Iterációnkénti simítással kombinált vékonyítás 3D bináris képeken*

Kardos Péter, Németh Gábor, Palágyi Kálmán

Szegedi Tudományegyetem, Képfeldolgozás és Számítógépes Grafika Tanszék
{pkardos,gnemeth,palagyi}@inf.u-szeged.hu

Absztrakt. Cikkünkben egy új vékonyító sémát mutatunk be a 3D vékonyító algoritmusok zajérzékenységének csökkentésére. Módszerünk iterációnként történő, topológia–megőrző simításon alapul, amely eltávolítja az extremitásnak tekintett határpontokat. Algoritmusunk hatékonyan implementálható, és az objektumok túlzsugorítása nélkül csökkenti a nemkívánatos vázszegmensek számát.

1. Bevezetés

A váz egy széles körben elterjedt régió-alapú alakjellemző, mely fontos szerepet játszik a képfeldolgozás, az alakfelismerés és a vizualizáció számos alkalmazásában [1–6]. Különösképpen nagyméretű 3D objektumokra fontos a gyors vázkijelölő eljárások kidolgozása. A vázkijelölő módszerek legnagyobb problémája az, hogy az általuk meghatározott vázközelítések számos hamis ágat vagy felszínszegmenst tartalmaznak. Ez korrigálható egy utófeldolgozó lépésben, az ún. váztisztítással [7]. A váztisztító eljárások bizonyos fontossági mértékek alapján határozzák meg a nemkívánatos és eltávolításra ítélt vázszegmenseket. Ezen módszerek fő hátránya az, hogy a redukció során a nemkívánatos vázszegmensek növekedése torzítja a váz "értékes" részeit is, mely torzulásokat megőrzi a tisztító utófeldolgozás.

A vékonyító algoritmusok [8] bizonyos lokális feltételek segítségével topológia–megőrző módon határoznak meg vázszerű alakjellemzőket [9]. 3D-ben a vonal-végpontok megőrzésével a redukció *középvonal*akat generál, míg a felszín-végpontokat megőrző vékonyító eljárások az objektumok *középfelszín*ét eredményezik.

A topológia–megőrzés miatt minden végpontnak kapcsolódnia kell az adott objektum középfelszínéhez ill. középvonalához. Így a nemkívánatos vázszegmensek száma jelentősen csökkenthető, ha az iteratív redukció során nem őrizzük

* A jelen cikkben közölt topológia-megőrző 3D kontúrsimító algoritmus első, csak egyelemű kiugrások eltávolítására szolgáló változatát a CompImage'10 konferencia kiadványában közöltük (*G. Németh, P. Kardos, K. Palágyi: Topology preserving parallel smoothing for 3D binary images, CompImage 2010, LNCS 6026, pp. 287-298.*). Munkánk minősége és újszerűsége miatt meghívást kaptunk a rangos Graphical Models (Elsevier) folyóiratnak a CompImage'10 konferenciának szentelt különszámába is. Ez a cikk a különszámba benyújtott (bírálat alatt álló) kézirat magyar fordítása.

meg a "felesleges" végpontokat. Cikkünkben egy új vékonyító sémát mutatunk be, amely iterációnkénti kontúrsimítást alkalmaz.

Görbék ill. felszínek simítására számos stratégia létezik [11–14]. Sajnos közülük csak Couprie és Bertrand módszere alkalmas 3D voxel-es bináris képek simítására, viszont az eljárás összetettsége miatt nem kombinálható a 3D vékonyító algoritmusokkal, ezért jelen cikkben tárgyalt kutatásunknak az volt a célja, hogy kifejlesszünk egy olyan párhuzamos 3D simító algoritmust, amely megőrzi a képek topológiáját, és könnyen beépíthető vékonyító algoritmusokba is. Első eredményként [15]-ben bemutattunk egy olyan kontúrsimító algoritmust, amely eltávolítja az extremitásnak tekintett határpontokat. Mivel az algoritmus két topológia–megőrző párhuzamos redukciós operátorból áll, így maga az eljárás is topológia–megőrző.

Cikkünkben bemutatjuk ezen kontúrsimító algoritmus olyan továbbfejlesztett változatát, amely bizonyos 1–pontos kiugrások mellett számos 2 pontból álló kontúrzajt is képes eltávolítani. A törölhető pontokat (azaz a kétmenetes eljárás során egyszerre törlésre kerülő pontokat) $3 \times 3 \times 3$–as törlőmaszkokkal adjuk meg.

A cikk felépítése a következő. A 2. fejezet összefoglalja a 3D digitális topológia alapfogalmait. A 3. fejezetben bemutatjuk új simító algoritmusunkat, majd a 4. fejezetben az iterációnkénti simításon alapuló, új vékonyító sémánkat tárgyaljuk, amellyel csökkenthető a 3D vékonyító algoritmusok zajérzékenysége. Módszerünk alkalmazhatóságának alátámasztására néhány teszteredményt is közlünk. Algoritmusunknak egy hatékony implementációját ismertetjük az 5. fejezetben. Végül a 6. fejezetben bebizonyítjuk, hogy a bemutatott algoritmus topológia–megőrző.

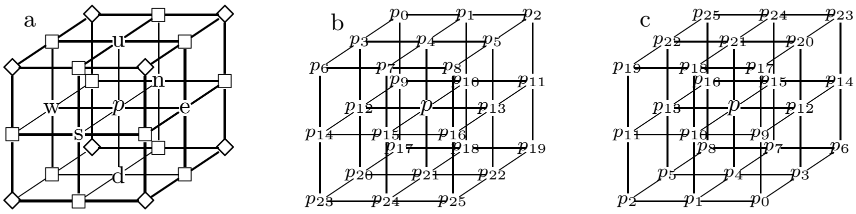
2. Fogalmak, jelölések

Cikkünkben a digitális topológia alapfogalmainak megadásakor Kong és Rosenfeld összefoglaló művét [9] vettük alapul.

Legyen p a $\mathbb{Z}^3$-vel jelölt 3D digitális térnek egy pontja. Jelöljük $N_j(p)$-vel ($j \in \{6, 18, 26\}$) azon pontok halmazát amelyek j-*szomszédos*ak p-vel (lásd 1a. ábra).

Egy nemüres $X \subseteq \mathbb{Z}^3$ ponthalmaz különböző pontokból álló $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ sorozatát az X halmazon belüli x_0 pontból x_n-be vezető n hosszú *j-útnak* nevezzük ($j \in \{6, 18, 26\}$), ha x_i j-szomszédos x_{i-1}-gyel ($i = 1, \cdots, n$) (ld. 1a. ábra). Vegyük észre, hogy az egyetlen pontból álló sorozat egy 0 hosszúságú j-út. Két pontot *j–összefüggőnek* nevezünk az X halmazon belül, ha X-ben létezik j-út közöttük. Az X halmaznak a j–összefüggőségi reláció (mint ekvivalenciareláció) által meghatározott ekvivalenciaosztályait *j–komponenseknek* nevezzük.

