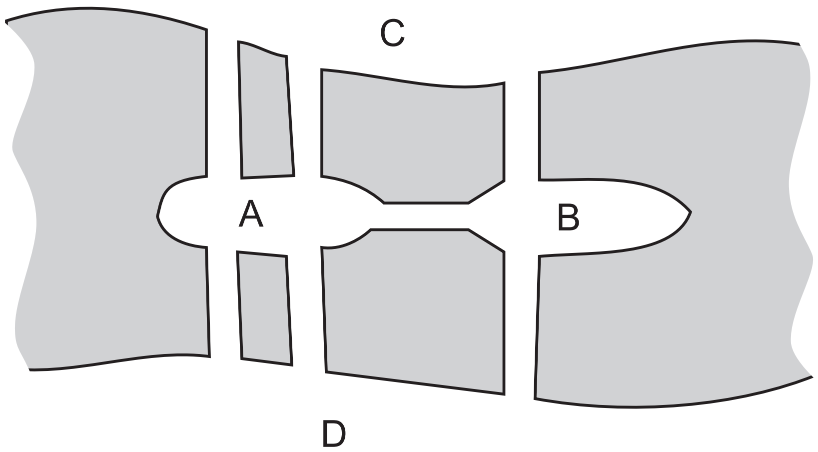
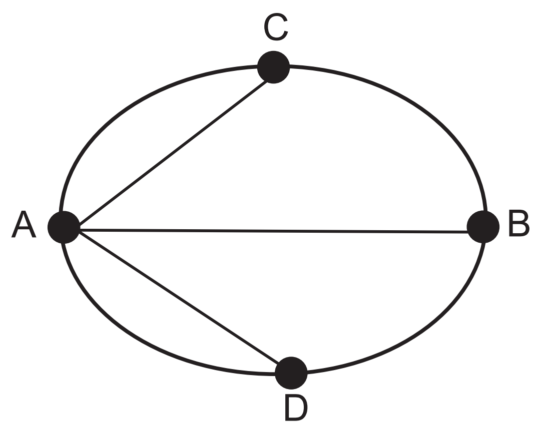
1. Gráfmodellek

1.1 Königsbergi hidak *(Euler, 1736)*

Probléma: Königsberg mellett volt egy Pregel nevű folyó, két szigettel. A folyó két partját és a szigeteket hét híd kötötte össze. Bejárhatjuk-e – volt a legenda szerint a königsbergi polgárok problémája – a hét hidat úgy, hogy minden hídon pontosan egyszer sétálunk keresztül és az utunk végén visszaérjünk a kiindulási helyhez?



1.1 a



1.1 b

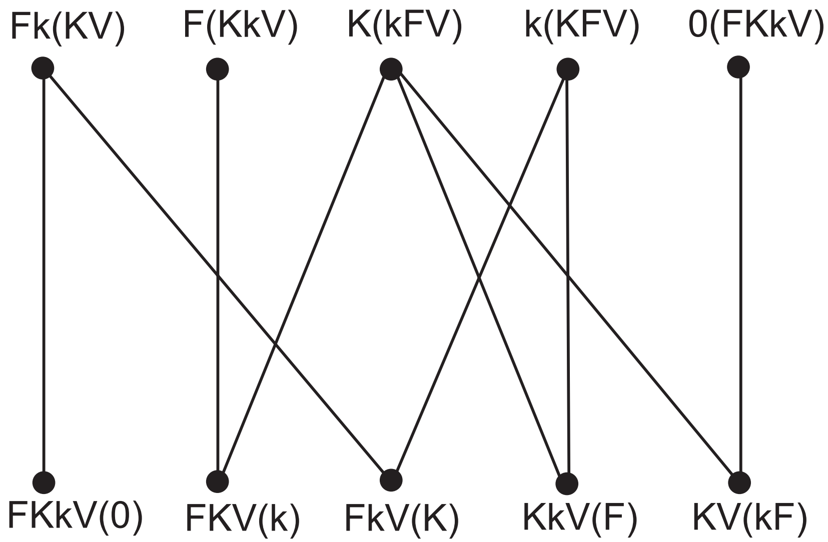
Gráfmodell: A folyó különböző partjai ill. a szigetek legyenek a gráf csúcsai, a hidak pedig a gráf élei. Be lehet-e járni a gráfot úgy, hogy minden élen pontosan egyszer haladjunk át és visszatérjünk a kiindulási ponthoz? (Azaz van-e a gráfnak zárt Euler-bejárása?)

1.2 Adjunk tanácsot a vándornak!

Probléma: Egy vándor egy kecskével, egy káposztával és egy farkassal, át szeretne kelni egy folyón. A vándor csónakján egyszerre csak egyiküket tudja átvinni. Ha a káposztát és a kecskét otthagyja az egyik parton, míg a farkast átviszi, akkor a kecske megeszi a káposztát. Ha a farkast hagyja valamelyik oldalon a kecske társaságában, akkor természetesen a farkas megeszi a kecskét. Hogyan juthat át a kecskével a káposztával és a farkassal a túlsó oldalra, úgy hogy mindnyájan megmaradjanak?

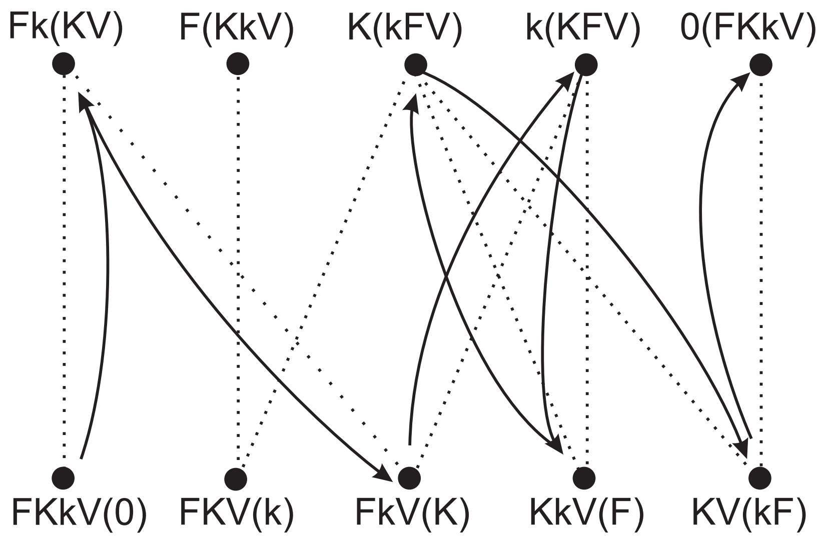
Gráfmodell: Vezessük be az alábbi rövidítéseket: Kecske(K), káposzta(k), farkas(F), vándor(V)! A feladat megfogalmazása szerint a lehetséges állapotok a folyó két partján a következők (A zárójelben lévő betűsorozat mindig a másik parton lévő állapotot tükrözi):

FKkV(0)	Fk(KV)	F(KkV)
FKV(k)	KV(kF)	K(kFV)
FkV(K)		k(KFV)
KkV(F)		0(FKkV)



Legyenek egy gráf csúcsai az egyes állapotoknak megfeleltetve az élek pedig a lehetséges átmeneteket ábrázolják.

Keressünk egy olyan «élsorozatot» a gráfban, amely az FKkV(0) pontot összeköti a 0(FKkV) ponttal.



