökkenő görbét kapunk, ami az eredeti görbét  $\alpha = 1$  helyen metszi. A szorzókat manuálisan határoztam meg. Miközben LabVIEW-ban egy virtuális potenciómétert változtattam, figyeltem, hogy a spektrum mikor a legideálisabb. Ezt az eljárást  $\alpha = 0,1$ -től  $\alpha = 1,9$ -ig elvégeztem. A köztes pontokban a függvény értékét a két szomszédos pont közé húzott egyenessel közelítettem.



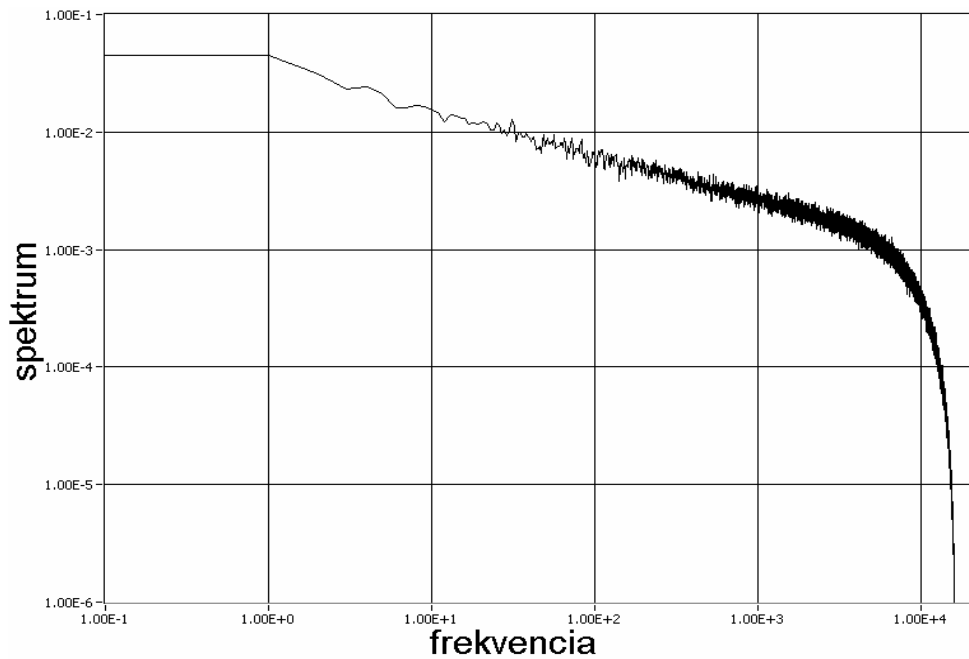
6.6. ábra és táblázat. A 9. szűrő szorzója a zaj fokszámának függvényében. ( $\frac{1}{f^\alpha}$ )

$\alpha$	1. szűrő	9. szűrő	Választ kell még adnom arra a kérdésre, hogy
0,1	13,55	1,32	miért éppen kilencre választottam a szűrőtagok
0,2	7,04	1,36	számát. A 6.3. ábrához hasonló görbéket vizsgáltam,
0,3	4,89	1,41	és arra az eredményre jutottam, hogy ha
0,4	3,79	1,43	dekádonként 1,5 szűrőt helyezek el, akkor a szűrők
0,5	3,15	1,49	távolságából adódó hullámosság még az 1%-os
0,6	2,72	1,53	relatív hibahatáron belül van. Tehát semmi szükség
0,7	2,42	1,59	dekádonként négy szűrőre, viszont egy már túl
0,8	2,20	1,68	kevés. Így számolva azt kapjuk, hogy négy dekád
0,9	2,02	1,77	lefedésére hét szűrőre van szükség, viszont ekkor
1,0	1,88	1,88	még a spektrum elején és végén nem megfelelő a
1,1	1,77	2,02	meredekség, tehát minkét oldalon szükség van még
1,2	1,68	2,20	egy tagra.
1,3	1,59	2,42	
1,4	1,53	2,72	
1,5	1,49	3,15	
1,6	1,43	3,79	
1,7	1,41	4,89	
1,8	1,36	7,04	
1,9	1,32	13,55	