A $\mathcal{P}$ *3D bináris* $(26, 6)$ *digitális kép*en egy $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ négyest értünk [9]. $\mathbb{Z}^3$ minden elemét $\mathcal{P}$ egy-egy *pont*jának nevezzük. A $B \subseteq \mathbb{Z}^3$–beli pontok a *fekete pontok*, melyek értéke 1, míg a $\mathbb{Z}^3 \backslash B$–beli elemek a *fehér pontok*, melyekhez a 0 értéket rendeljük. A fekete pontokra a 26-, a fehérekre pedig a 6-összefüggőséget feltételezzük. A B–beli pontok által alkotott maximális 26-összefüggő halmaz egy *fekete komponens*t, a $\mathbb{Z}^3 \backslash B$–beli pontoknak egy maximális



1. ábra: A $\mathbb{Z}^3$ digitális tér szomszédsági relációi (a). Az $N_6(p)$ halmaz a központi p pontot, valamint az U=$u(p)$, N=$n(p)$, E=$e(p)$, S=$s(p)$, W=$w(p)$, és D=$d(p)$ jelölésű pontokat tartalmazza. A $N_{18}(p)$ halmaz $N_6(p)$ elemeit valamint a "□" jelöléssel ellátott pontokat foglalja magába. A $N_{26}(p)$ halmaz $N_{18}(p)$ elemeit továbbá a "◇" szimbólummal jelölt pontokat tartalmazza.
A javasolt módszer első (b) ill. második (c) párhuzamos redukciós operátoránál alkalmazott indexelési sémák.

6-összefüggő halmaza pedig egy *fehér komponenst* alkot. Egy fekete pont *határpont* egy $(26, 6)$-képen, ha az legalább egy fehér ponttal 6-szomszédos.

Egy *redukciós operátor* egy bináris képet úgy alakít át, hogy azon csak bizonyos fekete pontokat változtat fehérré, azaz csak 1-eseket töröl. Egy *párhuzamos redukciós operátor* a feltételeinek megfelelő pontokat egyszerre törli. Egy 3D redukciós operátor *nem őrzi meg a topológiát* [16], ha egy fekete komponenst több részre vág vagy teljesen töröl, egy fehér komponenst összeolvaszt egy másik fehér komponenssel, egy új fehér komponenst hoz létre, vagy megszüntet/létrehoz egy lyukat.

3. Az új simító algoritmus

Ebben a fejezetben bemutatjuk 3D bináris képek simítására adott párhuzamos algoritmusunkat.

A javasolt algoritmus két párhuzamos redukciós operátorból áll, melyeket R_1-gyel és R_2-vel jelölünk. Az általuk törölhető pontokat $3\times3\times3$–as törlőmaszkokkal adjuk meg. R_1 által törölhető egy pont, ha az a 2-6. ábrákon szereplő 37 maszkot tartalmazó

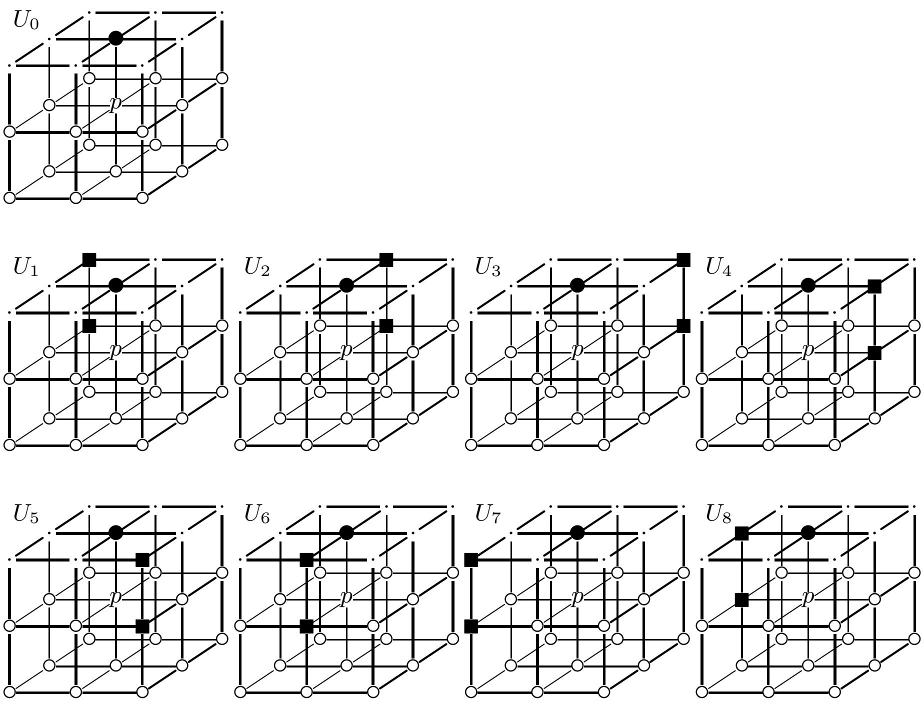
$$\mathcal{T}_{R_1} = \{U_0, \ldots, U_8, N_0, \ldots, N_8, W_0, \ldots, W_8, UN, \ldots, NE, UNW, \ldots, USW\}$$

halmaznak legalább az egyik elemére illeszkedik. Az említett ábrákon a következő jelöléseket alkalmazzuk: minden "p", "●", vagy "■" egy-egy fekete pontot jelöl; minden "○" egy-egy fehér pontot jelöl; a "·" jelölésű, ún. "don't care" pontok színe fekete ill. fehér is lehet.

Az R_2 operátor 2-6. ábrákon szereplő maszkok p-re való tükrözöttjeit veszi figyelembe egy pont törölhetőségének megállapításakor. Figyeljük meg, hogy az R_1 által alkalmazott maszkokon a "●" jelölésű maszkbeli pozíciók egybeesnek a 1b. ábrán $p_0, p_1, \ldots, p_{12}$-vel jelölt 13 ponttal. Hasonlóképpen, az R_2 által alkalmazott maszkokon feltüntetett "●" jelölésű pozíciók a $p_{13}, p_{14}, \ldots, p_{25}$ pontokkal esnek egybe.

