

## EMISSZIÓS DISZKRÉT TOMOGRÁFIAI MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA FAKTORSTRUKTÚRÁKRA

NAGY ANTAL

Az utóbbi években egy új fajta diszkrét tomográfiai probléma kutatása kezdődött el [3], amit *emissziós diszkrét tomográfiának*, röviden *EDT*-nek nevezünk. Ebben a modellben a teljes tér valamilyen homogén abszorbens anyaggal van kitöltve és a rekonstruálandó függvény egy tárgyat reprezentál, aminek a pontjai (radioaktív) sugárzást bocsátanak ki a környező térbe. A tárgy egy pontjából kibocsátott kezdeti aktivitás egy része az abszorbens anyagban elnyelődik a pont és a detektor távolságától függően. A rekonstrukció kiindulására szolgáló vetületek tehát nem tisztán az emisszióra vonatkozó adatokat tartalmazzák, hanem az abszorpció hatását is.

A fő célunk az volt, hogy olyan struktúrák térfogatát becsüljük meg néhány (jelen esetben 4) vetületből, melyeknek intenzitása az időben változik. Mindegyik vetület adott idő alatt lett elkészítve, melyek az adott pillanatban felvett képek sorozatából állt. A struktúrák vetületei először faktoranalízissel lettek elkülönítve a teljes vetületi adatsorozatot felhasználva. Mivel a faktoranalízis a struktúrák vetületeit csak egy szorzó konstans [4] erejéig képes meghatározni, ezért a korábbi heurisztikus módszer mellett egy új módszert is bemutatunk, mely az abszorpciós vetületek konzisztencia feltételén [2, 8] alapszik. Ezek után a mindegyik struktúrát külön-külön rekonstruáltuk az adott szorzó konstansokkal módosított faktor vetületekből diszkrét tomográfiai módszerrel. Az így kapott térfogatokat az adott struktúrák esetén összehasonlítottuk a cikkben az adott szorzó konstansokat meghatározó módszerek esetén.

### 1. Bevezetés

Néhány alkalmazásban csak az  $f$  függvény vetületeit lehet mérni. Ez gyakran előfordul például a nukleáris medicinában, ahol a rekonstruálandó objektum a radioaktív eloszlás valamely szervben, a vetületek pedig gamma kamerás felvételek különböző irányokból. Ilyen esetben Single Photon Emission Computed Tomography (SPECT) képalkotó módszerrel gyűjtik be az adott objektum tomográfias szeleteinek a rekonstrukciójához szükséges adatokat.

Jelölje  $f(r, t)$  a rekonstruálandó objektum radioaktivitásának intenzitás függvényét. Tegyük fel, hogy a térben az elnyelődés állandó és az elnyelődési együttható

$\mu \geq 0$  konstans mindenhol. A térbeli félegyenesek felírhatók

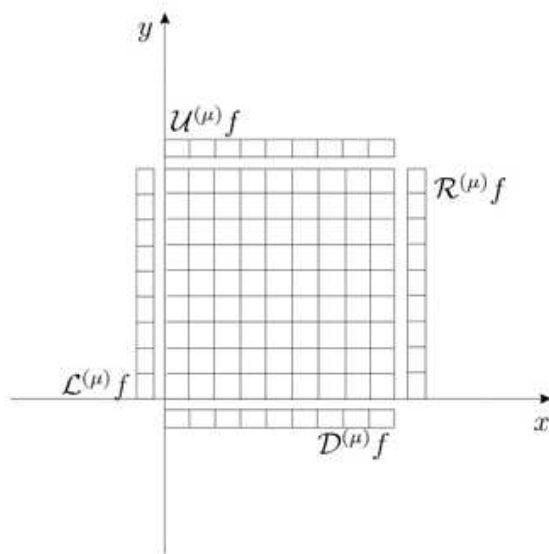
$$\ell(S, v) = \{S + u \cdot v \mid u \geq 0\}$$

alakban, ahol  $S$  a félegyenes kezdő pontja, illetve  $v$  az iránya. Így  $f$  abszorpciós vetületét  $\ell(S, v)$  mentén a  $t$  időpillanatban a következőképpen lehet meghatározni

$$[\mathcal{P}^{(\mu)} f](S, v, t) = \int_0^{\infty} f(S + u \cdot v, t) \cdot e^{-\mu u} du .$$

Általában az abszorpciós vetületek értékeit párhuzamos félegyenesek mentén mérjük ugyanabban az időpillanatban (pl. vonal vagy sík detektorokat használva). Ilyen esetben  $v$  irányú (abszorpciós) vetületekről beszélünk.  $f$  rekonstrukcióját 4 abszorpciós vetület felhasználásával fogjuk végezni. A négy irány az egymással szemben lévő két-két vízszintes és függőleges irány. Megjegyezzük, hogy az emissziós tomográfiai modellben a szemközti vetületek általában nem határozhatók meg egymásból, ellentétben a klasszikus (transzmissziós) DT-ben használt modellel, ahol a szemközti vetületek tükörképei egymásnak.

Tegyük fel, hogy a négy vetületet a bal, jobb, felső és alsó irányokból vettük fel. Továbbá tegyük fel, hogy az  $f$  függvény értelmezési tartománya a 3-dimenziós egység kocka minden  $t$  időpillanatban (1. ábra).



1. ábra. A négy abszorpciós vetület elrendezése.

A bal, jobb, felső és az alsó abszorpciós vetületeket a következő formulákkal határozhatjuk meg

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}^{(\mu)} f](y, z, t) &= [\mathcal{P}^{(\mu)} f]((0, y, z), (1, 0, 0), t) \\ &= \int_0^1 f(u, y, z, t) \cdot e^{-\mu u} du, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{R}^{(\mu)} f](y, z, t) &= [\mathcal{P}^{(\mu)} f]((1, y, z), (-1, 0, 0), t) \\ &= \int_0^1 f(1-u, y, z, t) \cdot e^{-\mu u} du, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{U}^{(\mu)} f](x, z, t) &= [\mathcal{P}^{(\mu)} f]((x, 1, z), (0, -1, 0), t) \\ &= \int_0^1 f(x, 1-u, z, t) \cdot e^{-\mu u} du, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}^{(\mu)} f](x, z, t) &= [\mathcal{P}^{(\mu)} f]((x, 0, z), (0, 1, 0), t) \\ &= \int_0^1 f(x, u, z, t) \cdot e^{-\mu u} du. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Másképpen megfogalmazva, az (1.1)–(1.4) egyenletek azt fejezik ki, hogy a detektorok az egységkocka bal, jobb, felső és alsó lapján fekszenek, a kocka felé néznek és az abszorpciós vetületeket olyan félegyeneselek mentén mérik, melyek merőlegesek a kocka megfelelő oldalaira.