Egy lehetséges megoldás pl.:

$$\text{FKkV} \rightarrow \text{Fk} \rightarrow \text{FkV} \rightarrow \text{k} \rightarrow \text{kKV} \rightarrow \text{K} \rightarrow \text{KV} \rightarrow 0$$

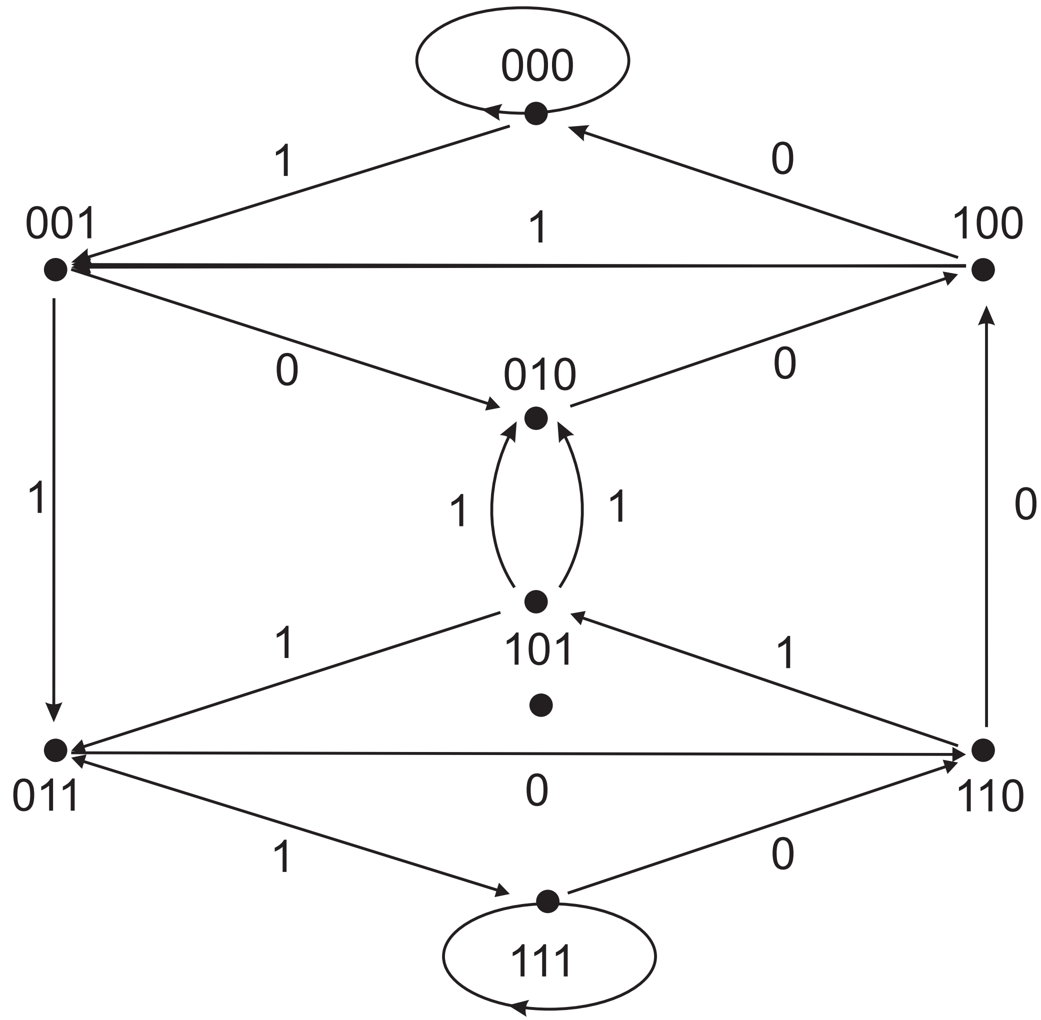
1.3 Hogyan jut be egy rabló leggyorsabban a Baltimore Hilton Inn szobáiba?

Probléma: A Baltimore Hilton Inn vendégei egy-egy 4-jegyű számkombinációt kapnak szobakulcs helyett. A megfelelő ajtón lévő számzár a 4 szám megfelelő sorrendben való beütésére nyílik, függetlenül attól, hogy előtte hány számjegyet ütöttünk be.
(Pl., ha szobánk számkombinációja 0014, akkor a szoba többek között a 2351<u>0014</u> számsorozatra kinyílik.)

Hány számjegyet kell minimálisan beütni egy okos rablónak ahhoz, hogy biztosan bejusson akármelyik ajtón?

A feladatot bináris négyjegyű számok esetében oldjuk meg. Ez esetben a szállodában legfeljebb 16 szoba lehet, ennyi különböző számjegykombináció lehetséges. Az ügyetlen rabló 64 számjegyet üt be.

Gráfmodell: Legyenek az irányított gráf csúcspontjai a háromjegyű bináris számoknak megfeleltetve.
Két csúcs pontosan akkor legyen összekötve irányított éllel, ha lehagyva a nyíl kezdőpontjához tartozó szám első jegyét és hozzáírva egy 1-est vagy egy 0-át a nyíl végpontjában lévő számot kapjuk. Az adott élhez rendeljük hozzá a hozzáírt számot.



Keressünk a gráfban egy «sétát», azaz a gráf összes élét tartalmazó élsorozatot, melynek

– kezdő- és végpontja megegyezik és
– minden élt pontosan egyszer tartalmaz.

Egy lehetséges számsorozat pl.:

1111 0110 0101 0000

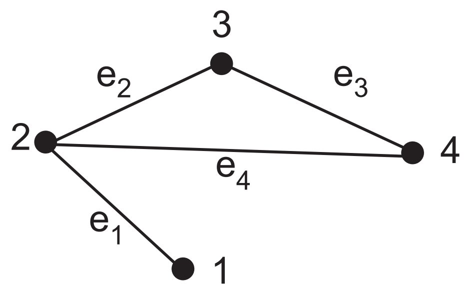
A valóságnak megfelelően az utolsó jegyek nem olvashatók össze az első jegyekkel . Ezért írjuk a számsorozat elején szereplő első három jegyet a sorozat végére, így megkapjuk azt a bitsorozatot, amely a 16 4-jegyű bitsorozatokat mind tartalmazza: 1111 0110 0101 0000 111

2. Alapfogalmak

2.1 Gráf fogalma

G(V,E) gráf egy rendezett pár, ahol V egy nem üres véges halmaz, a ***szögpontok (csúcsok)*** halmaza, E pedig a V halmaz elemeiből képzett (nem feltétlenül különböző) párok egy halmaza. Ez utóbbit az ***élek*** halmazának nevezzük.
Ha az éleknek irányítása van, azaz az élek E(G) halmazának elemei rendezett párok, akkor a gráfot ***irányított gráf***nak nevezzük és $\vec{G}(V,E)$-vel jelöljük.

G(V,E) (közönséges) gráf

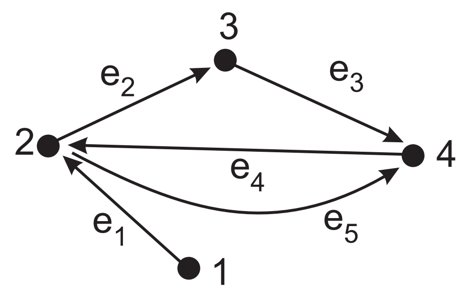


V={1,2,3,4}

$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$

$e_1=\{1,2\}$, $e_2=\{2,3\}$, $e_3=\{3,4\}$, $e_4=\{2,4\}$

$\vec{G}(V,E)$ (irányított) gráf



V={1,2,3,4}

$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$

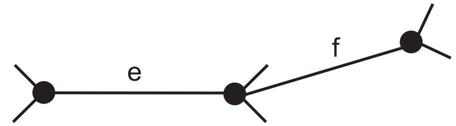
$e_1=\{1,2\}$, $e_2=\{2,3\}$, $e_3=\{3,4\}$, $e_4=\{4,2\}$, $e_5=\{2,4\}$

2.2 Élek, csúcsok

Két pont szomszédos, ha éllel össze vannak kötve.

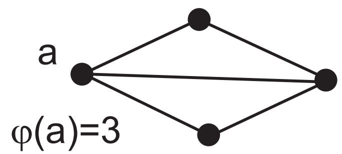
Két él szomszédos, ha valamely csúcspontjuk közös.

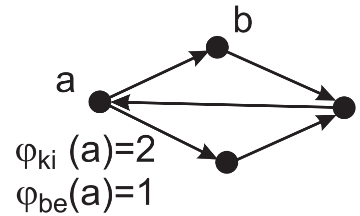
Szomszédos csúcsok



Szomszédos élek

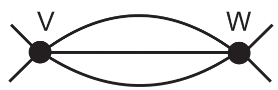
Szögpont ***fokszámán***(φ): a rá illeszkedő élek számát értjük.
Irányított gráfnak kifoka és befoka van.



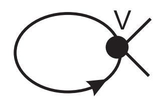


Ha φ(b)=0, akkor b ***izolált pont***ja a gráfnak.

Ha két csúcsot egynél több él köt össze, akkor **több-szörös él**ről beszélünk. Az a szám, amely megmutatja, hogy a gráfban hány példányban szerepel egy él, az illető ***él multiplicitása.***
Hurokélnek nevezzük az olyan élet, melynek kezdőpontja és végpontja megegyezik.
Egyszerű gráf*nak* nevezzük az olyan irányítatlan gráfot, melynek nincs többszörös éle és hurokéle.
A továbbiakban, ha mást nem mondunk, gráf alatt egyszerű gráfot fogunk érteni.