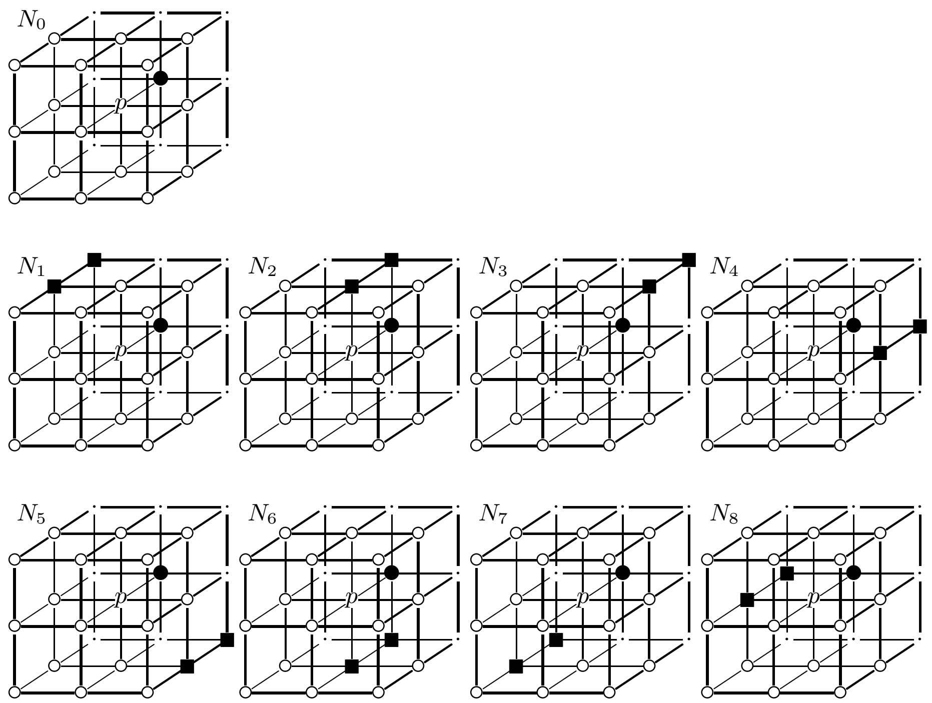
Algoritmusunkat az alábbi program mutatja be:

Input: egy $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, X)$ kép
Output: egy $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, Y)$ kép
begin
  $Y \ = \ X$;
  `// 1. fázis`
    $Y \ = \ Y \setminus \{ \ p \mid p$ törölhető R_1 által a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, Y)$ képen ;$\}$
  `// 2. fázis`
    $Y \ = \ Y \setminus \{ \ p \mid p$ törölhető R_2 által a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, Y)$ képen ;$\}$
end



2. ábra: Az U laphoz rendelt U_i $(i = 0, 1, \ldots, 8)$ törlőmaszkok.

Fontos kihangsúlyozni, hogy mivel az algoritmusban alkalmazott R_1 és R_2 párhuzamos redukciók, így azok egyidejűleg törlik a lokális feltételt kielégítő pontokat. Az első kétmenetes simító algoritmusunk [15] által törölhető pontokat



3. ábra: Az N laphoz rendelt N_i $(i = 0, 1, \ldots, 8)$ törlőmaszkok.

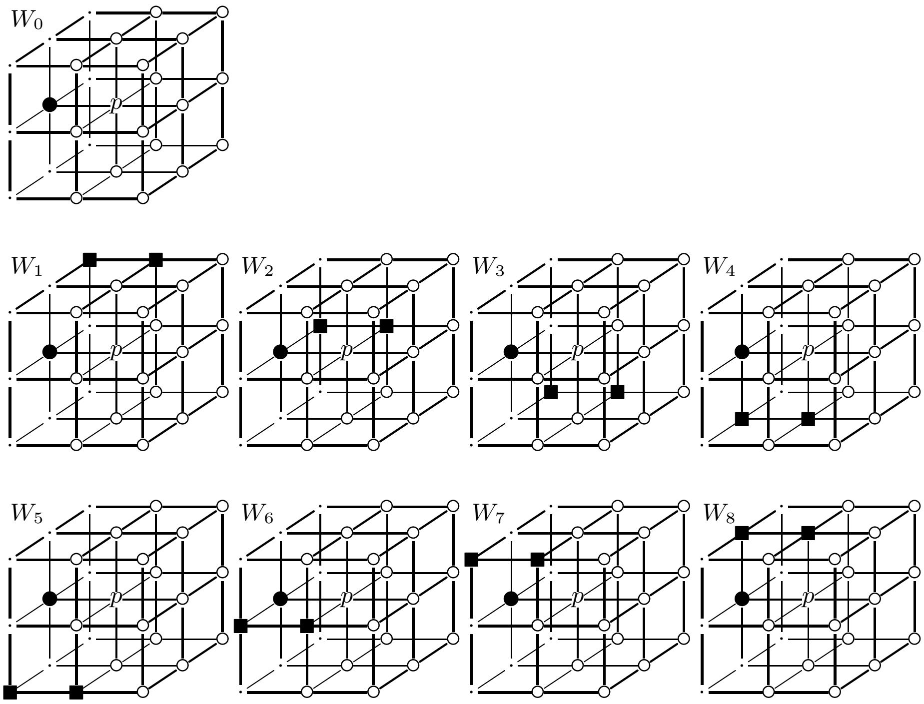
13–13 törlőmaszkkal definiáltuk. Az első menethez tartozó törlőmaszkok halmaza:

$$\{\ U_0, N_0, W_0,\ UN, UE, US, UW, NW, NE,\ UNW, UNE, USE, USW\ \}$$

(lásd 2-6. ábrák). Mivel a $\mathcal{T}_{R_1}$ halmaz 24 további törlőmaszkot $(U_1, \ldots, U_8$, $N_1, \ldots, N_8$, $W_1, \ldots, W_8)$ is tartalmaz, az új algoritmus sokkal több kiugró határpontot töröl. A 7-9. ábrák alapján összehasonlítható a javasolt algoritmusunk az első kísérletünkkel [15]. A zárójelekben szereplő értékek az objektumpontok számát jelzik. Látható, hogy mindkét simító algoritmus korrektül működik, hiszen azok nem módosítják az eredeti képen levő sima határszegmenseket (lásd 9. ábra).