Az  $f(r, t)$  függvény rekonstruálását három részben hajtjuk végre. Először szét kell bontani a 3D-s dinamikus objektumok eredeti vetületeit faktorstruktúrák vetületeire, majd a faktorstruktúrákhoz tartozó intenzitás értékeket határozzuk meg. Ezek után mindegyik faktorstruktúra 2D-s szeleteit rekonstruáljuk 4 vetületéből. Ezt a rekonstrukciót ismételve mindegyik szeletre megkapjuk a 3D-s rekonstruált faktorstruktúrákat.

## 2. Faktorstruktúrák

Tekintsük a következő problémát. Tegyük fel, hogy van egy 3D-s dinamikus tárgy, amelyet egy nemnegatív  $f(r, t)$  függvénnyel ábrázolhatunk, ahol  $r$  és  $t$  jelöli rendre a térbeli pozíciót és az időt. Tegyük fel, hogy  $f$  felírható függvények lineáris kombinációjaként a következőképpen

$$f(r, t) = c_1(t) \cdot f_1(r) + c_2(t) \cdot f_2(r) + \dots + c_K(t) \cdot f_K(r) + \eta(r, t), \quad (2.1)$$

ahol  $k = 1, 2, \dots, K$ , ( $K \geq 1$ ),  $f_k(r)$  időben állandó 0, 1 értékű függvény,  $c_k(t)$

a  $k$ -ik súly együttható, amely csak az időtől függ és  $\eta(r, t)$  reprezentálja a zajt. Ismert, hogy  $f$  és  $\eta$ , továbbá  $f_i$  és  $f_j$  minden  $i \neq j$ -re korrelálatlanok.

### 2.1. A fantom

Az eljárást 3D fantom kísérlettel próbáltuk ki. A mi fantomunk — azaz az  $f$  függvény a (2.1) egyenletben — a vizelet kiválasztás egyszerűsített 3D-s matematikai modellje volt, amit Dr. Werner Backfrieder, AKH Vienna, Ausztria [1] biztosított számunkra. A modell 5 faktorból állt (azaz,  $K = 5$ ), melyeket  $f_1, f_2, \dots, f_5$  jelölt a (2.1) egyenletben. Ezek a faktorer a két vérkeringési struktúrát, a két vese struktúrát és a húgyhólyagot ábrázolják. Mindegyik faktorstruktúra homogén, azaz az adott struktúrákat alkotó voxelek értéke minden időpillanatban 1, a struktúrák geometriai objektumokkal vannak megadva (diszkrét gömbökkel, hengerekkel, stb.). A faktorstruktúrák a  $64^3$  voxelből álló digitális térben vannak elhelyezve (a voxel mérete  $6 \times 6 \times 6$  mm). A háttér a  $64^3$  voxel kocka maradéka. Az 1. táblázatban lévő adatok adnak további információt az adott struktúrákról.

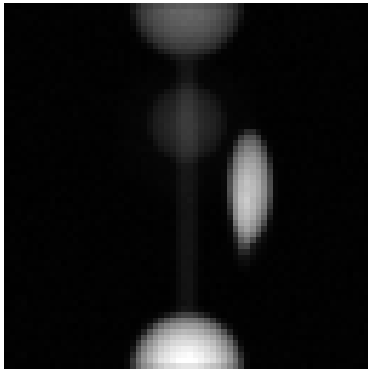
1. táblázat. A fantom struktúrái

Struktúra neve	térfogata (voxelben)
Szív és aorta	2652
Máj és lép	10603
Két vesekéreg	1350
Két vesemedence	606
Húgyhólyag	2094
Háttér	$64^3$ kocka maradéka

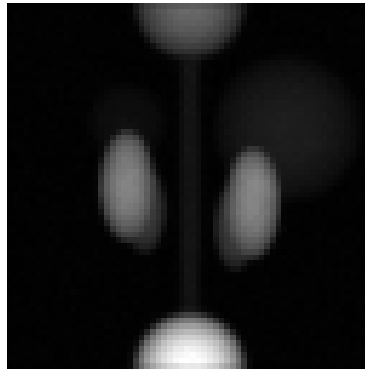
Annak érdekében, hogy a vetületi képek szimulálása egy nukleáris medicinai SPECT vizsgálat körülményeit kellő mértékben közelítse, abszorpciót, szórás, mélység függő felbontást, rész-térfogat hatást (partial volume effect) és még Poisson-zajt vettek figyelembe. A modellben  $c_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, 5$ ) a faktor súlyok (azaz az intenzitások) az adott szervek működésének megfelelően időben változnak. A négy  $64 \times 64$ -es méretű abszorpciós vetületet ( $\mathcal{L}^{(\mu)}f$ ,  $\mathcal{R}^{(\mu)}f$ ,  $\mathcal{U}^{(\mu)}f$  és  $\mathcal{D}^{(\mu)}f$ ) 120 diszkrét időpillanatban állították elő. A 120 időpillanatban készült vetületből irányonkénti számított összegképek a 2. ábrán láthatóak.

### 2.2. Faktoranalízis

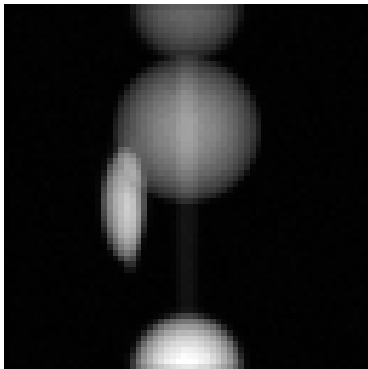
A 3D-s objektum mindegyik szimulált faktorstruktúrájának speciális dinamikája van (a radioaktivitás az idővel változik) a (2.1) egyenletnek megfelelően. Így egyes struktúrák vetületei faktoranalízissel elkülöníthetők a többi struktúrától. A faktoranalízist az [5, 6] publikációk szerint hajtották végre (Dr. Martin Samal,