A {v,w} háromszoros multiplicitású él

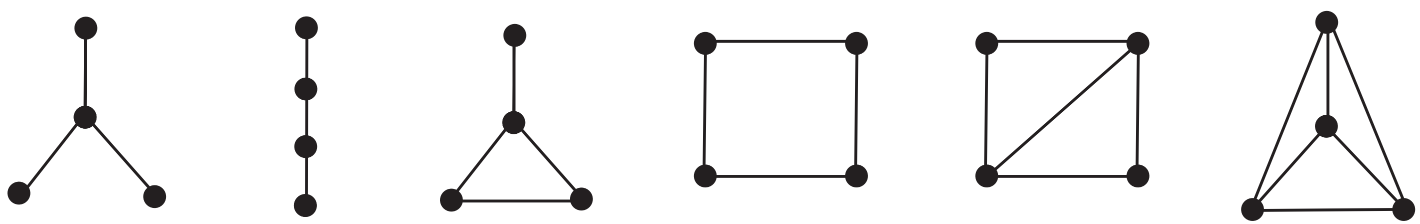


A e={v,w} hurokél

2.3. Gráfok izomorfiája

Két gráf ***izomorf***, ha van csúcsaik között olyan bijekció, hogy valahányszor két csúcs szomszédos az egyik gráfban, a nekik megfelelő pontok szomszédosak a másikban is.
Példa:

A gráfelméleti vizsgálatok során izomorf gráfok között nem teszünk különbséget.
Példa: Az összes lehetséges négy szögpontú «különböző» (azaz nem izomorf) gráf.



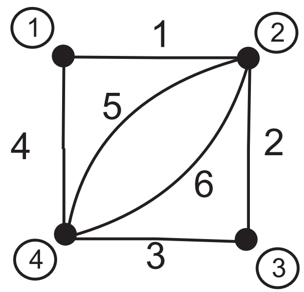
2.4 Mátrixreprezentációk

n szögpontú gráf ***szomszédsági mátrixa (csúcsmátrixa)*** az az nxn-es **C** mátrix, melynek elemeire

$$c(i,j) = \begin{cases} k, & \text{ha az i és j szögpontok össze vannak kötve G-ben egy k multiplicitású éllel} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

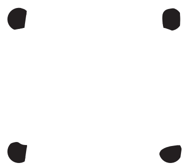
n szögpontú m élű gráf ***illeszkedési mátrixa*** az az nxm-es **M** mátrix, melynek elemeire

$$m(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{ha a j él illeszkedik az i szögpontra G-ben} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



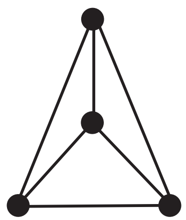
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5 Fontosabb gráffajták

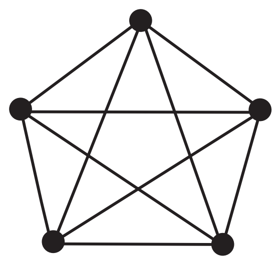


N_4

Nullgráf (N_n): n csúcsú él nélküli gráf.

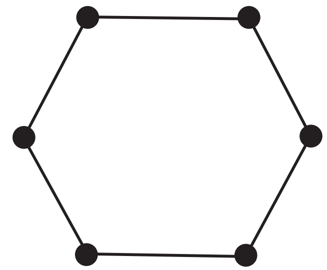


K_4



K_5

Teljes gráf (K_n): n csúcsú egyszerű gráf, melynek bármely két csúcsa szomszédos.

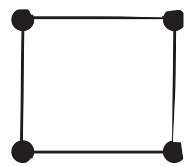


C_5

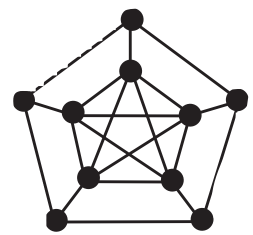
Kör (C_n): n csúcsú egyszerű gráf, melyben minden pont foka 2.

P_5

Út (P_n): $n \geq 3$ csúcsú egyszerű gráf, melyet C_n-ből egy tetszőleges él elhagyásával kapunk. Vagy 2 pontú 1 élű gráf.



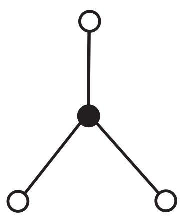
C_5



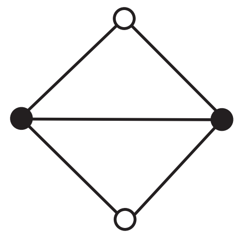
r-reguláris gráf: olyan egyszerű gráf, melynek összes pontjának foka r.

Páros gráf ($K_{r,s}$): olyan egyszerű gráf, melynek szögpont-halmaza felbontható két diszjunkt A és B halmazra úgy, hogy a gráf összes élére igaz, hogy A halmazbeli szögpontot B halmazbeli szögponttal köt össze.

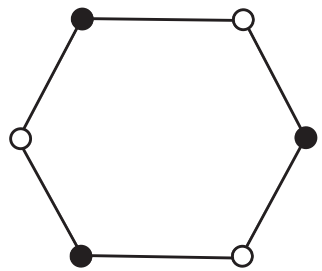
Néhány *«teljes» páros gráf**
(A «teljesség» itt azt jelenti, hogy az A halmaz összes eleme szomszédos a B halmaz összes elemével.)



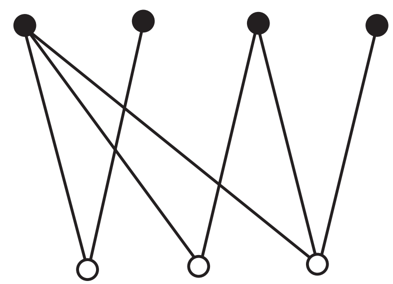
$K_{1,3}$



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$

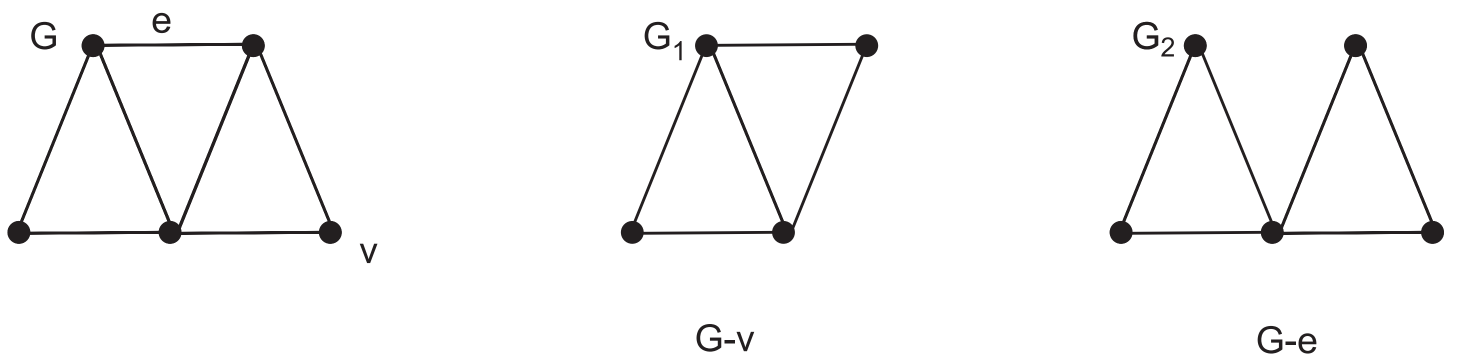


$K_{4,3}$

*A fekete pontok az A-hoz, a fehérek a B halmazhoz tartozó szögpontok.

2.6 Részgráfok

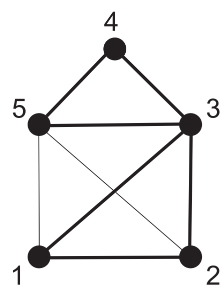
Részgráf: G(V,E) részgráfja $G_1(V_1,E_1)$, ha $V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$, ha valamely $\{v_1,v_2\} \in E_1$, akkor v_1 és v_2 csúcsok V_1 elemei.



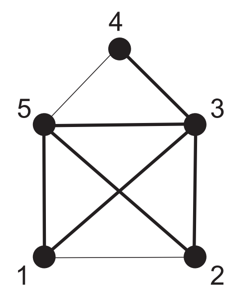
G_1 feszített részgráfja G-nek, G_2-nek nem.