4. Az új vékonyító séma

Az előbb bemutatott simító algoritmusunkat 3D párhuzamos vékonyító algoritmusok zajérzékenységének mérsékeléséhez alkalmazzuk. Tekintsünk egy tetszőleges $\mathcal{T}$ vékonyító algoritmust. Az iterációnkénti simítással kombinált vékonyító sémát az alábbi program vázolja fel:

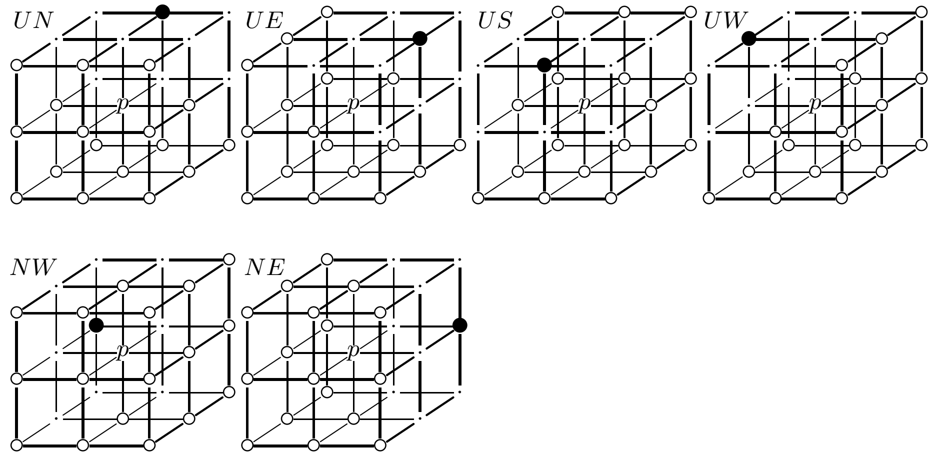


4. ábra: A W laphoz rendelt W_i $(i = 0, 1, \ldots, 8)$ törlőmaszkok.

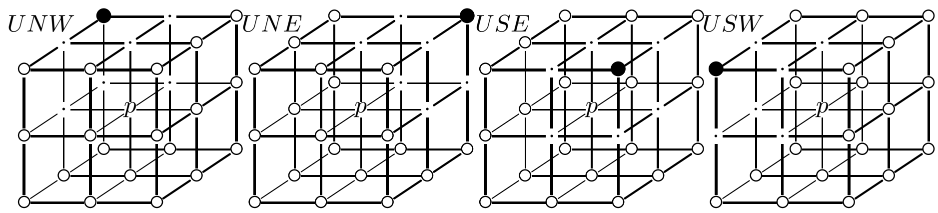
Input: a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, X)$ kép
Output: a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, Y)$ kép

begin
  $Y = X$;
  repeat
    `// kétfázisú simítás`
      $Y = Y \setminus \{ \, p \mid p$ törölhető R_1 által a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, Y)$ képen $\}$;
      $Y = Y \setminus \{ \, p \mid p$ törölhető R_2 által a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, Y)$ képen $\}$;
    `// a vékonyítás egy iterációs lépése`
      $D = \{ \, p \mid p$ törölhető $\mathcal{T}$ által a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, Y)$ képen $\}$;
      $Y = Y \setminus D$;
  until $D = \emptyset$;
end

A javasolt vékonyító sémát különböző képeken teszteltük, a 10-15. ábrákon hatféle 3D párhuzamos vékonyító algoritmussal kapott eredmények láthatóak. A zárójeleken belül feltüntetett értékek az objektumpontok számát jelölik.



5. ábra: Az első hat élhez rendelt törlőmaszkok.



6. ábra: Az első négy csúcshoz rendelt törlőmaszk.

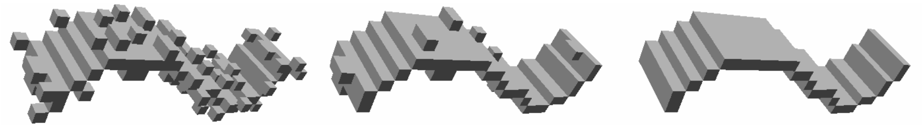
A javasolt simító algoritmus módosított változata középvonalra vékonyító algoritmusokkal együtt használatos. Emiatt a $\mathcal{T}_{R_1}$–beli

$$U_0, N_0, W_0,\ UN, UE, US, UW, NW, NE,\ UNW, UNE, USE, USW$$

maszkok (lásd 2-6. ábrák) 1–pont vékony középvonalat állítanak elő. Ez a probléma könnyen kezelhető a fenti 13 maszk alábbi módosításával: legalább egy "·" jelölésű elemnek egybe kell esnie egy fekete ponttal.

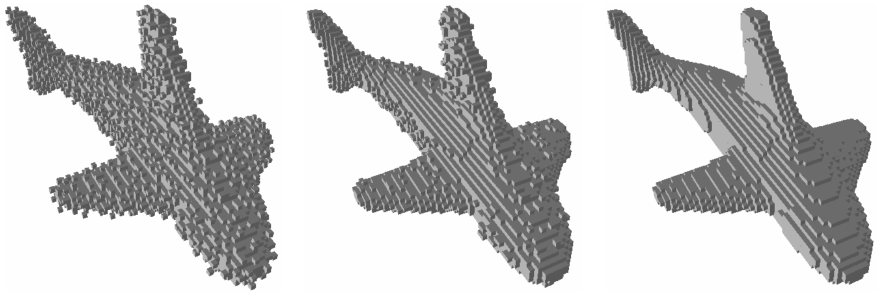
5. Implementáció

Ha az R_1 és R_2 operátorok 37-37 törlőmaszkját tekintjük, azt gondolhatjuk, hogy a javasolt algoritmus meglehetősen időigényes és nehezen implementálható szekvenciális számítógépeken. Ezért felvázolunk egy hatékony és általános implementációs módszert, amely különböző redukciós operátorokra (azaz párhuzamos vékonyító algoritmusokra) is alkalmazható [18, 19].



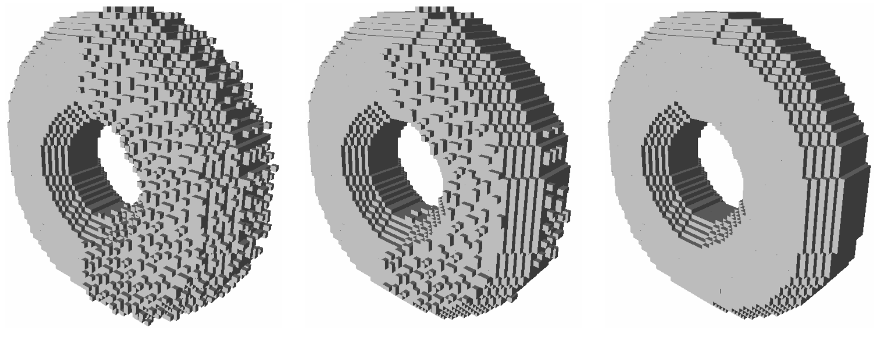
(237) (188) (162)

7. ábra: Egy 20 × 30 × 10–es szalag zajjal terhelt 3D képe (balra), az első algoritmusunkkal előállított simított kép [15] (középen) és a továbbfejlesztett algoritmus eredménye (jobbra).



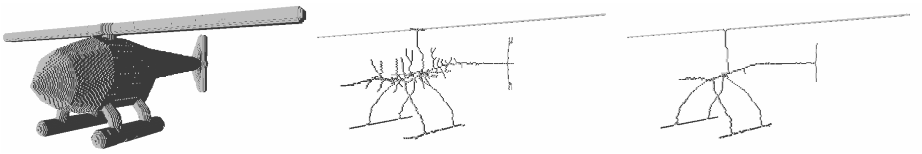
(21 967) (21 219) (20 632)

8. ábra: Egy 103 × 42 × 60–as cápa zajjal terhelt 3D képe (balra), az első algoritmusunkkal előállított simított kép [15] (középen) és a továbbfejlesztett algoritmus eredménye (jobbra).