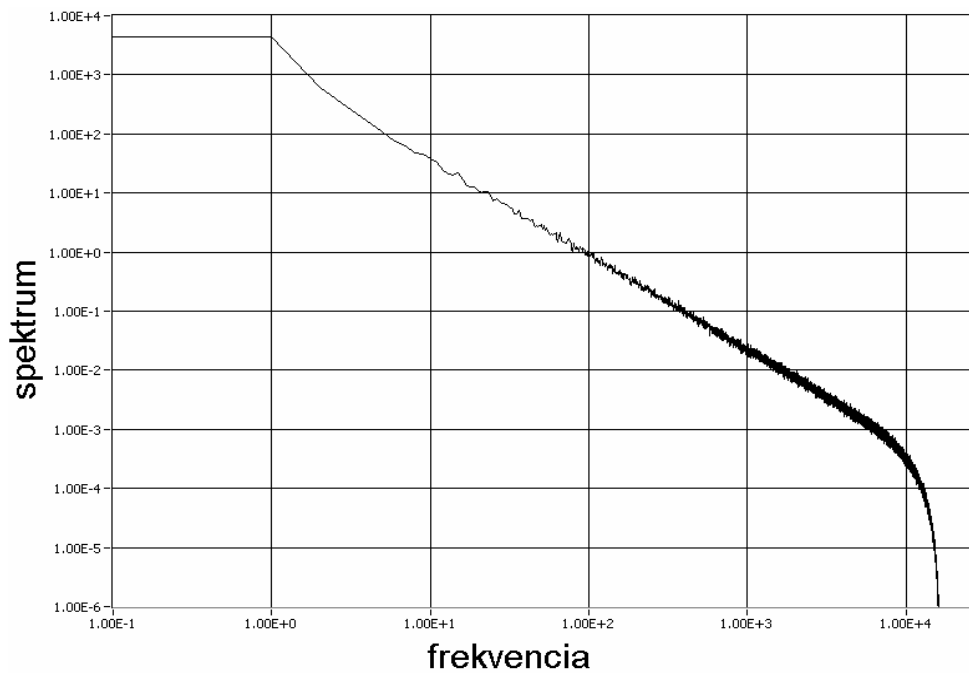
Az 5.1. fejezetben említettem, hogy a D/A

konverziónál (7.1. ábra) fellép egy  $\frac{\sin(\pi f / f_m)}{\pi f / f_m}$ -el arányos torzulás a spektrumban.

Ennek orvoslására egyszerűen megszoroztam az egyes szűrők amplitúdóit az említett függvény reciprokával. Az  $f$  frekvenciát az adott szűrő határfrekvenciájával helyettesítettem.



$$\alpha = 0,4$$



$$\alpha = 1,6$$

6.7. ábra. Labview környezetben generált  $\frac{1}{f^\alpha}$  ( $\alpha=0.4$  és  $1.6$ ) zajok spektruma.



## **7. Az algoritmus implementálása DSP-re**

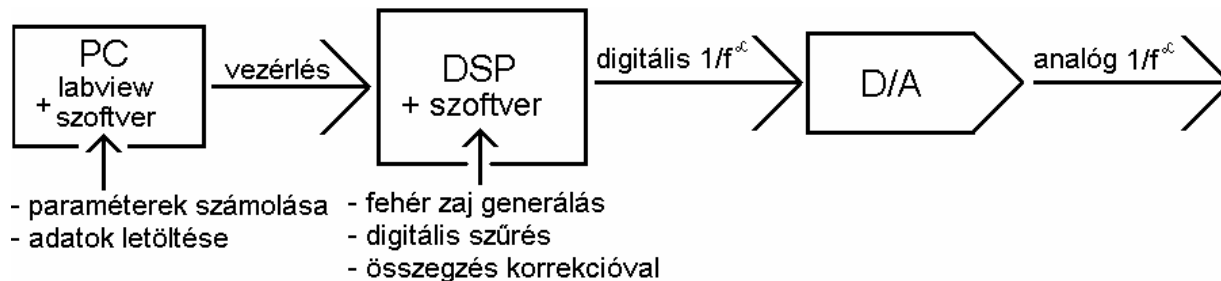
A digitális jelprocesszor fejlesztés a félvezetőipar egyik legdinamikusabban fejlődő területe, olyan technológiai áttörést jelent mint annak idején a mikroprocesszor megjelenése. A DSP technológia a digitális adatokon való nagysebességű aritmetikai műveletvégzés képessége révén számos olyan algoritmus, jelfeldolgozási eljárás és ezek révén végső soron olyan új alkalmazások végrehajtását teszi lehetővé, amely analóg technikával megvalósíthatatlan.