Feszített részgráf: Olyan részgráf, amelyben pontosan akkor szomszédos két pont, ha az eredetiben is szomszédos.

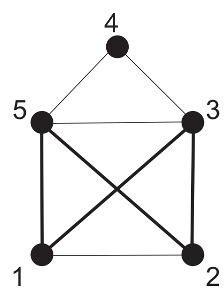
G gráfvonala: Ha a G gráf éleinek egy $e_1, e_2, \ldots, e_n = \{v_1,v_2\}, \{v_2,v_3\}, ..., \{v_{n-1},v_n\}$ sorozatában G élei nem ismétlődnek, akkor G-nek e pont- és élsorozat alkotta részgráfját G gráfvonalának (sétájának) nevezzük. A gráfvonal *zárt,* ha $v_1=v_n$, *nyitott,* ha $v_1 \neq v_n$. *A gráfvonal hossza:* a benne szereplő élek száma.



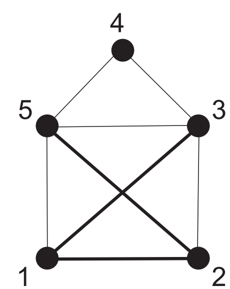
zárt gráfvonal: {1,2}, {2,3}, {3,5}, {5,4}, {4,3}, {3,1}



nyitott gráfvonal: {5,1}, {1,3}, {3,5}, {5,2}, {2,3}, {3,4}



ez a *zárt gráfvonal* a gráf egy *köre:*
{1,3}, {3,2}, {2,5}, {5,1}



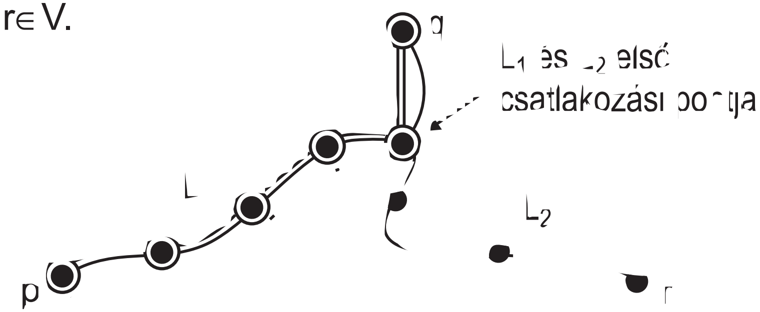
ez a *nyitott gráfvonal* az 5-ös és a 3-mas szögpontokat összekötő *út:* {5,2}, {2,1}, {1,3}

2.7 Összefüggőség, komponensek

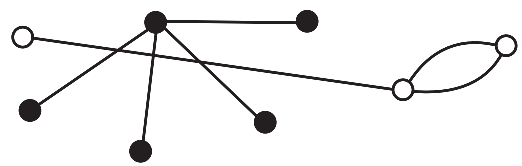
A G gráfról akkor mondjuk, hogy ***összefüggő,*** ha bármely két csúcshoz tartozik G-beli út, mely a két csúcsot összeköti.

Tétel: Legyen a G gráf csúcsainak V halmazán értelmezett R reláció a következő: $(p,q)\in R$, pontosan akkor, ha létezik G-ben p-t q-val összekötő út vagy p=q. Az R reláció ekvivalencia-reláció.

Bizonyítás: R reflexív és szimmetrikus (triviális).
Tranzitív: $(p,q\in R$ és $(q,r)\in R \Rightarrow (p,r)\in R$, ha $p,q,r\in V$.
Induljunk el p-ből a q-ba vezető L_1 úton, menjünk rajta addig, amíg nem érünk el az első olyan csúcshoz, amely a q-ból az s-be vezető L_2 úton rajta van. Innentől folytassuk az utat a q-t és r-et összekötő úton, amíg r-be nem jutunk. Ezzel egy utat határoztunk meg p-ből r-be.



G gráf egy ***komponense*** az a feszített részgráf, melynek csúcsai *az R reláció egy ekvivalencia-osztályába* tartoznak.



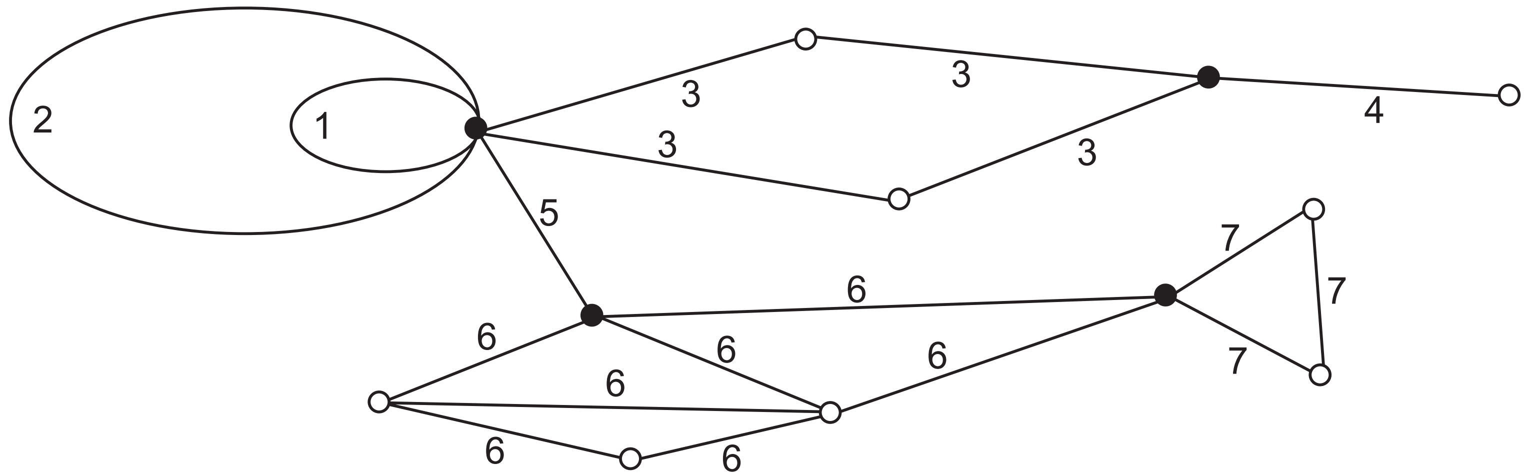
2 komponensből álló gráf

2.8 Tagok. Ciklikus összefüggőség

Legyen a T reláció a G(V,E) gráf élein értelmezve:
(e,f)$\in$T pontosan akkor, ha van G-ben olyan kör, melynek mind e és mind f éle, vagy ha e=f.

Belátható, hogy *T ekvivalenciareláció* E-n. Az egy ekvivalenciaosztályhoz tartozó élek halmazát végpontjaikkal együtt a G gráf egy ***tag***jának nevezzük.

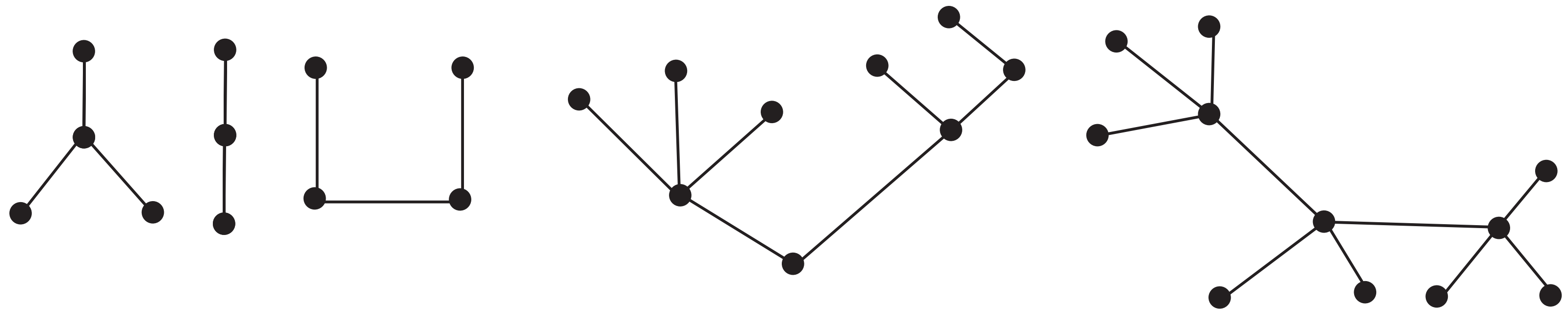
A G gráf p pontja G-nek ***artikulációja,*** ha van G-ben két p-hez illeszkedő olyan él, amelyek különböző tagokba tartoznak. Az egy tagból álló gráfot ***ciklikusan összefüggőnek*** nevezzük.