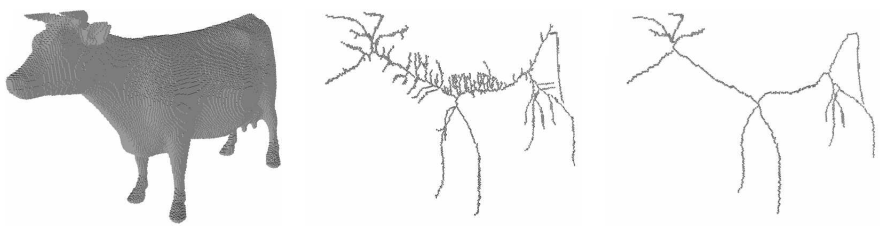
(40 929) (40 522) (40 024)

9. ábra: Egy 64 × 64 × 19–es tórusz zajjal terhelt 3D képe (balra), az első algoritmusunkkal előállított simított kép [15] (középen) és a továbbfejlesztett algoritmus eredménye (jobbra). Látható, hogy a sima határszegmenseket nem módosította a javasolt algoritmus.



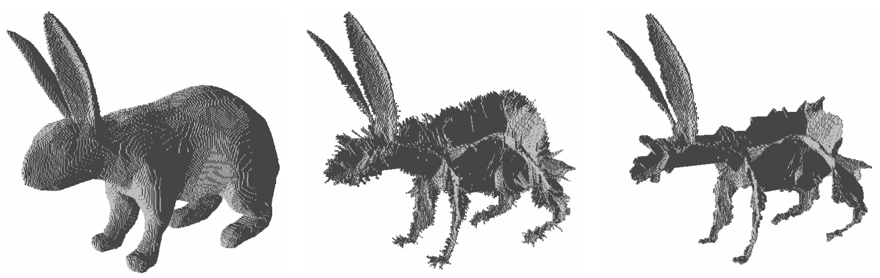
(378 043) (1 431) (903)

10. ábra: Egy 304 × 96 × 261–es helikopter (balra), a Palágyi és Kuba által javasolt 6-irányú irányszekvenciális vékonyító algoritmussal [20] előállított középvonala (középen), és az algoritmus simítással kombinált változatának eredménye (jobbra).



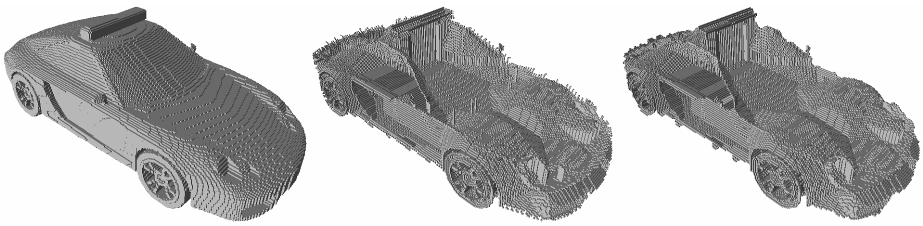
(1 096 613) (2 019) (992)

11. ábra: Egy 175 × 93 × 285–ös tehén (balra), a Bertrand és Aktouf által javasolt 8-irányú irányszekvenciális vékonyító algoritmussal [21] előállított középvonala (középen), és az algoritmus simítással kombinált változatának eredménye (jobbra).



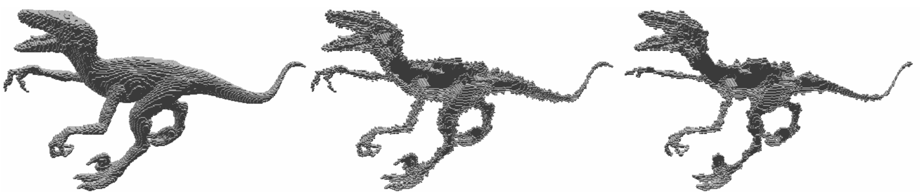
(1 932 738) (69 969) (49 753)

12. ábra: Egy 124 × 207 × 300–as nyúl (balra), a Gong és Bertrand által javasolt 6-irányú, felszínre vékonyító irányszekvenciális algoritmussal [22] előállított középfelszíne (középen) és az algoritmus simítással kombinált változatának eredménye (jobbra).



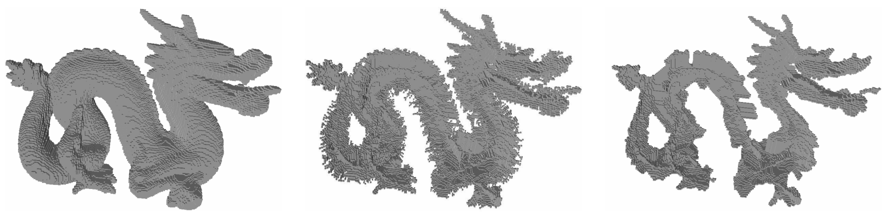
(1 362 863) (85 730) (81 199)

13. ábra: Egy 139 × 90 × 285–ös autó (balra), a Németh és társai által javasolt 2-almezős vékonyító algoritmussal [23] előállított középfelszíne (középen), és az algoritmus simítással kombinált változatának eredménye (jobbra).



(111 816) (19 186) (14 113)

14. ábra: Egy 59 × 285 × 139–es raptor (balra), a Manzanera és társai által javasolt teljesen párhuzamos vékonyító algoritmussal [24] előállított középfelszíne (középen), és az algoritmus simítással kombinált változatának eredménye (jobbra).



(423 059) (38 344) (26 594)

15. ábra: Egy 135 × 86 × 191–es sárkány (balra), a Németh és társai által javasolt 8-almezős vékonyító algoritmussal [25] előállított középfelszín (középen), és az algoritmus simítással kombinált változatának eredménye (jobbra).

A javasolt implementáció csak egy előzetesen előállított keresőtáblát használ a törölhető pontok kódolására. Mivel az operátorok $3 \times 3 \times 3$–as környezete 26 pontot tartalmaz a kérdéses középső p pont kivételével (lásd 2-6. ábrák), a keresőtábla 2^{26} db 1–bites bejegyzést tartalmaz. Nem nehéz belátni, hogy ez az adatszerkezet mindössze 8 MB-nyi tárolóhelyet igényel a memóriában.