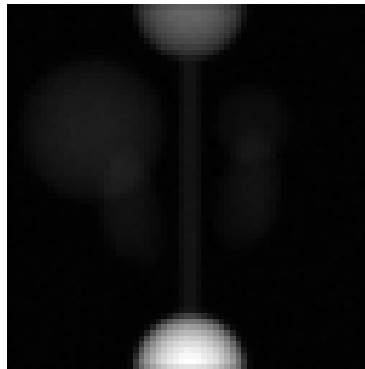
(a) A bal vetület összegképe



(b) A felső vetület összegképe



(c) A jobb vetület összegképe



(d) Az alsó vetület összegképe

**2. ábra.** 120 időpontban készült vetületek összegképei.

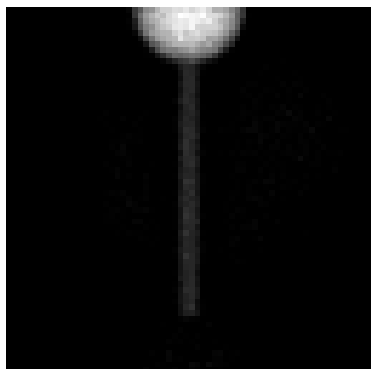
Charles University Prague, Csehország) mindegyik projekció sorozaton. A faktoranalízis eredménye 20 darab (azaz  $4 \times 5$ )  $64 \times 64$  mátrix (a vetületi faktorok  $L_k$ ,  $R_k$ ,  $U_k$  és  $D_k$  betűkkel jelöltük) és a megfelelő súlyok

$$\left( c_k^{(l)}(t), c_k^{(r)}(t), c_k^{(u)}(t), \text{ és } c_k^{(d)}(t) \right), \quad k = 1, 2, \dots, 5.$$

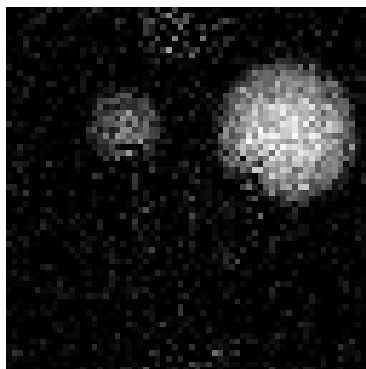
Példaként a „felső” irányból készült 5 képet mutatjuk be a 3. ábrán. A súlyok időbeli változását mutató 20 görbe

$$\left( c_k^{(l)}(t), c_k^{(r)}(t), c_k^{(u)}(t) \text{ és } c_k^{(d)}(t), \text{ ahol } k = 1, 2, \dots, 5 \right)$$

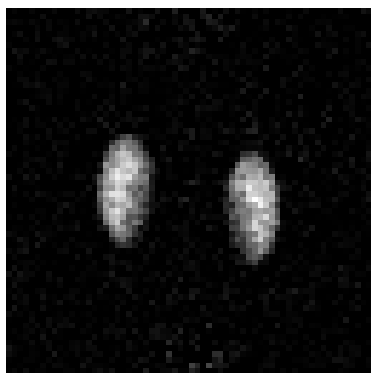
az 4. ábrán tekinthető meg.



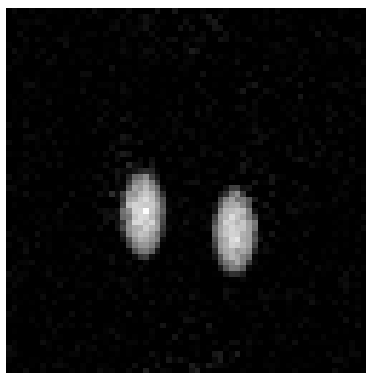
(a) Szív és aorta



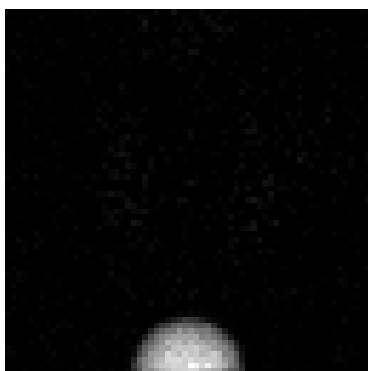
(b) Máj és lép



(c) Vesekéreg

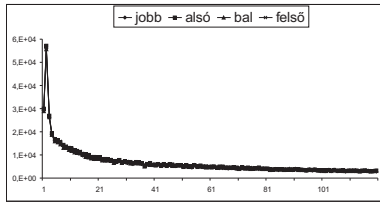


(d) Vesemedence

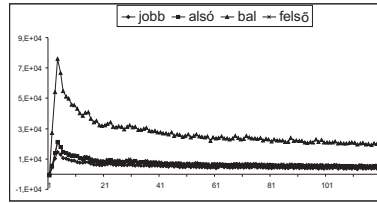


(e) Húgyhólyag

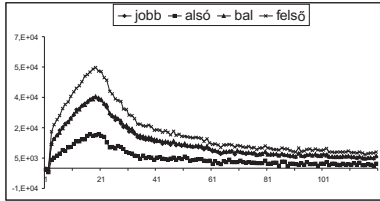
**3. ábra.** Az  $U_k$  képek, ahol  $k = 1, 2, \dots, 5$ , ahogyan a „felső”  $\mathcal{U}^{(\mu)}f$  vetületekből állt elő faktoranalízissel.



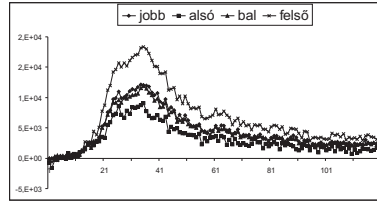
(a) Szív és aorta



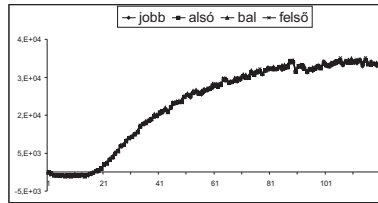
(b) Máj és lép



(c) Vesekéreg



(d) Vesemedence



(e) Húgyhólyag

**4. ábra.** A faktoranalízissel kapott súlyok görbéi.

Megjegyezzük, hogy a korrekt eljárás az lett volna, ha az azonos időpontban készült 4 vetületi képet egy képnek tekintették volna, és úgy hajtották volna végre a faktoranalízist. Eredményként olyan faktorokat kaptak volna, amelyek mindegyike 4 vetületi képet tartalmaz (tehát így is  $4 \times 5 = 20$  vetületi képet), de csak 5 görbét ( $c_1, \dots, c_5$ )! Ha ugyanis a (2.1) egyenletre alkalmazzuk a vetítő operátort,  $f_k$  vetületeiként megkapjuk az  $L_k$ ,  $R_k$ ,  $U_k$  és  $D_k$  vetületi képeket, amelyekhez így csak egyetlen  $c_k(t)$  súly tartozik.

A mi esetünkben azonban minden egyes vetületre külön-külön végezték el a faktoranalízist. A faktoranalízis csak egy konstans szorzó erejéig tudja meghatározni  $c_k(t)$ -t és  $f_k$ -t, azaz az eredményként kapott  $c_k(t)$  görbe és  $f_k$  faktor helyett más,  $d \cdot c_k(t)$  görbe és  $f_k/d$  faktor állhat elő a faktoranalízis során ( $d \neq 0$ ). A faktoranalízis ily módon való végrehajtása azt eredményezte, hogy a különböző szorzók miatt pl. a májhoz és léphez tartozó (4(b) ábra) görbék eltérnek.