A DSP, hasonlóan több más a későbbiek folyamán korszakos jelentőségűvé vált technológiához, kezdetben egy szűk műszaki és tudományos közösség privilégiumának számított. Az elméleti (műszaki-matematikai) alapok koherens rendszere már viszonylag régóta rendelkezésre áll, a gyakorlati alkalmazásokat támogató gyártástechnológia azonban csak az utóbbi években érte el azt a szintet, amely a DSP processzorok és kiegészítő integrált áramköreik széles skáláját megfelelő áron tudta kínálni a végfelhasználók felé. A DSP processzorok struktúrális lényegéből fakadó gyors feldolgozási sebesség valamint az integráltsági szint mélysége (system-on-a-chip filozófia: a processzor mint műveletvégző mag mellett program és adatmemória valamint különböző perifériák pl. kommunikációs portok, A/D és D/A átalakítók stb. integrálása közös szilícium lapkára) következtében alkalmazási területük gyakorlatilag korlátlan.

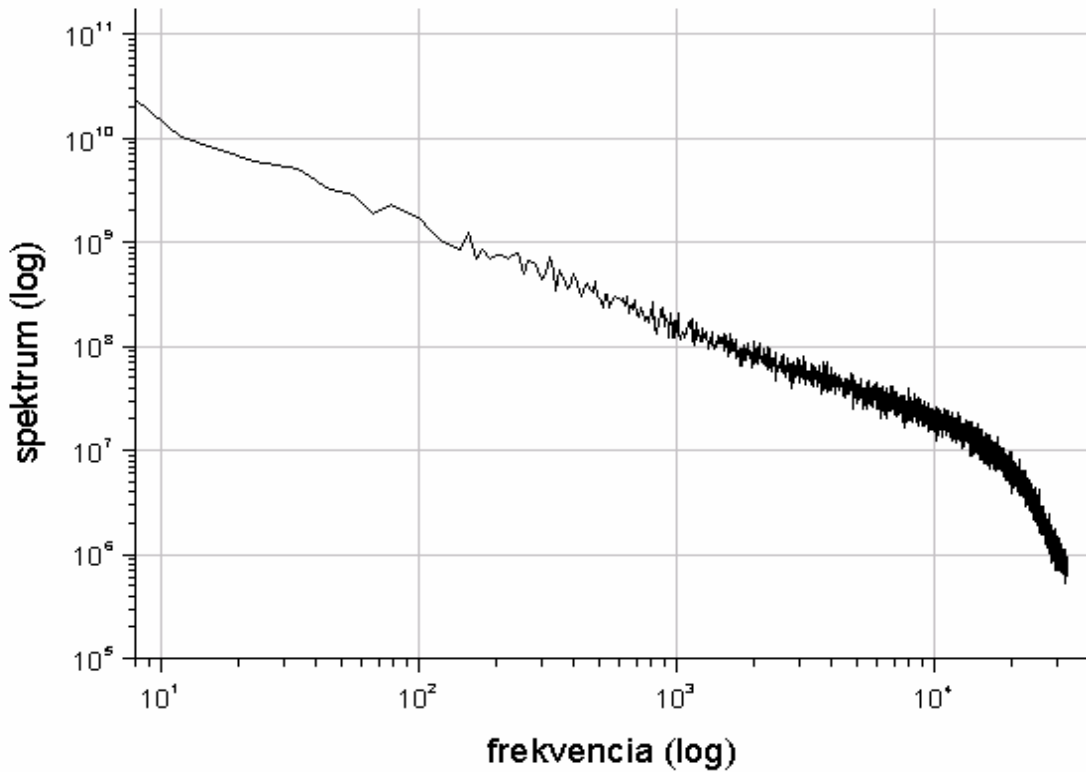
Munkám során az *Analog Devices* nevű cég, ADSP-2181 processzorát használtam [14]. Ez a processzor módosított Harvard architektúrájú, 16 bites fixpontos adatokkal dolgozik, és 16 kiloszó az adat- és programmemóriája is. Órajele

33MHz-es, ami nem tűnik soknak egy mai PC órajeléhez képest, de belső felépítéséből adódóan aritmetikai műveletvégző sebessége eléri, sőt meghaladja a leggyorsabb asztali számítógépek sebességét.