Minden lehetséges $3 \times 3 \times 3$–as konfigurációhoz hozzárendelhető egy $[0, 2^{26})$–beli egész szám. Ezt az indexet a $\sum_{k=0}^{25} 2^k p_k$ képlettel határozhatjuk meg. Az R_1 operátor a 1b. ábrán feltüntetett indexelési sémát használja, míg R_2 esetében ezen séma tükrözött változtatát (lásd 1c. ábra) kell figyelembe venni. A keresőtáblánk bejegyzéseit az említett indexekkel címezzük.

Ezenkívül két lista használata javasolt az eljárás további gyorsítására. Az egyik lista az aktuális képen levő határpontok tárolására szolgál (az R_1 és R_2 operátorok csak határpontokat törölhetnek, ezért felesleges a teljes képet újra és újra pásztázni). A másik listában az aktuális menetben talált törölhető pontokat tároljuk.

Megjegyezzük, hogy a fent leírt módszer párhuzamos vékonyító algoritmusok hatékony implementációjára is alkalmazható [18, 19], így egyúttal az új vékonyító sémánkra is hatékony megvalósításhoz jutunk. Gyakorlati alkalmazhatóságát alátámasztják teszteredményeink, melyek alapján a simítással kombinált vékonyítás nagyméretű képeken is általában kevesebb, mint 1 másodperc alatt kivitelezhető.

6. A topológia–megőrzés bizonyítása

*Egyszerű pont*on egy olyan fekete pontot értünk, amelynek törlése topológia–megőrző redukció [9]. (26,6) képek egyszerű pontjaira adott kritériumok közül mi az alábbit használjuk fel:

1. tétel. [17] *Egy p fekete pont egyszerű a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ képen akkor, és csak akkor, ha az alábbi feltételek mindegyike teljesül:*

1. *A $(B \setminus \{p\}) \cap N_{26}(p)$ halmaz pontosan egy 26–komponenst tartalmaz.*
2. *A $(\mathbb{Z}^3 \setminus B) \cap N_6(p)$ halmaz nemüres.*
3. *Bármely két $(\mathbb{Z}^3 \setminus B) \cap N_6(p)$–beli pont 6–összefüggő a $(\mathbb{Z}^3 \setminus B) \cap N_{18}(p)$ halmazon belül.*

Az 1. tétel alapján az egyszerű pontok lokálisan jellemezhetők; a pontok $(26, 6)$–egyszerű volta $3 \times 3 \times 3$–as környezetük alapján egyértelműen eldönthető.

Mivel a párhuzamos redukciós operátorok nem csupán egyetlen pontot, hanem fekete pontoknak egy halmazát törlik, ezért szükséges azt is tisztázni, mit értünk topológia–megőrzés alatt több fekete pont egyszerre történő törlése esetén. A következő tétel a 3D párhuzamos redukciós operátorok topológia–megőrzésére ad *elegendő feltételeket*.

2. tétel. [10] *Legyen $\mathcal{O}$ egy párhuzamos redukciós operátor. Legyen p a $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ képnek egy olyan pontja, amely törölhető $\mathcal{O}$ által. Legyen $\mathcal{Q}$ az* *összes olyan lehetséges* $Q \subseteq (N_{18}(p)\backslash\{p\}) \cap B$*–beli halmaz családja, amelyeket* $\mathbb{Z}^3$*-nek egy* $2 \times 2 \times 1$*-es, vagy* $2 \times 1 \times 2$*-es, vagy egy* $1 \times 2 \times 2$*-es részhalmaza tartalmaz. Az* $\mathcal{O}$ *operátor* topológia–megőrző *ha az összes alábbi feltétel teljesül:*

1. *Bármely* $\mathcal{Q}$*–beli* Q *halmazra* p *egyszerű a* $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B\backslash Q)$ *képen.*
2. $\mathcal{O}$ *nem töröl teljesen* $2 \times 2 \times 2$*–es kocka által tartalmazott fekete komponenseket.*

Simító algoritmusunk topológiai korrektségének igazolásához elegendő belátnunk, hogy az R_1 és R_2 operátorok a 2. tétel mindkét feltételét kielégítik, mivel az algoritmus csupán ezen redukciók egymásutánjából tevődik össze. A két operátorra a bizonyítás teljesen hasonló módon történhet, ezért csak R_1 topológia–megőrzését látjuk be.

Csoportosítsuk $\mathcal{T}_{R_1}$ törlőmaszk-halmaz elemeit a következőképpen. A középső, "p"-vel jelölt, valamint a "●" és "■" jelölésű pontok a *fekete* pontok, "○" szimbólummal vannak feltüntetve a *fehér* pontok, továbbá a "·"-tal jelölt pontokat *lehetséges fekete* pontoknak nevezzük. A "p"-n kívüli fekete ill. lehetséges fekete pontok a *nemfehér* pontok. A fekete p pontot *törölhető*nek nevezzük, ha legalább a $\mathcal{T}_{R_1}$ halmaz egyik törlőmaszkjára illeszkedik, azaz törölhető R_1 által.

1. lemma. *Minden törölhető pont egyszerű.*

Bizonyítás. Azt kell igazolnunk, hogy a törölhető pontok az 1. tétel mindhárom feltételét kielégítik.

Ha alaposan szemügyre vesszük a $\mathcal{T}_{R_1}$-beli törlőmaszkokat, megállapíthatjuk, hogy bármely lehetséges fekete pont 26–szomszédos egy fekete ponttal, és bármely fekete pont 26–szomszédos egy másik fekete ponttal. Ebből következik, hogy bármely két lehetséges fekete pozíció között létezik 26–út, vagyis a törölhető pontokra teljesül az 1. tétel 1. feltétele.

Az említett maszkhalmaz tanulmányozása során a törlőmaszkokra még az alábbi összefüggések figyelhetők meg:

– Létezik egy fehér pont, amely 6–szomszédos a maszk (középső) p pontjával,
– Bármely p-vel 6–szomszédos lehetséges fekete vagy fehér ponthoz létezik egy vele 6–szomszédos, p-vel pedig 18–szomszédos pont, amely 6–szomszédos egy p-vel 6–szomszédos másik fehér ponttal.

Ezek alapján pedig adódik, hogy a törölhető pontok az 1. tétel 2. és 3. feltételeit is teljesítik. □

A következő lemma az előzőhöz hasonló módon látható be, ezért a bizonyítását nem részletezzük.