Azonos taghoz tartozó éleket az ábrán azonos sorszámmal jelöltük.
A tömör pontok a gráf artikulációi.

3. Fák és erdők

Ha egy G gráf körmentes, akkor ***erdő***nek nevezzük.
Ha egy G gráf körmentes és összefüggő, akkor ***fá***nak nevezzük.



Az erdő komponensei fák

3.1 Tétel: Az alábbi állítások ekvivalensek:

(a) n szögpontú gráf fa,

(b) összefüggő, n szögpontú, n-1 élszámú gráf,

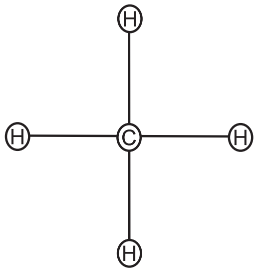
(c) n szögpontú, n-1 élszámú, körmentes gráf,

(d) összefüggő, mely bármely élének elhagyásával két komponensre esik szét,

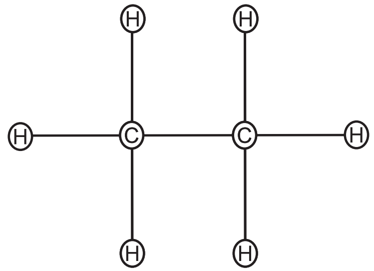
(e) n szögpontú gráf, melynek bármely két pontját pontosan egy út köt össze,

(f) n szögpontú összefüggő gráf, melynek élhalmazát egy tetszőleges éllel bővítve a keletkezett gráfban pontosan egy kör van.

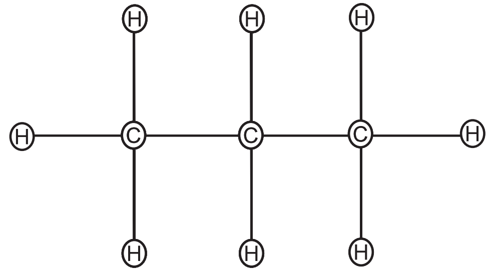
A paraffinmolekulák gráfmodelljei fák



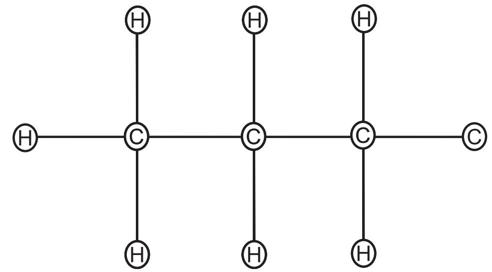
metán



etán



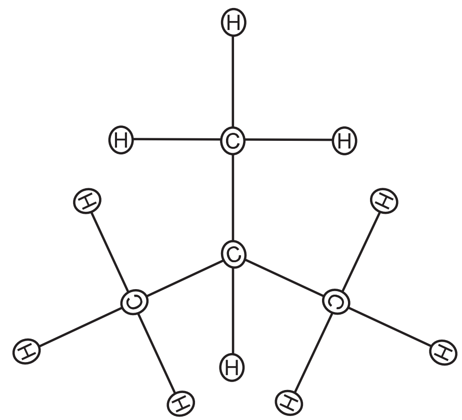
propán



normális bután

Állítás: A paraffinok általános képlete C_nH_{2n+2} (n=1,2,3,…) nyílt szénláncok, azaz molekuláris modelljeik fák.

Bizonyítás: A gráf pontjainak száma = szén és hidrogén atomok száma
= n+2n+2 = 3n+2
A gráf éleinek száma = pontok fokának összegének fele
= 1/2(4n+2n+2) = 3n+1.
A modell tehát egy olyan gráf, melynek eggyel kevesebb éle van, mint pontja, valamint nyilván összefüggő.
A 3.1(b) Tétel értelmében fát kaptunk.

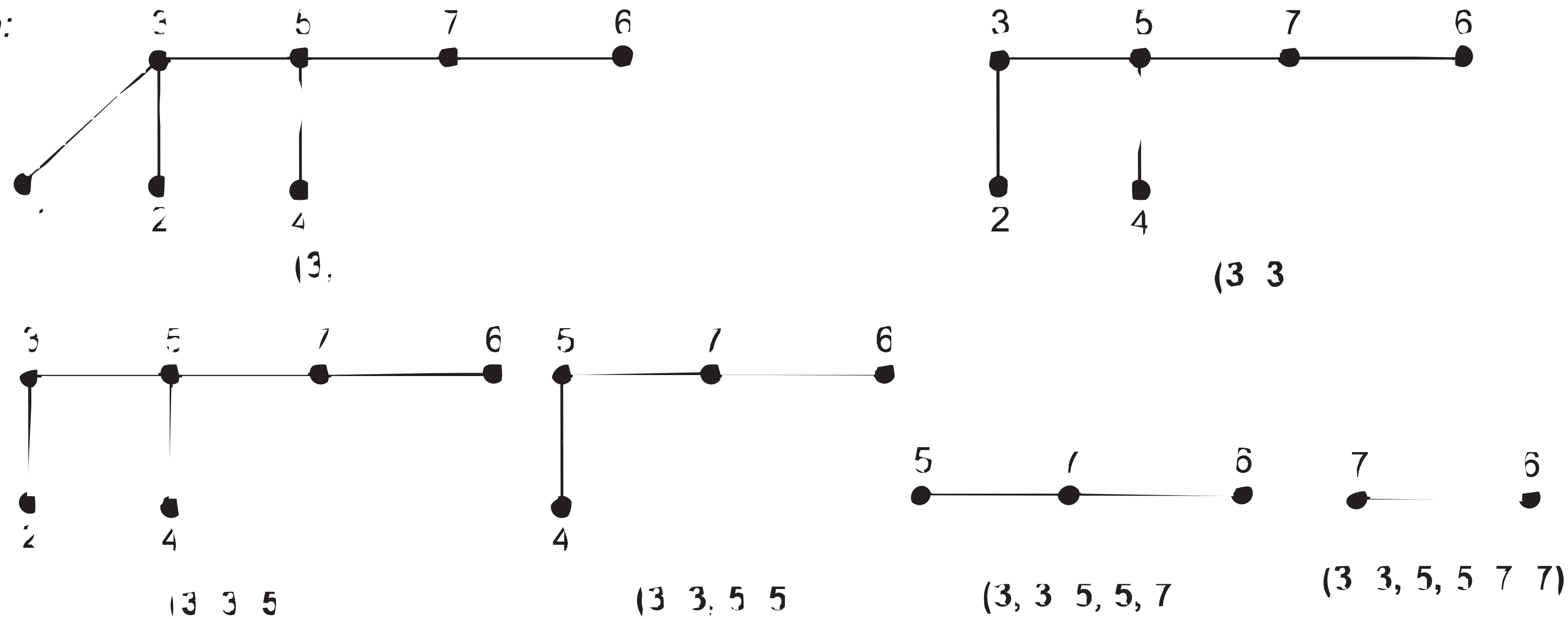


izobután

3.2 Fa Prüfer kódja:

Számozzuk meg az n szögpontú F fa pontjait: {1,2,...n}.
Hagyjuk el a legkisebb indexű olyan csúcsot, mely elsőfokú és jegyezzük fel a szomszédjának indexét: *v(1).*
Ismételjük az eljárást a maradékfára addig amíg csak egy pont marad: *v(i), i=2,3,...,n-1*
Az így kapott számsorozat *(v(1),v(2),...v(n-1))* az F fa Prüfer kódja.

Példa:



F kódja: (335577).

Gondoljuk meg!: n szögpontú fa Prüfer kódja n-1 hosszúságú, jegyei 1 és n közé esnek, valamint utolsó jegye mindig n.

Hogyan építjük fel a fát, ha a (v(1),v(2),...v(n-1)) kódja ismert?

Tétel: A Prüfer kód egyértelmű: minden olyan n-1 elemű számsorozat, melynek elemei az {1,2,...n} halmazból valók, valamint az utolsó jegye n, egyetlen {1,2,...n} szögpontú fát határoz meg.