A D és C paraméterek kiszámítását egy LabVIEW program végzi, mert lényegesen egyszerűbb a programozása, mint a DSP-nek, ugyanakkor a jelgenerálás sebessége ettől nem változik, mert a paramétereket csak egyszer kell kiszámolni. Ezek után a szükséges adatokat be kell tölteni a jelprocesszor adat- vagy programmemóriájába. Ettől kezdve a DSP generálja az adatokat addig, amíg nem utasítjuk a PC-n keresztül a program futásának megszakítására. A kimenő jel spektrumán másodpercek alatt tudunk változtatni a számítógép grafikus felületén keresztül.



7.1. ábra. Algoritmus működése DSP-n.



**7.2. ábra. DSP-vel generált  $1/f$  zaj spektruma.**

A 7.2. ábrán is látható, hogy a zajgenerátor a mintavételi frekvencia kb. harmadánál, negyedénél kisebb frekvenciákon működik megfelelően. A függelékben bemutatott programrészlet egy adatot közel száz ciklus alatt generál le. A használt DSP 33MHz-es, tehát 330kHz a maximális mintavételi frekvencia, és ennek megfelelően a generátor maximális felső határfrekvenciája kb. 100 kHz. Ekkor az alsó határfrekvencia 1-10 Hz környékén van. Természetesen a mintavételi frekvencia csökkentésével az alsóbb frekvenciatartományokon is használható az algoritmus.

## **8. Összefoglalás**

A dolgozat célkitűzése egy digitális elven működő, analóg véletlenjeleket előállító zajgenerátor fejlesztése volt. Elkészült az algoritmus, amely tetszőleges  $\frac{1}{f^\alpha}$  ( $\alpha = 0.1-1.9$ ) spektrumú digitális zajt állít elő fehér zajból, súlyozott, szűrt jelek összegeként. Sávszélessége négy dekád, és bármikor könnyen reprodukálható a kívánt jelalak. A megfelelő analóg jellé konvertálást egy 12-bites D/A konverter végezte el.

Kiszámoltam a szükséges analóg szűrőkhöz hasonló erősítésű és határfrekvenciájú digitális szűrők átviteli függvényeit. Meghatároztam a jelgeneráláshoz szükséges digitális szűrők számát, és kiszámoltam az egyes tagok D és C paramétereit. Kompenzáltam a spektrum elején és végén az összegzésből adódó elhajlásokat és a  $\frac{\sin(\pi f / f_m)}{\pi f / f_m}$ -el arányos torzulást is, tehát meghatároztam a szűrőtagok szorzóit. Mindezt LabVIEW fejlesztőkörnyezetben végeztem.

Az algoritmust az ADSP-2181 digitális jelprocesszor utasításkészletének felhasználásával is megvalósítottam. Ezáltal létrejött egy általános felhasználhatóságú zajgenerátor, amely hasznos az  $\frac{1}{f^\alpha}$  spektrumú fluktuációk kísérleti vizsgálatánál. A paraméterek és/vagy az algoritmus kis változtatásával tetszőleges jelalak előállítható.

További cél a most meglevő prototípus alapján egy kompakt, manuálisan is irányítható és számítógéppel is vezérelhető műszer kifejlesztése.

## **9. Köszönetnyilvánítás**

Ez a dolgozat a Szegedi Tudományegyetem Természettudományi Karának Kísérleti Fizika Tanszékén Készült.

Köszönetemet fejezem ki témavezetőmnek, Dr. Gingl Zoltánnak a dolgozat témájának kijelöléséért, és az elkészítés során felmerült problémák megoldásában nyújtott segítségéért; valamint a Kísérleti Fizika Tanszék vezetésének, hogy lehetővé tették számomra a tanszéken munkámat.

Köszönettel tartozom a zajlaborban dolgozó hallgatóknak a munkámban nyújtott segítségért és hasznos tanácsokért.