2. lemma. *Legyen* S *egy* p *törölhető pont "■" és "·" jelölésű 26–szomszédjainak halmaza.* p *egyszerű marad* S *tetszőleges részhalmazának törlése után.*

3. lemma. *Legyen* p *és* q *két olyan fekete pont a* $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ *képen, melyekre* $q \in N_{18}(p)$*. Ha* p *és* q *is törölhető, akkor* p *egyszerű a* $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B\backslash\{q\})$ *képen.*

Bizonyítás. Mivel p törölhető, az 1. lemma alapján egyszerű. Azt kell igazolnunk, hogy p egyszerű marad q törlése után is. Ha q egy lehetséges fekete pont, akkor ez a 2. lemma alapján teljesül. így elegendő csak azokkal a törölhető pontokkal foglalkoznunk, amelyek a "●" jelölésű pozíciókra esnek a U_i, N_i, W_i, UN, UE, US, UW, NW, and NE törlőmaszkokon ($i = 0, 1, \ldots, 8$, lásd 2-5. ábrák). A UNW, UNE, USE, and USW maszkokat nem kell vizsgálnunk, mivel ezeken a "●" szimbólummal jelölt elemek nem 18–szomszédosak a középső "p" pontokkal (lásd 6. ábra).

Ellenőriznünk kell tehát a szóba jöhető 33 törlőmaszkon minden lehetséges szituációt. A bizonyítás ezen részét a rendelkezésre álló hely szűke miatt csak vázlatosan közöljük.

- Ha p U_i ($i = 0, 1, \ldots, 8$) által törölhető, akkor a $q = u(p)$ pont az N_6 vagy W_4 maszkok valamelyikére illeszkedhet.
- Ha p az N_i ($i = 0, 1, \ldots, 8$) által törölhető, akkor a $q = n(p)$ pont az U_6, W_6, US, USE, or USW maszkok valamelyikére illeszkedhet.
- Ha p a W_i ($i = 0, 1, \ldots, 8$), által törölhető, akkor a $q = w(p)$ pont az U_4, N_4, UE, NE, UNE, or USE maszkok valamelyikére illeszkedhet.
- Ha p illeszkedik UN-re, akkor a $q = n(u(p))$ pont nem törölhető az R_1 által.
- Ha p-t az UE törli, akkor a $q = e(u(p))$ pont a W_i ($i = 0, 1, \ldots, 8$) vagy NW maszkok valamelyikére illeszkedhet.
- Ha p az US által törölhető, akkor a $q = s(u(p))$ pont az N_i ($i = 0, 1, \ldots, 8$), NW, NE maszkok valamelyikére illeszkedhet.
- Ha p az UW által törölhető, akkor a $q = w(u(p))$ pont csak az NE maszkra illeszkedhet.
- Ha p az NW által törölhető, akkor a $q = w(n(p))$ pont csak az UE vagy US maszkra illeszkedhet.
- Ha p az NE által törölhető, akkor a $q = e(n(p))$ pont a W_i ($i = 0, 1, \ldots, 8$) maszkok valamelyikére illeszkedhet.

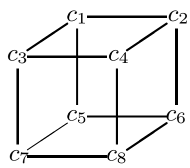
Valamennyi esetben könnyen megmutatható, hogy p egyszerű marad q törlése után. □

4. lemma. *Nem létezik olyan,* $2 \times 2 \times 2$*–es kocka által tartalmazott "kis" fekete* C *komponens, amelyet* R_1 *teljesen törölne.*

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg a 16. ábrán levő $2 \times 2 \times 2$–es kockát.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $c_1 \in C$, akkor c_1 nem törölhető R_1 által, és ha $c_k \in C$ ($k = 2, \ldots, 8$), akkor létezik egy $c_j \in C$ ($j = 1, \ldots, k-1$), amely nem törölhető R_1 által. Tehát C nem törölhető teljesen. □

Az előző összefüggések felhasználásával végül kimondhatjuk a fő tételünket, melynek bizonyításához bevezetünk két további definíciót. *Rácsnégyzeten* a Z^3-nek egy $1 \times 2 \times 2$-es vagy $2 \times 1 \times 2$-es vagy $2 \times 2 \times 1$-es részhalmazát értjük, továbbá valamely $p \in Z^3$-re $N_{18}(p)$ *középrétege* az $N_{18}(p)$ halmaznak egy $1 \times 3 \times 3$-as vagy $3 \times 1 \times 3$-as vagy $3 \times 3 \times 1$-es részhalmaza.



16. ábra: A fekete C komponenst tartalmazó $2 \times 2 \times 2$-es kocka.

3. tétel. *Az R_1 operátor topológia–megőrző a $(26, 6)$ képeken.*

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy a 2. tétel feltételei teljesülnek:

1. Vizsgáljuk a p törölhető pont egyszerűségét a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B \backslash Q)$ képen, amelyen a törölhető pontokból álló $Q \subseteq (N_{18}(p) \backslash \{p\}) \cap B$ halmaz egy rácsnégyzetre esik. Jelöljük $\#Q$-val Q elemeinek számát. Nyilvánvaló, hogy $\#Q \leq 3$. Ha $\#(Q) = 0$ ($Q = \emptyset$), akkor az 1. lemma alapján, ha pedig $\#(Q) = 1$ ($Q = \{q\}$), akkor a 2. lemma alapján teljesül a 2. tétel 1. feltétele, ezért csak a $\#(Q) \in \{2, 3\}$ eseteket vizsgáljuk részletesen. A bizonyítás gondolatmenete innen a következő:
   - Ha Q nemfehér elemei között csak "■" és/vagy "·" jelölésűek szerepelnek, akkor a 2. tétel 1. feltétele a 2. lemma alapján teljesül.
   - Tegyük fel, hogy Q tartalmaz "●" jelölésű pontot is. Minden olyan törlőmaszkon, ahol egy p-t tartalmazó rácsnégyzeten "●" mellett "■" szimbólummal ellátott pont is szerepel, a rácsnégyzet negyedik pontja is "■"-tel van jelölve. (Ezek éppen a páros indexű U_i, W_i, N_i maszkok.)
   - $N_{18}(p)$-nek egy középrétege nyilván 4 db rácsnégyzetet tartalmaz. Ha tekintjük a maszkhalmazunknak a páros indexű U_i, W_i, N_i maszkjait (amelyeken van 1-1 csupa fekete pontból álló rácsnégyzet), akkor nem található ezek között 4 olyan maszk, amelyekben a csak fekete pontot tartalmazó rácsnégyzetek páronként nem esnek egybe és ugyanazon középrétegen vannak. Ebből következik, hogy ha a tételünkben említett Q halmaz "●" mellett két "■" szimbólummal ellátott pontot is tartalmaz, akkor az egyik Q-beli pont biztosan nem törölhető (különben akkor lenne 4 olyan törlőmaszk, amely a fentebb említett feltételt kielégíti).
   - Ha Q-ban a "●"-rel jelölt pont nem törölhető, akkor a 2. lemmából adódik, hogy teljesül a 2. tétel 1. feltétele. Ezért csak azt az esetet kell a továbbiakban vizsgálni, amelyben valamelyik "■" jelölésű Q-beli pont nem törölhető. Ekkor ha az érintett maszkokon csak a "●"-t töröljük, úgy a 3. lemma szerint p egyszerű marad, azaz továbbra is egyetlen $N_{26}^*(p)$-beli fekete komponensünk van, és könnyen ellenőrizhető, hogy akármelyik "■" jelölésű pont marad meg, a másik "■" törlése után sem eshet szét ez a komponens p fehérre színezésekor. Szintén a 3. lemma szerint biztos, hogy ha a "●" törölhető a kérdéses maszkokon, akkor azokon

egyetlen $N_{26}^{*}(p)$-beli fehér komponens van, és ez nyilván egy "■"-tel jelölt pont törlése után is fennáll. Vagyis lyuk sem keletkezhet Q pontjainak törlésével. Így biztos, hogy p egyszerű marad a vizsgált esetben is.