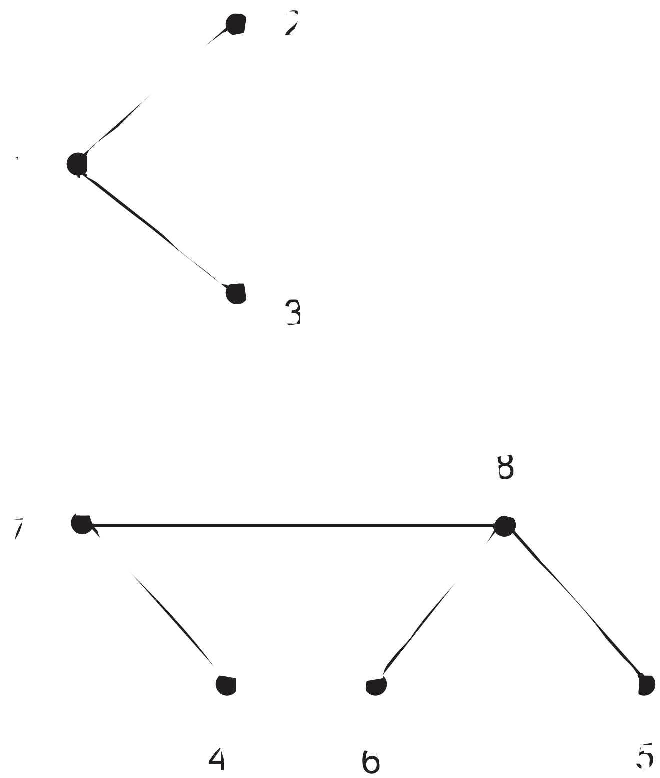
Példa: Fa kódja: (1177888)

(1) A fa szögpontjainak halmaza: {1,2,3,4,5,6,7,8}

(2) Élei:

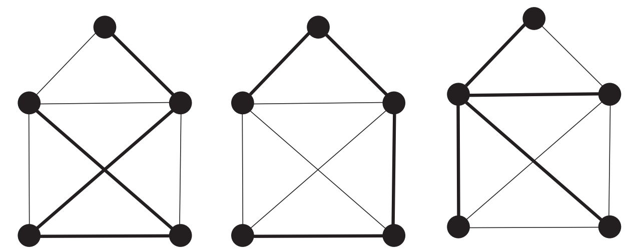
v	$\underline{1}$	1	7	7	8	8	8		
u	$\cancel{1}$	$\underline{2}$	3	4	5	6	$\cancel{7}$	$\cancel{8}$	e(1)={1,2}
v		$\underline{1}$	7	7	8	8	8		
u	$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	$\underline{3}$	4	5	6	$\cancel{7}$	$\cancel{8}$	e(2)={1,3}
v			$\underline{7}$	7	8	8	8		
u	$\underline{1}$	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$	4	5	6	$\cancel{7}$	$\cancel{8}$	e(3)={7,1}
v				$\underline{7}$	8	8	8		
u	$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$	$\underline{4}$	5	6	$\cancel{7}$	$\cancel{8}$	e(4)={7,4}
v					$\underline{8}$	8	8		
u	$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$	$\cancel{4}$	$\underline{5}$	6	7	$\cancel{8}$	e(5)={8,5}
v						$\underline{8}$	8		
u	$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$	$\cancel{4}$	$\cancel{5}$	$\underline{6}$	7	$\cancel{8}$	e(6)={8,6}
v							$\underline{8}$		
u	$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$	$\cancel{4}$	$\cancel{5}$	$\cancel{6}$	$\underline{7}$	$\cancel{8}$	e(7)={8,7}

A fa kódja: (1177888)



4. Feszítőfák

Egy gráf ***feszítőfája (feszítőerdője),*** olyan fa (erdő) részgráf, amely a gráf összes csúcsát tartalmazza.



G néhány feszítőfája

Algoritmus n szögpontú összefüggő gráf feszítőfájának meghatározására:

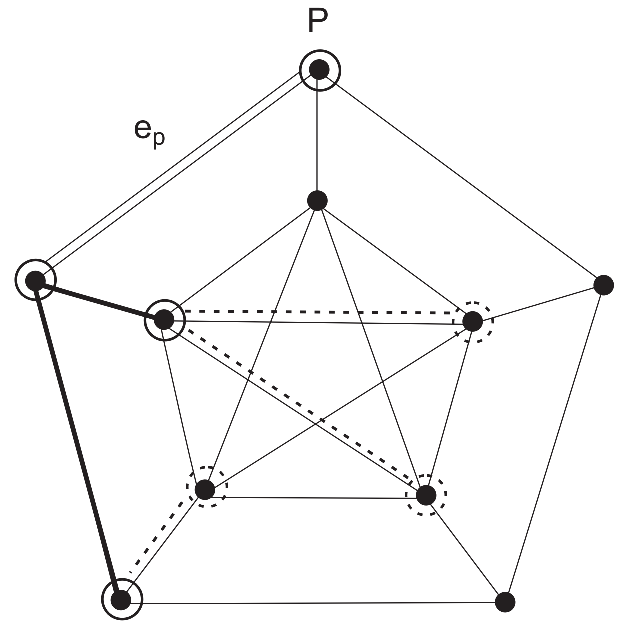
1. Válasszunk egy tetszőleges G_n-beli csúcsot. Legyen ez a készítendő F gráf egy csúcsa.

2. Ha az összes csúcsot beválasztottuk az F gráfba, akkor kész.

3. Egyébként pedig bővítsük az F-et egy olyan G_n-beli P csúcscsal és egy rá illeszkedő e_p éllel, amelyekre fennáll, hogy
   - a P csúcs nem szerepel F-ben
   - az él P-t valamelyik F-beli csúccsal összeköti G_n-ben.

4. Folytassuk az algoritmust a 2. pontban.

Tétel: Az algoritmus minden összefüggő gráf esetén végrehajtható, eredménye a gráf egy feszítőfája.



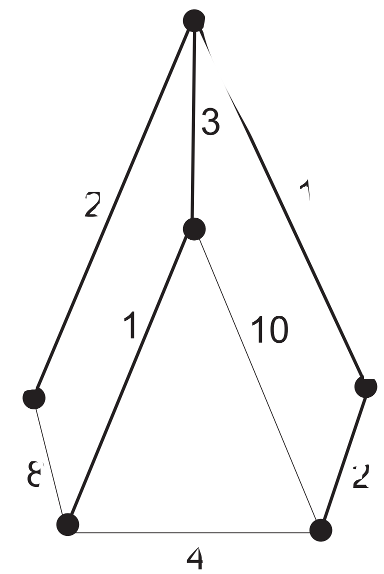
A G gráf feszítőfájának építésekor
F-et P-vel és e_p -vel bővítjük.

Következmény: Minden n szögpontú összefüggő gráfnak *van feszítőfája.*
Minden n szögpontú k komponensű gráfnak *van feszítőerdője,* melynek *élszáma: n-k.*

Cayley tétele: Egy teljes n csúcsú gráfnak n^{n-2} *feszítőfája van.*
Bizonyítás: Meghatározandó a lehetséges Prüfer kódok száma.

Minimális súlyú feszítőfa építése összefüggő gráfban

Példa: n várost összekötő vasúti hálózatot szeretnénk kiépíteni.
Feltételeink: *bármely városból eljuthassunk bármely városba,*
valamint a vasúti hálózat kiépítése legyen a lehető *legolcsóbb.*
Adottnak tekintjük az egyes városokat összekötő közvetlen útvonal költségeit.



A gráf «legolcsóbb» feszítőfájának súlya 9

Gráfmodell: G gráf pontjai legyenek a városok, élei a lehetséges közvetlen útvonalak két város között.
Az egyes élek «súlyai» a megfelelő kiépítendő utak költségei.
A gráf súlya: az élek súlyának összege.
Feladat: A legkisebb súlyú feszítőfa meghatározása.

Mohó algoritmus: A már ismert feszítőfa kereső algoritmust mindössze annyival módosítjuk, hogy a 3. pontot kielégítő tulajdonságú csúcsok ill.az illeszkedő élei közül azzal bővítjük a fát, amely a lehető «legolcsóbb», azaz melyre az él súlya a legkisebb.