A faktoranalízissel kapott képek és az együtthatók a következő összefüggésben állnak a teljes struktúra vetületeivel:

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}^{(\mu)} f](y, z, t) &= \sum_{k=1}^5 c_k^{(l)}(t) \cdot L_k(y, z) + \eta_L(y, z, t) , \\ [\mathcal{R}^{(\mu)} f](y, z, t) &= \sum_{k=1}^5 c_k^{(r)}(t) \cdot R_k(y, z) + \eta_R(y, z, t) , \\ [\mathcal{U}^{(\mu)} f](x, z, t) &= \sum_{k=1}^5 c_k^{(u)}(t) \cdot U_k(x, z) + \eta_U(x, z, t) , \\ [\mathcal{D}^{(\mu)} f](x, z, t) &= \sum_{k=1}^5 c_k^{(d)}(t) \cdot D_k(x, z) + \eta_D(x, z, t) , \end{aligned}$$

ahol  $\eta_L$ ,  $\eta_R$ ,  $\eta_U$  és  $\eta_D$  jelöli a megfelelő maradékokat.

### 3. Rekonstrukció

A faktoranalízis során kapott faktor vetületek nem a bináris struktúrák abszorpciós vetületei. Azokat a módszer csak egy szorzó konstans erejéig képes meghatározni, ezért szükség van az adott konstansok meghatározására.

A faktorstruktúrák intenzitás értékeinek meghatározására (lásd 4. fejezet) adott heurisztikus módszernél a 3D faktor struktúrák reprezentatív szeleteit rekonstruáljuk különböző szorzó konstansokkal. Majd a legjobb rekonstrukciós eredményt adó szorzó konstanssal korrigált szeletek vetületeit rekonstruáljuk. A következőkben ismertetünk egy lehetséges módszert a abszorpciós vetületekből történő bináris mátrixok rekonstrukciójára.

#### 3.1. Bináris mátrixok rekonstrukciója abszorpciós vetületeikből

Tekintsük az  $f_k$  szeletét  $z = z_0$  magasságban. Az  $f_k(x, y, z_0)$  szeletet egy bináris mátrixszal lehet ábrázolni, vagy ezzel ekvivalens módon egy  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_J) \in \{0, 1\}^J$  vektorral, ahol  $\xi_j$  jelöli a  $j$ -edik elemét a mátrixnak, mondjuk sorfolytonos bejárásban, ahol  $j = 0, 1, \dots, J$  és  $J = n^2$ .

Ismerve mindegyik  $f_k$  négy abszorpciós vetületét,  $f_k$  egy emissziós diszkrét tomográfiai eljárással (EDT) rekonstruálható [3]. Az EDT rekonstrukciós probléma egy lineáris egyenletrendszerrel írható le:

$$\mathbf{A}\xi = \mathbf{b} , \tag{3.1}$$

ahol  $\mathbf{b} = (b_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$  és  $\mathbf{A}$  jelöli azt a mátrixot, amely  $\xi$  és  $\mathbf{b}$  között adja meg az összefüggést.  $\mathbf{A}$  elemei a vetületek geometriájából, illetve az ismert  $\mu$

abszorpciós együtthatókból kiszámíthatók. A  $\mathbf{b}$  vektort méréssel kapjuk. Egy olyan bináris  $\xi$  vektort keresünk, amely kielégíti a (3.1) egyenletrendszeret.

A zaj, a mérési hibák és a modell egyszerűsítése miatt nem remélhettük, hogy megtaláljuk a (3.1) egyenletet pontosan kielégítő  $\xi$ -t. A (3.1) egyenletet ezért célszerű egy optimalizálási problémaként átfogalmazni. Formálisan a következő célfüggvény minimumát kell megtalálni

$$C(\xi) = \|\mathbf{A}\xi - \mathbf{b}\| + \Psi_{\text{sm}}(\xi), \quad (3.2)$$

ahol  $\xi$  bináris és

$$\Psi_{\text{sm}}(\mathbf{x}) = \gamma_{\text{sm}} \cdot \Phi_{\text{sm}}(\mathbf{x}). \quad (3.3)$$

$\Phi_{\text{sm}}(\mathbf{x})$ -t következőképpen adjuk meg:

$$\Phi_{\text{sm}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\ell \in Q_j^m} g_{\ell,j} \cdot |x_j - x_\ell|, \quad (3.4)$$

ahol  $Q_j^m$  a  $j$ -edik pixel  $m \times m$ -es környezetében lévő pixelek indexeinek a halmaza, és  $g_{\ell,j}$  a  $j$ -edik pixel köré rajzolt Gauss eloszlás (harang felület)  $\ell$ -edik pixelben felvett értéke. A  $g_{\ell,j}$  skalár az  $\ell$ -edik és  $j$ -edik pixel távolságát súlyozza. A  $\Psi_{\text{sm}}(\mathbf{x})$  regularizációs kifejezést használva az optimalizálási algoritmust arra kényszerítjük, hogy olyan bináris mátrixot kapjunk megoldásul, amely az adott prototípus függvény alatt, lehetőleg nagy összefüggő homogén (csak 0-kból vagy csak 1-esekből álló) területeket tartalmaz.

A (3.2) egyenlet megoldásához a *homogén szimulált hűtés* optimalizálási módszert használtuk.