2. A 2. tétel 2. feltétele a 4. lemma alapján teljesül.

□

7. Összefoglalás

Ebben a cikkben egy új kontúrsimító algoritmust ismertettünk, amellyel redukálható a 3D vékonyító algoritmusok zajérzékenysége, továbbá igazoltuk, hogy algoritmusunk topológia–megőrző. Bemutattunk egy ezen a simító algoritmuson alapuló új vékonyító sémát is, amelybe iterációnkénti simítást építettünk be. Felvázoltunk egy hatékony és általános implementációs módszert is, amely elősegíti eljárásunk gyors alkalmazhatóságát. Végül néhány példán keresztül illusztráltuk, hogy a javasolt vékonyító séma kevesebb nemkívánatos részletet tartalmazó vázakat generál.

Köszönetnyilvánítás

Ez a cikk nem jöhetett volna létre a Nemzeti Fejlesztési Ügynökség TÁMOP-4.2.2/08/1/2008-0008 programja nélkül.

Irodalom

1. B.R. Gomberg, P.K. Saha, H.K. Song, S.N. Hwang, F.W. Wehrli, Topological analysis of trabecular bone MR images, IEEE Transactions on Medical Imaging 19 (2000) 166–174.
2. T. Itoh, Y. Yamaguchi, K. Koyamada, Fast isosurface generation using the volume thinning algorithm, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics 7 (2001) 32–46.
3. K. Palágyi, J. Tschirren, E.A. Hoffman, M. Sonka, Quantitative analysis of pulmonary airway tree structures, Computers in Biology and Medicine 36 (2006) 974–996.
4. K. Siddiqi, S. Pizer (Eds.), Medial representations – Mathematics, algorithms and applications, Computational Imaging and Vision, Vol. 37, Springer, 2008.
5. H. Sundar, D. Silver, N. Gagvani, S. Dickinson, Skeleton based shape matching and retrieval, in: Proc. Int. Conf. Shape Modeling and Applications, IEEE, 2003, pp. 130–139.
6. M. Wan, Z. Liang, Q. Ke, L. Hong, I. Bitter, A. Kaufman, Automatic centerline extraction for virtual colonoscopy, IEEE Transactions on Medical Imaging 21 (2002) 1450–1460.
7. D. Shaked, A. Bruckstein, Pruning medial axes, Computer Vision Image Understanding 69 (1998) 156–169.
8. R.W. Hall, Parallel connectivity–preserving thinning algorithms, in: T.Y. Kong, A. Rosenfeld (Eds.), Topological algorithms for digital image processing, in: Machine Intelligence and Pattern Recognition vol. 19, Elsevier Science, 1996, pp. 145–179.

9. T.Y. Kong, A. Rosenfeld, Digital topology: Introduction and survey, Computer Vision, Graphics, and Image Processing 48 (1989) 357–393.
10. K. Palágyi, A. Kuba, A parallel 3D 12-subiteration thinning algorithm, Graphical Models and Image Processing 61 (1999) 199–221.
11. M. Couprie, G. Bertrand, Topology preserving alternating sequential filter for smoothing two-dimensional and three-dimensional objects, Journal of Electronic Imaging 13 (2004) 720–730.
12. J. Hu, D. Yu, H. Yan, A multiple point boundary smoothing algorithm. Pattern Recognition Letters 19 (1998) 657–668.
13. G. Taubin, Curve and surface smoothing without shrinkage, in: Proc. 5th Int. Conf. Computer Vision, ICCV'95 1995, pp. 852–857.
14. D. Yu, H. Yan, An efficient algorithm for smoothing, linearization and detection of structural feature points of binary image contours, Pattern Recognition 30 (1997) 57–69.
15. G. Németh, P. Kardos, K. Palágyi, Topology preserving parallel smoothing for 3D binary images, in: Proc. Int. Symposium of Computational Modeling of Objects Presented in Images: Fundamentals, Methods, and Applications, CompIMAGE'10, Lecture Notes in Computer Science vol. 6026, Springer, Heidelberg, 2010, pp. 287–298.
16. T.Y. Kong, On topology preservation in 2-d and 3-d thinning, Int. Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence 9 (1995) 813–844.
17. G. Malandain, G. Bertrand, Fast characterization of 3D simple points, in: Proc. 11th IEEE Internat. Conf. on Pattern Recognition, ICPR'92, 1992, 232–235.
18. K. Palágyi, A 3D fully parallel surface-thinning algorithm, Theoretical Computer Science 406 (2008) 119–135.
19. K. Palágyi, G. Németh, Fully parallel 3D thinning algorithms based on sufficient conditions for topology preservation, in: Proc. 15th Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery, DGCI 2009, Lecture Notes in Computer Science vol. 5810, Springer, Heidelberg, 2009, pp. 481–492.
20. K. Palágyi, A. Kuba, A 3D 6–subiteration thinning algorithm for extracting medial lines, Pattern Recognition Letters 19 (1998) 613–627.
21. G. Bertrand, Z. Aktouf, A 3D thinning algorithm using subfields, in: Proc. SPIE Conf. on Vision Geometry III 2356, 1994, pp. 113–124.
22. W.X. Gong, G. Bertrand, A simple parallel 3D thinning algorithm, in: Proc. 10th IEEE Internat. Conf. on Pattern Recognition, ICPR'90, 1990, pp. 188–190.
23. G. Németh, P. Kardos, K. Palágyi, Topology preserving 2-subfield 3D thinning algorithms, in: Proc. 7th IASTED Int. Conf. Signal Processing, Pattern Recognition and Applications, SPPRA 2010, 2010, pp. 310–316.
24. A. Manzanera, T.M. Bernard, F. Prętêux, B. Longuet, Medial faces from a concise 3D thinning algorithm, in: Proc. 7th IEEE Internat. Conf. Computer Vision, ICCV'99, 1999, Vol. 1, pp. 337–343.
25. G. Németh, P. Kardos, K. Palágyi, Topology preserving 3D thinning algorithms using four and eight subfields, in: Proc. Int. Conf. on Image Analysis and Recognition, ICIAR 2010, Lecture Notes in Computer Science vol. 6111, Springer, Heidelberg, 2010, pp. 316–325.