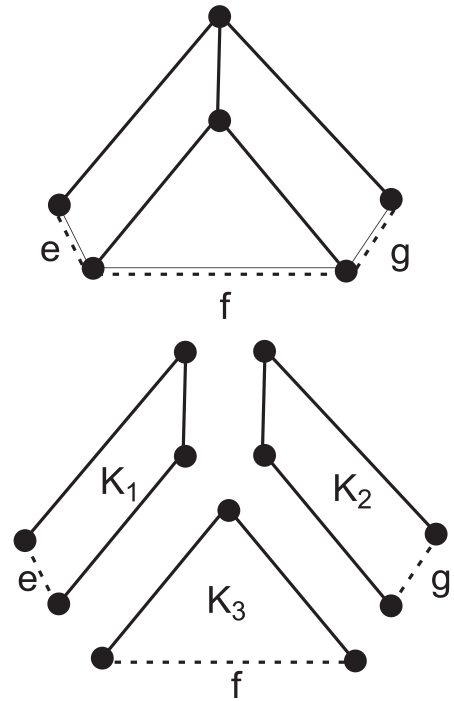
Bizonyítás: Teljes indulcióval igazolható, hogy a kapott feszítőfa a legolcsóbb.

G *L* feszítőerdőjére vonatkozó kötőélei, fundamentális körrendszere

Egy G gráfnak legyen legyen L egy feszítőerdője. G-nek L-be nem tartozó éleit a ***G L-re vonatkozó kötőélei***nek nevezzük.

Tétel: Ha L G-nek egy feszítőerdője és az e él G-nek L-re vonatkozó kötőéle, akkor G-nek pontosan egy olyan köre van, amely az e élt tartalmazza, de G más , L-re vonatkozó kötőélét nem.

Tekintsük G-nek azon köreit, melyekhez G L-re vonatkozó kötőélei közül pontosan egy tartozik.
Ezen körök halmazáról azt mondjuk, hogy ***G-nek L-re vonatkozó fundamentális körrendszere.***



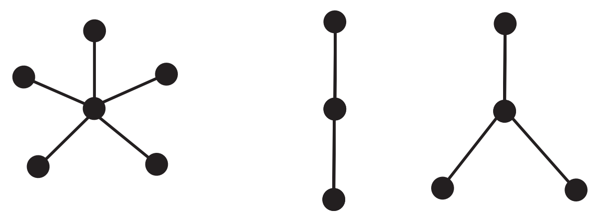
Kötőélek: e, f, g; fundamentális körrendszer: K_1, K_2, K_3

Gráf rangja, nullitása

n szögpontú k komponensű é élszámú gráfra

G_n rangja: G_n tetszőleges feszítőerdőjének élszáma: $\varsigma(G)$ = n-k.

G_n nullitása: G_n tetszőleges fundamentális körrendszerének elemszáma: $\mu(G)$ = é-n+k.

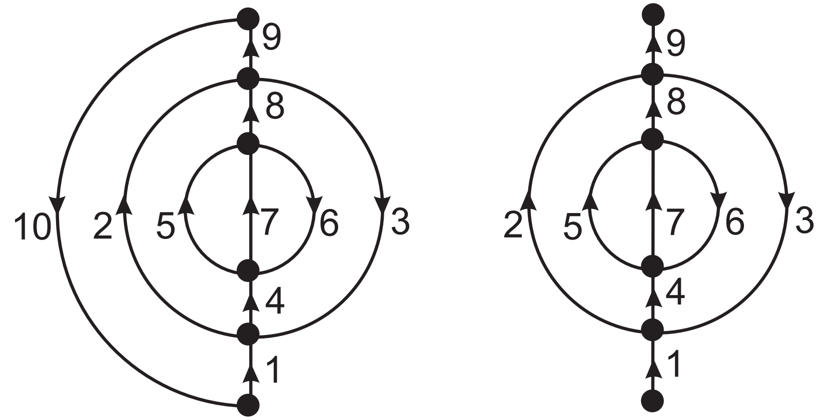

$\mu(G)=0$ pontosan akkor, ha G erdő

5. Euler-bejárás

Euler-bejárás (séta): G gráfban olyan élsorozat, amely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza.

Nyitott az Euler-bejárás, ha az élsorozat nyitott, *zárt,* ha az élsorozat zárt.

Ha egy gráfnak van zárt Euler bejárása, akkor ***Euler gráfnak*** nevezzük.

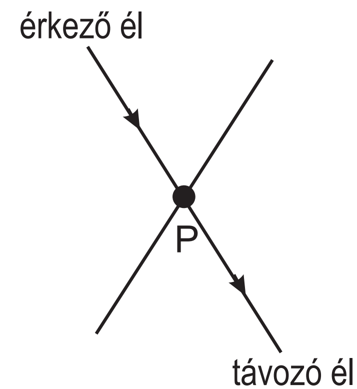


Ha egy Euler gráf valamely élét elhagyjuk, a keletkezett gráfban van nyitott Euler-bejárás.

5.1 Euler tétele:

Egy izolált pontot nem tartalmazó G gráf pontosan akkor Euler gráf, ha G összefüggő és minden csúcs foka páros.

Euler tételének bizonyítása:



$\Rightarrow$ Tekintsük G egy Euler bejárásának valamely P pontját. Valahányszor P-n áthaladunk 2 csatlakozó élt használunk fel, melyek pontosan egyszer szerepelnek a bejárásban. A bejárás kezdőpontja (= végpontja) esetében kell lennie «induló» ill. «érkező élnek». Az összefüggőség az élsorozat definíciójából következik.

$\Leftarrow$ Az alábbiakban bemutatunk egy algoritmust, melyről belátható, hogy az Euler-tétel feltételeit kielégítő gráf esetében mindig végrehajtható, eredménye zárt Euler bejárás.

5.2 Euler bejárást előállító algoritmus Euler-gráf esetében

1. Induljunk el a gráf egy tetszőleges *a* pontjából.

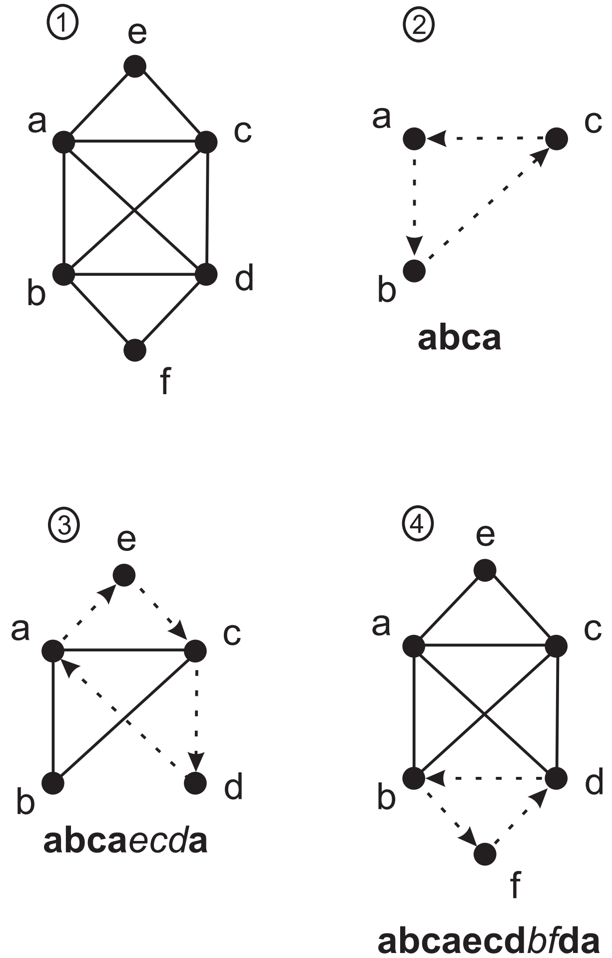
2. Készítsünk élsorozatot (bejárást) úgy, hogy egy élt legfeljebb egyszer választunk. Folytassuk, amíg visszajutunk az eredeti a ponthoz.

3. Ha minden él szerepel a bejárásban, akkor kész.

4. A kapott bejáráson keressünk olyan *p* pontot, amelyikre még illeszkedik szabad él.
   Járjuk körbe az előbb kapott bejárást a kezdőponttal, majd p-be érkezve bővítsük a bejárást egy, *p*-ből induló és *p*-be érkező körrel, melynek élei G még fel nem használt éleiből valók.

5. Folytassuk az algoritmust a 3. pontban.

Megjegyzés: A bemutatott algoritmus minden lépésben a bejárást egy körrel bővíti.