### 3.1.1. Homogén szimulált hűtés

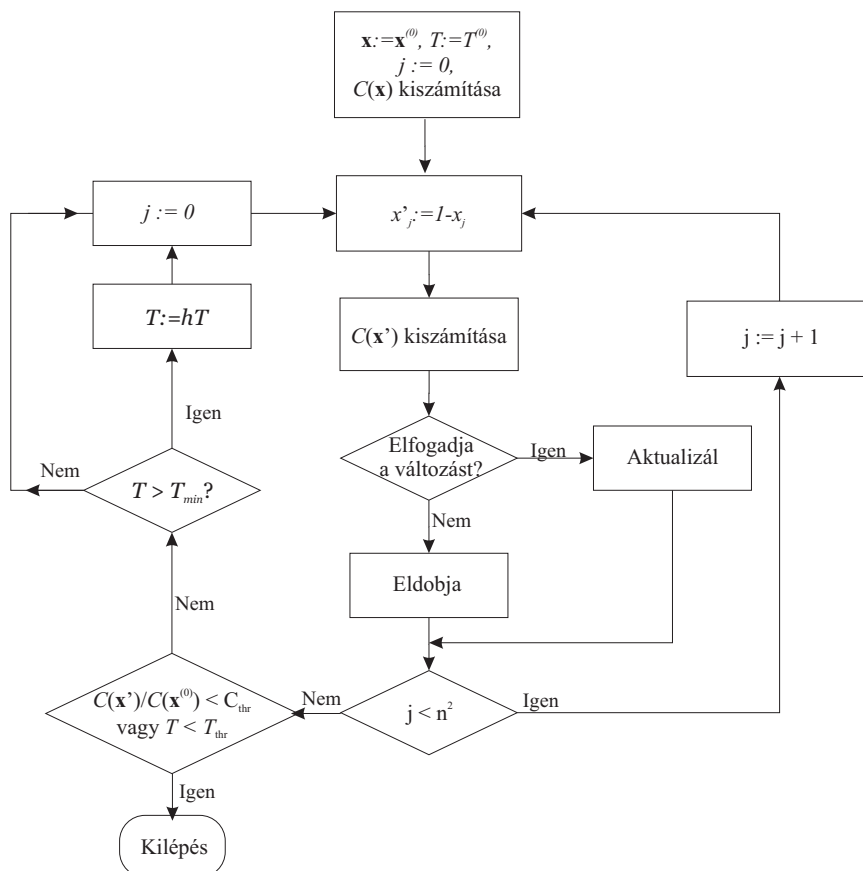
Az algoritmus egy tetszőleges  $\mathbf{x}^{(0)}$  iniciális bináris képből és egy  $T = T^{(0)}$  hőmérséklettről indul ki (5. ábra). Kiszámítja a  $C(\mathbf{x})$  célfüggvény kezdő értékét. Egy iterációs lépésben az  $\mathbf{x}$  vektor összes elemén végighaladva változtatja meg az adott elemet 0-ról 1-re, illetve 1-ről 0-ra.

Legyen  $\mathbf{x}'$  az a kép, amely csak a  $j$ -edik pozícióban tér el az  $\mathbf{x}$  képtől, azaz  $x'_j = 1 - x_j$ . Ezt a változtatást az algoritmus elfogadja, azaz  $\mathbf{x}'$  lesz az új  $\mathbf{x}$  vektor, ha  $C(\mathbf{x}') < C(\mathbf{x})$ . Ellenkező esetben a változtatást csak a  $\Delta C = C(\mathbf{x}') - C(\mathbf{x})$  értékétől függő valószínűséggel fogadja el. Pontosan csak akkor, ha

$$\exp(-\Delta C/\kappa T) > z,$$

ahol  $\kappa$  a Boltzmann-állandó ( $11.3805 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kgs}^{-2} \text{ K}^{-1}$ ),  $T$  az aktuális hőmérséklet,  $z$  pedig a  $[0, 1]$  intervallumon egyenletes eloszlású pszeudó véletlenszám-generátorral előállított szám.

Az iterációs lépések végén csökkentjük az aktuális hőmérsékletet és egy új iterációs lépést kezdünk. Az algoritmus akkor fejeződik be, ha az aktuális célfüggvény



5. ábra. A megvalósított homogén SA algoritmus folyamatábrája.

értékének és a célfüggvény kezdőértékének aránya egy előre megadott küszöbérték alá esik ( $C(\mathbf{x}')/C(\mathbf{x}^{(0)}) < C_{\text{thr}}$ ) vagy az aktuális hőmérséklet egy adott hőmérsékleti pont alá kerül ( $T < T_{\text{thr}}$ ).

#### 4. A faktorstruktúrák intenzitás értékeinek meghatározása

A vetületi mátrixokat nem tekinthetjük a bináris struktúrák abszorpciók vetületeinek, mert semmi sem biztosítja, hogy a faktorstruktúrákhoz tartozó vektorok

sugárzása egységnyi intenzitású. Ezért

$$\begin{aligned} c_k(t) \cdot \left[ \mathcal{L}^{(\mu)} f_k \right] (y, z) &= c_k^{(l)}(t) \cdot L_k(y, z) , \\ c_k(t) \cdot \left[ \mathcal{R}^{(\mu)} f_k \right] (y, z) &= c_k^{(r)}(t) \cdot R_k(y, z) , \\ c_k(t) \cdot \left[ \mathcal{U}^{(\mu)} f_k \right] (x, z) &= c_k^{(u)}(t) \cdot U_k(x, z) , \\ c_k(t) \cdot \left[ \mathcal{D}^{(\mu)} f_k \right] (x, z) &= c_k^{(d)}(t) \cdot D_k(x, z) , \end{aligned}$$

minden  $k = 1, 2, \dots, 5$ -re. Ez azt jelenti, hogy a faktoranalízis a faktorok vetületeit csak egy szorzó konstans erejéig tudja meghatározni. Mielőtt bármilyen rekonstrukciós módszert használnánk, meg kell határoznunk a faktorstruktúrák valódi intenzitásait minden  $k = 1, 2, \dots, 5$ -re.

$$\begin{aligned} d_k^{(l)} &= c_k^{(l)}(t)/c_k(t), & d_k^{(r)} &= c_k^{(r)}(t)/c_k(t), \\ d_k^{(u)} &= c_k^{(u)}(t)/c_k(t) & \text{és} & \quad d_k^{(d)} = c_k^{(d)}(t)/c_k(t) \end{aligned}$$

konstansokat minden  $k = 1, 2, \dots, 5$ -re.

Két módszert adunk a faktorok intenzitásának meghatározására, mindegyik faktorra ugyanazt az eljárást használva.

#### 4.1. Heurisztikus módszer

A módszer lényege [4] azon a megfigyelésen alapszik, hogy a célfüggvény értéke az adott rekonstrukciós eljárás során annál közelebb kerül a nullához, minél jobban megközelítjük a szorzó konstans értékét az adott faktor struktúra esetén.

*4.1. Algoritmus.* A faktorok intenzitás értékének meghatározása abszorpciós vetületekből

Bemenet: A faktor abszorpciós vetületei

Kimenet: A faktor intenzitás értéke

1. lépés: Válasszuk ki az adott faktor abszorpciós vetületi kép sorozatából azt a reprezentatív szeletet, amelynek a legnagyobb az összértéke.
2. lépés: Rekonstruáljuk a 3D-s faktorstruktúrának a reprezentatív szeletét különböző  $\lambda$  szorzót használva a (4.1) célfüggvény minimalizálásánál.

$$C(\lambda) = \|\mathbf{A} \cdot (\lambda \cdot \xi) - \mathbf{b}\| + \Psi_{\text{sm}}(\xi), \quad (4.1)$$

ahol  $\xi$  a bináris faktor reprezentatív szeletét leíró vektor és a  $\Psi_{\text{sm}}(\xi)$  a 3.1. fejezetben bevezetett regularizációs kifejezés.