## **10. Függelék**

A zajgeneráló DSP algoritmus, elején a véletlenszámgenerátorral.

```
*-----generates a random number with 1/f power spectrum-----*/
/* less than 100 DSP cycles */
onef:
    ar=dm(random_msw);          /* x[i-1] */
    sr1=dm(random_msw);        /* start of random generator */
    sr0=dm(random_lsw);
    my1=25;
    my0=26125;
    mr=sr0*my1(uu);
    mr=mr+sr1*my0(uu);
    si=mr1;
    mr1=mr0;
    mr2=si;
    mr0=h#fffe;
    mr=mr+sr0*my0(uu);
    sr=ashift mr2 by 15 (hi);
    sr=sr or lshift mr1 by -1 (hi);
    sr=sr or lshift mr0 by -1 (lo);
    dm(random_msw)=sr1;
    dm(random_lsw)=sr0;        /* end of random generator */
    sr=ashift sr1 by -3 (hi);   /* divide by 8 */
    ay1=sr1;
    sr=ashift ar by -3 (hi);    /* divide by 8 */
    ar=sr1+ay1;                /* x[i]+x[i-1] */
    ax0=ar;                     /* ax0 = x[i]+x[i-1] */
    i1=^y;i2=^c0;i4=^d0;
    m0=0;m1=1;m4=1;
    ay0=0;                       /* lower 16 bits of sum */
    ay1=0;                       /* higher 16 bits of sum */
    cntr=9;
do c1 until ce;
    ar=pass ax0,mx1=dm(i1,m0);my1=pm(i4,m4); /* ar=(x[i]+x[i-1]),mx1=y[i],my1=d0[i] */
    mr=ar*my1(ss), my0=dm(i2,m1);          /* d0*(x[i]+x[i-1]), my0=c0[i] */
    mr=mr-mx1*my0(rnd);                    /* -c0*y and round */
    sr=ashift mr1 by -16 (lo);              /* sr0 = -1, if mr1<0, 0 otherwise */
    ar=mr1+ay0, dm(i1,m1)=mr1;             /* add lower 16 bits and save y[i] */
    ay0=ar, ar=sr0+ay1+c;                  /* save lower 16 bits and add higher 16 bits */
c1:   ay1=ar;                               /* save higher 16 bits */
    sr=ashift ar by -9 (hi);               /* normalize sum to 16 bits */
    ar=ay0;
    sr=sr or lshift ar by -9 (lo);         /* normalize sum to 16 bits */
    rts;
```

## **11. Irodalomjegyzék**

- [1] Prékopa A.: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal, Műszaki Kiadó, Budapest, 1980
- [2] Rényi A.: Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954
- [3] Jelek és rendszerek mérés technikája, szerk. Schnell, Műszaki Kiadó, Budapest, 1985
- [4] N. Hesselmann: Digitális jelfeldolgozás, Műszaki Kiadó, Budapest, 1985
- [5] R. M. Fazlollah: Bevezetés az információelméletbe, Műszaki Kiadó, Bp. 1966
- [6] J.W.Cooley and J.W. Tukey, Math. Comp. 19 (1965)
- [7] Motchenbacher-Fitchen: Kis-zajú elektronikus áramkörök tervezése, Műszaki Kiadó, Budapest, 1977.
- [8] Nelson Max: Noise and stochastic processes, Dover Publications, New York ,1954.
- [9] Marvin S Keshner: 1/f noise Proc. of the IEEE, Vol. 70, No. 3, March 1982.
- [10] Dr. Kiss László Béla: Kézirat
- [11] Nagy István: Az 1/f zaj Markovi tulajdonságának vizsgálata, diplomamunka, JATE, Kísérleti Fizika Tanszék, 1992
- [12] M. L. Meade, 10th International Conference on Noise in Physical Systems, ed. A. Ambrózy, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1990
- [13] Mingesz Róbert: Az  $1/f^\alpha$  zajok időbeli szerkezetének vizsgálata, diplomamunka, SZTE, Kísérleti Fizika Tanszék, 2002
- [14] ADSP-2100 family user's manual, Analog Devices, 1995
- [15] Mérai László: Az 1/f zaj amplitúdósaturációjának kísérleti vizsgálata, diplomamunka, SZTE, Kísérleti Fizika Tanszék, 2002
- [16] Gingl Zoltán: 1/f zaj generálása a Brown-mozgás skálázása alapján, doktori értekezés, SZTE, Kísérleti Fizika Tanszék, 1992
- [17] U. Tietze, Ch. Schenk: Analóg és digitális áramkörök, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1990