Euler bejárás: abcaecdbfda

Tétel: Az algoritmus, amennyiben a G gráf kielégíti az Euler-tétel feltételeit végrehajtható és eredménye a G gráf egy zárt Euler bejárása.

1. Induljunk el a gráf egy tetszőleges *a* pontjából.

2. Készítsünk élsorozatot(bejárást) úgy, hogy egy élt legfeljebb egyszer választunk. Folytassuk, amíg visszajutunk az eredeti a ponthoz.	$\Longleftrightarrow$	A pontok foka páros, elakadni csak *a*-ban lehet. (Kört kapunk.)
3. Ha minden él szerepel a bejárásban, akkor kész.	$\Longleftrightarrow$	Az élek száma véges, kétszer ugyanazt az élt nem használjuk fel. Következésképpen az algoritmus véges sok lépésben befejeződik. Az eredmény G egy zárt Euler-bejárása.
4. A kapott bejáráson keressünk olyan *p* pontot, amelyikre még illeszkedik szabad él.	$\Longleftrightarrow$	A gráf összefüggő, tehát ilyen *p* létezik.
Járjuk körbe az előbb kapott bejárást *a* kezdőponttal, majd p-be érkezve bővítsük a bejárást egy *p*-ből induló és *p*-be érkező körrel, melynek élei G még fel nem használt éleiből valók.	$\Longleftrightarrow$	G-ből kivéve a felhasznált éleket a maradékgráf pontjai vagy izolált pontok vagy páros fokúak: elakadás tehát csak *p*-ben lehetséges.

5. Folytassuk az algoritmust a 3. pontban.

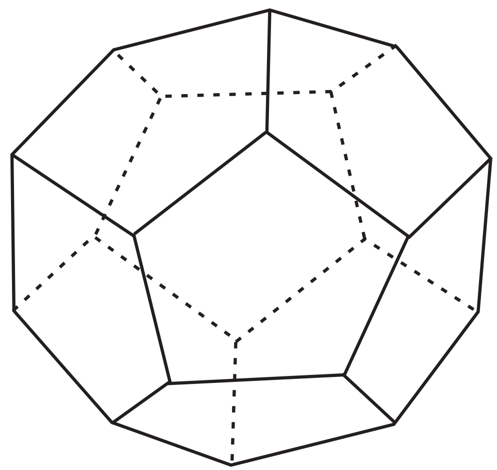
6. Hamilton kör, Hamilton út

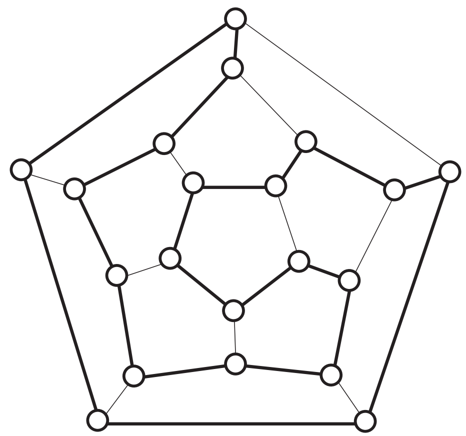
Dodekaéder-játék *(Hamilton ír matematikus, 1860):*

Egy dodekaéder (12 szabályos ötszög határolta szabályos test) csúcsainak helyén lyukak vannak. Helyezzünk el 20 dugót a lyukakba az alábbi játékszabály szerint:

1. Az első dugót bárhova elhelyezhetjük.
2. Ezután minden dugót az utoljára elhelyezett dugóval szomszédos (éllel összekapcsolt), még be nem töltött lyuk valamelyikébe illesztjük.

Gráfmodell és megoldás:





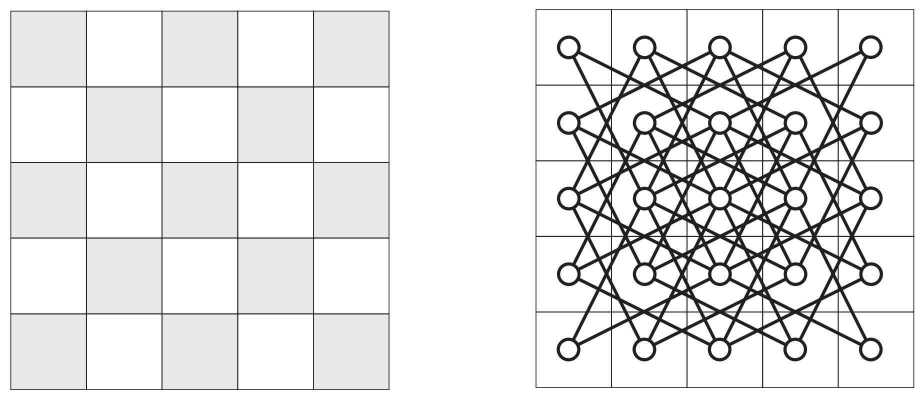
A gráfban bejelölt körön haladva tetszőleges pontból indulva kapunk egy megoldást.

G gráf Hamilton köre/útja: olyan kör/út a gráfban, amely a gráf minden pontját tartalmazza.

6.2 Van-e minden összefüggő gráfhoz Hamilton kör?

Példa: Bejárhatunk-e egy nxn-es sakktáblát lóugrásokkal egyetlen lóval úgy, hogy a ló minden mezőre pontosan egyszer ugrik és a végén visszaugrik kiindulási helyére? Tegyük fel, hogy n tetszőleges 3-nál nagyobb páratlan szám.

Gráfmodell: Feleljenek meg G pontjai a tábla egy-egy mezőjének, élei pedig legyenek a lóugrásnyira fekvő mezőpároknak megfeleltetett pontpárok. Van-e a G-ben Hamilton kör?



Megfeleltetés 5x5-as sakktábla esetén.

Megoldás: A lóugrás szabálya értelmében minden lépésnél ellenkező színre ugrunk. Megoldás tehát akkor lehetséges, ha a gráf pontjainak száma páros. Ez az n-re vonatkozó feltételnek ellentmond.

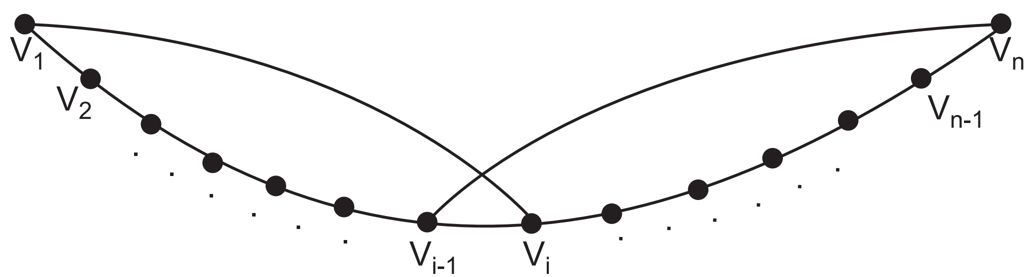
"Ha egy G gráfnak «elég sok» éle van, akkor van Hamilton köre/útja…."

Hamilton kör/út létezésének szükséges és elégséges feltétele a gráfelmélet egy *megoldatlan* problémája.
Tételek egész sora ad meg különféle *elégséges feltételeket* Hamilton kör/út létezésére vonatkozóan.
(G. A. Dirac, Erdős P., Pósa L., Rédei L.…).
Egyet ismertetünk közülük.

Tétel (Ore, 1960): G egyszerű n ($n \geq 3$) pontú gráfnak van Hamilton köre, ha bármely *v,w* nem szomszédos pontpárra igaz, hogy $\varphi(v)+\varphi(w) \geq n$.

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy G-ben nincs Hamilton kör.
Bővítsük G gráfot élek hozzáadásával addig, míg a keletkezett *H gráfban már van Hamilton út,* de *nincs Hamilton kör.* Belátjuk, hogy ez lehetetlen.

H Hamilton útja legyen $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ldots. \rightarrow v_n$.
H v_1 és v_n pontjai nem szomszédosak H-ban érvényes rájuk, hogy fokszámuk összege meghaladja n-et.
H-ban tehát van két szomszédos pont v_{i-1} és v_i, amelyek egyike v_1-gyel, másika pedig v_n-nel szomszédos.



Ekkor H-ban van Hamilton-kör: $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ldots. v_{i-1} \rightarrow v_n \rightarrow v_{n-1} \rightarrow \ldots. v_i \rightarrow v_1$. Ez ellentmond a feltételeknek.