3. lépés: A különböző kipróbált  $\lambda$  szorzók közül a legkisebb  $C(\lambda)$  célfüggvényhez tartozót választottuk ki  $\lambda$  értékének, azaz  $\lambda^* = \arg \min_{\lambda} \{C(\lambda)\}$ .

VÉGE

#### 4.2. Konzisztencia feltételen alapuló módszer

A szorzó konstans egy másik lehetséges meghatározása, ha az abszorpciós vetületekre vonatkozó konzisztencia feltételt [2, 8] használjuk.

Az algoritmus ismertetéséhez a következő definíciókra van szükségünk. A  $\mathcal{P}_X^{(\mu)}$ ,  $\mathcal{P}_Y^{(\mu)}$ ,  $\mathcal{P}_X$  és  $\mathcal{P}_Y$  abszorpciós, illetve abszorpció mentes vetületeket definiáljuk a következőképpen a  $Q$  mérhető síkhalmazra:

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_X^{(\mu)}Q](y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_Q(x, y) e^{-\mu x} dx, \\ [\mathcal{P}_Y^{(\mu)}Q](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_Q(x, y) e^{-\mu y} dy, \\ [\mathcal{P}_X Q](y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_Q(x, y) dx, \\ [\mathcal{P}_Y Q](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_Q(x, y) dy, \end{aligned}$$

ahol  $\chi_Q$  jelöli a  $Q \in \mathbb{R}^2$  karakterisztikus függvényét.

Jelöljük  $L$ ,  $U$ ,  $R$ ,  $D$ -vel az adott faktorstruktúrák vetületeit. Ezek után definiáljuk az  $i$ -edik keresztmetszeten a második és harmadik vetületeket a [8]-nak megfelelően a következőképpen:

$$\begin{aligned} f_{LU}^i(x) &= \mathcal{P}_Y^{(\mu)}\{(x, y) | L(1 - y, z = i) \geq x\}, \\ f_{UL}^i(y) &= \mathcal{P}_X^{(\mu)}\{(x, y) | U(x, z = i) \geq y\}, \\ f_{UR}^i(x) &= \mathcal{P}_X^{(\mu)}\{(x, y) | U(1 - x, z = i) \geq y\}, \\ f_{RU}^i(y) &= \mathcal{P}_Y^{(\mu)}\{(x, y) | R(1 - y, z = i) \geq x\}, \\ f_{RD}^i(x) &= \mathcal{P}_Y^{(\mu)}\{(x, y) | R(y, z = i) \geq x\}, \\ f_{DR}^i(y) &= \mathcal{P}_X^{(\mu)}\{(x, y) | D(1 - x, z = i) \geq y\}, \\ f_{DL}^i(x) &= \mathcal{P}_X^{(\mu)}\{(x, y) | D(x, z = i) \geq y\}, \\ f_{LD}^i(y) &= \mathcal{P}_Y^{(\mu)}\{(x, y) | L(y, z = i) \geq x\}, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} f_{ULY}^i(x) &= \mathcal{P}_Y\{(x, y) | f_{UL}^i(y) \geq x\}, \\ f_{RUY}^i(x) &= \mathcal{P}_Y\{(x, y) | f_{RU}^i(y) \geq x\}, \\ f_{DRY}^i(x) &= \mathcal{P}_Y\{(x, y) | f_{DR}^i(y) \geq x\}, \\ f_{LDY}^i(x) &= \mathcal{P}_Y\{(x, y) | f_{LD}^i(y) \geq x\}, \end{aligned}$$

ahol az  $L, U, R, D$  indexek sorozatai azt jelzik, hogy milyen sorrendben végeztük el a vetületek további vetítését.

Végül, vegyük a rekonstruálandó faktor  $i$ -edik szeletének második, illetve harmadik vetületének integrálját mind a négy irányból, és jelöljük azokat a következőképpen:

$$\begin{aligned} F_{LU}^i(c) &= \int_0^c f_{LU}^i(x) dx, & F_{UL}^i(c) &= \int_0^c f_{UL}^i(x) dx, \\ F_{UR}^i(c) &= \int_0^c f_{UR}^i(x) dx, & F_{RU}^i(c) &= \int_0^c f_{RU}^i(x) dx, \\ F_{RD}^i(c) &= \int_0^c f_{RD}^i(x) dx, & F_{DR}^i(c) &= \int_0^c f_{DR}^i(x) dx, \\ F_{DL}^i(c) &= \int_0^c f_{DL}^i(x) dx, & F_{LD}^i(c) &= \int_0^c f_{LD}^i(x) dx. \end{aligned}$$

*4.2. Algoritmus.* A faktorok intenzitás értékének meghatározása abszorpciós vetületekből

Bemenet: A faktor abszorpciós vetületei

Kimenet: A faktor intenzitás értéke

1. lépés: Korrekció. Határozzuk meg azokat az  $\alpha, \beta$  és  $\gamma$  értékeket, amelyekre a (4.2) kifejezés minimális minden  $c > 0$  értékére.

$$\begin{aligned} & \sum_i \left( (\alpha \cdot F_{LU}^i(c) - F_{UL}^i(c))^2 \cdot \sqrt{F_{LU}^i(c) \cdot F_{UL}^i(c)} \right) + \\ & \sum_i \left( (\alpha \cdot F_{LD}^i(c) - \beta \cdot F_{DL}^i(c))^2 \cdot \sqrt{F_{LD}^i(c) \cdot F_{DL}^i(c)} \right) + \\ & \sum_i \left( (\beta \cdot F_{DR}^i(c) - \gamma \cdot F_{RD}^i(c))^2 \cdot \sqrt{F_{DR}^i(c) \cdot F_{RD}^i(c)} \right) + \\ & \sum_i \left( (\gamma \cdot F_{RU}^i(c) - F_{UR}^i(c))^2 \cdot \sqrt{F_{RU}^i(c) \cdot F_{UR}^i(c)} \right) \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A kapott  $\alpha, \beta$  és  $\gamma$  értékekkel módosítsuk az  $F$ -eket minden  $i$ -re:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{LU}^i(c) &= \alpha \cdot F_{LU}^i(c), & \hat{F}_{LD}^i(c) &= \alpha \cdot F_{LD}^i(c), \\ \hat{F}_{DL}^i(c) &= \beta \cdot F_{DL}^i(c), & \hat{F}_{DR}^i(c) &= \beta \cdot F_{DR}^i(c), \\ \hat{F}_{RD}^i(c) &= \gamma \cdot F_{RD}^i(c), & \hat{F}_{RU}^i(c) &= \gamma \cdot F_{RU}^i(c). \end{aligned}$$

2. lépés: Intenzitás érték meghatározása egy adott szeletre. Keressük meg azokat a maximális  $\rho_{LU}^i, \rho_{UR}^i, \rho_{RD}^i$  és  $\rho_{DL}^i$  értékeket, melyekre teljesül a

konzisztencia feltétel [8] minden  $c > 0$  értékre, azaz

$$\begin{aligned} \text{ha } \hat{F}_{LU}^i(c) < \hat{F}_{UL}^i(c), & \quad \text{akkor} & \quad \hat{F}_{LU}^i(\rho_{LU}^i \cdot c) \geq \hat{F}_{UL}^i(c), \\ \text{ha } \hat{F}_{UR}^i(c) < \hat{F}_{RU}^i(c), & \quad \text{akkor} & \quad \hat{F}_{UR}^i(\rho_{UR}^i \cdot c) \geq \hat{F}_{RU}^i(c), \\ \text{ha } \hat{F}_{RD}^i(c) < \hat{F}_{DR}^i(c), & \quad \text{akkor} & \quad \hat{F}_{RD}^i(\rho_{RD}^i \cdot c) \geq \hat{F}_{DR}^i(c), \\ \text{ha } \hat{F}_{DL}^i(c) < \hat{F}_{LD}^i(c), & \quad \text{akkor} & \quad \hat{F}_{DL}^i(\rho_{DL}^i \cdot c) \geq \hat{F}_{LD}^i(c). \end{aligned}$$

A  $\rho_{LU}^i, \rho_{UR}^i, \rho_{RD}^i, \rho_{DL}^i$  közül válasszuk ki a maximális értéket, jelölje az  $i$ -edik szeletre kapott értéket  $\lambda^i$ , azaz

$$\lambda^i = \max(\rho_{LU}^i, \rho_{UR}^i, \rho_{RD}^i, \rho_{DL}^i).$$

VÉGE

Az 1. lépéssel azt próbáljuk elérni, hogy a második vetületek integráljai lehetőleg közel azonosak legyenek a [8] 2.3-as tétel (24)-es egyenletének megfelelően.

A 2. lépés-ben a [8] 2.3-as tétel (25)-ös és (27)-es egyenleteinek megfelelően egy olyan szorzó konstans határozunk meg az adott faktorstruktúrára, amely azt biztosítja, hogy létezik egy olyan mérhető síkhalmaz, melyeket az adott vetületek határoznak meg.

A 4.2. algoritmust természetesen csak olyan metszetekre érdemes használni, amelyekben az adott faktor jelen van. Az ilyen metszetek kiválasztására egy egyszerű küszöbölést választhatunk. Például csak azokra a szeletre számoljuk ki a  $\lambda$ -t, amelyekre az alábbi összeg elér egy adott küszöböt:

$$\text{SUM}^i = \int_{-\infty}^{\infty} L(y, z = i) + \int_{-\infty}^{\infty} R(y, z = i) + \int_{-\infty}^{\infty} U(x, z = i) + \int_{-\infty}^{\infty} D(x, z = i). \quad (4.3)$$

## 5. Eredmények

A két módszerrel meghatározott intenzitás értékeket a következő táblázatok tartalmazzák.

A rekonstrukció során a rekonstruálandó objektumok mérete miatt  $m = 3$ -at választottuk a (3.4) egyenletben szereplő  $Q_j^m$  szomszédság számára. A (3.3) egyenletben szereplő  $\gamma_{sm}$  regularizációs skalár esetében szintén figyelembe kellett vennünk a struktúrák méretét, illetve a torzítások hatását (pl. zaj) is. Az egyes struktúráknál, mind a két módszer esetén ugyanazokat a  $\gamma_{sm}$  értékeket használtuk a rekonstrukció során. A helyreállított reprezentatív szeletek átlag képei a 6., 7., 8., 9. és a 10. ábrákon láthatók.

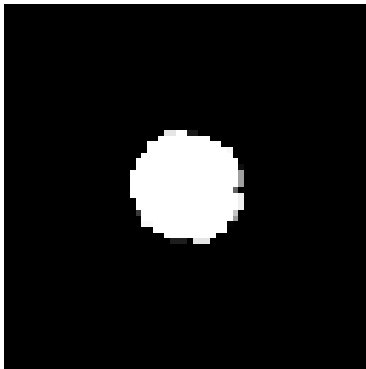
A rekonstrukciós eljárás megismétlésével a sztochasztikus módszer miatt más és más eredményt kaphatunk. A teljes rekonstrukciós eljárást 100-szor megismételtük mindegyik struktúrára azért, hogy információt kapjunk a megismételt rekonstrukciók különbségeiről. Az átlagos térfogatokat a megismételt rekonstrukciós

**2. táblázat.** A heurisztikus módszerrel kapott vetületi skalár értékek.

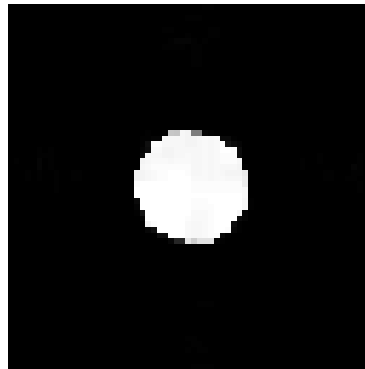
Struktúra neve	Szorzó konstans értéke
Szív és aorta	353.95
Máj és lép	23.65
Két vesekéreg	145.0
Két vesemedence	172.0
Húgyhólyag	206.5

**3. táblázat.** A konzisztencia feltétellel kapott vetületi skalár értékek.

Struktúra neve	Szorzó konstans értéke
Szív és aorta	399.67
Máj és lép	32.03
Két vesekéreg	72.54
Két vesemedence	102.06
Húgyhólyag	195.7

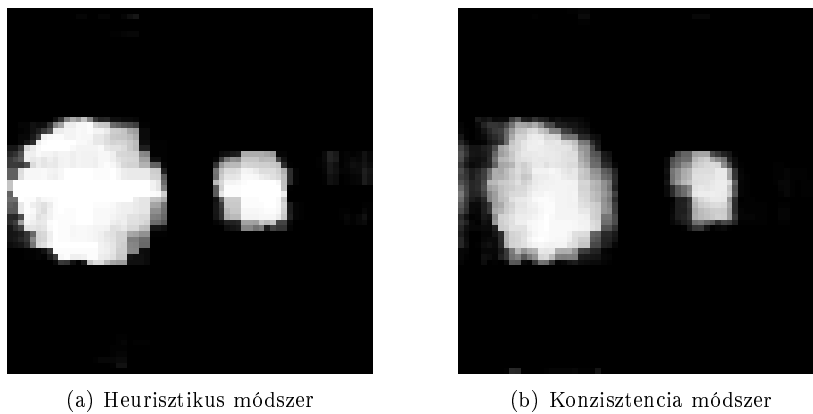


(a) Heurisztikus módszer

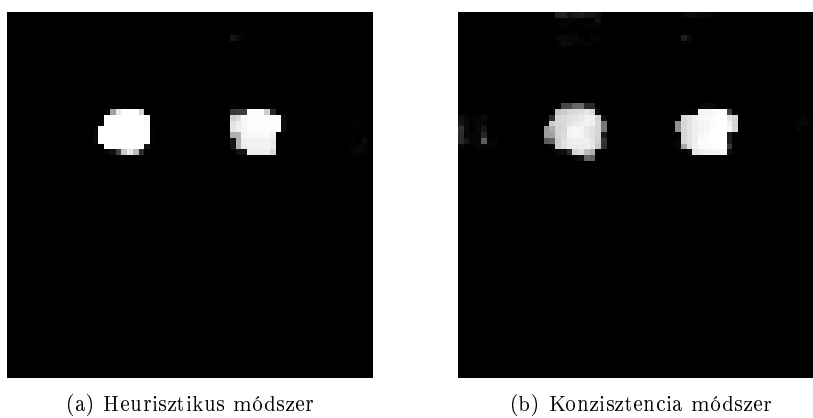


(b) Konzisztencia módszer

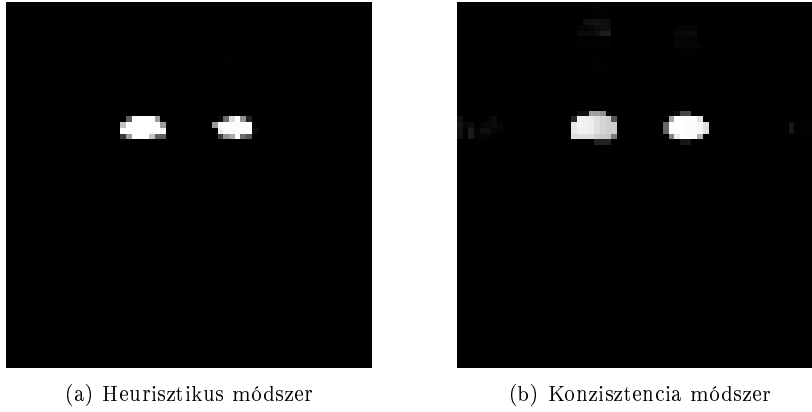
**6. ábra.** A szív és aorta reprezentatív szeletének átlag képe a kétféle módszer alapján.



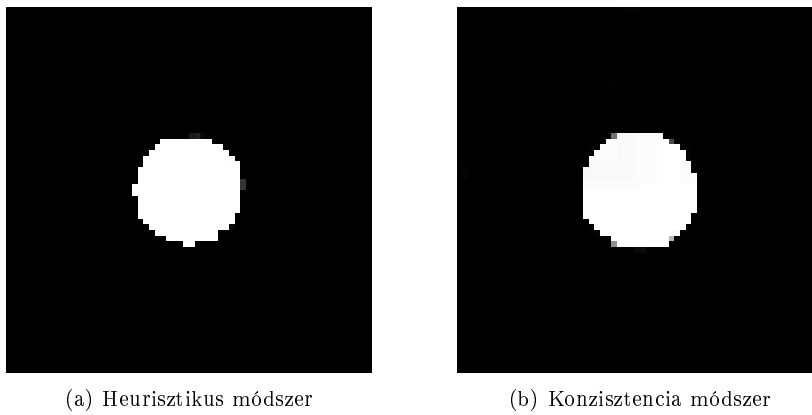
**7. ábra.** A máj és a lép reprezentatív szeletének átlag képe a kétféle módszer alapján.



**8. ábra.** A vesekérgék reprezentatív szeletének átlag képe a kétféle módszer alapján.



**9. ábra.** A vesemedencék reprezentatív szeletének átlag képe a kétféle módszer alapján.



**10. ábra.** A húgyhólyag reprezentatív szeletének átlag képe a kétféle módszer alapján.

eredményekből számítottuk. A 4. és 5. táblázatokban a rekonstruált térfogatoknak az eredeti térfogathoz viszonyított százalékos arányát is meghatároztuk (a zárójelben lévő számok). Az utolsó oszlop a 100-szor helyreállított térfogatok szórását mutatja.

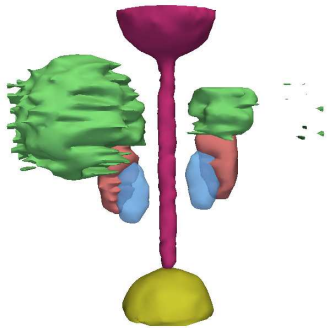
**4. táblázat.** A rekonstruált struktúrák statisztikai eredményei a heurisztikus módszerrel meghatározott intenzitás értékek esetén.

Struktúra neve	Eredeti térfogat (voxel)	Helyreállított struktúra (voxel)	Szórás(voxel)
Szív és aorta	2652	2541 (96 %)	5.29
Máj és lép	10603	9486 (89 %)	100
Vesekérgék	1350	1450 (107 %)	17.1
Vesemedencék	606	511 (84 %)	5.4
Húgyhólyag	2094	1925 (92 %)	3.95

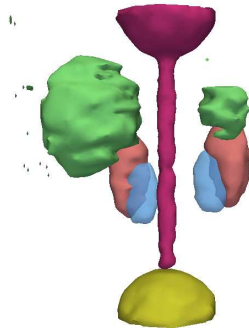
**5. táblázat.** A rekonstruált struktúrák statisztikai eredményei a konzisztencia feltétellel meghatározott intenzitás értékek esetén.

Struktúra neve	Eredeti térfogat (voxel)	Helyreállított struktúra (voxel)	Szórás(voxel)
Szív és aorta	2652	2657 (100 %)	13.88
Máj és lép	7023	9486 (66 %)	86
Vesekérgék	1350	1570 (116 %)	39.97
Vesemedencék	606	559 (92 %)	29.96
Húgyhólyag	2094	2267 (108 %)	26.63

A megismételt rekonstrukciókból kapott átlag szeleteket mindegyik struktúrára egy alkalmas vágási értéket használva jelenítettük meg a Slicer szoftver [7] használatával (11. és 12. ábrák).

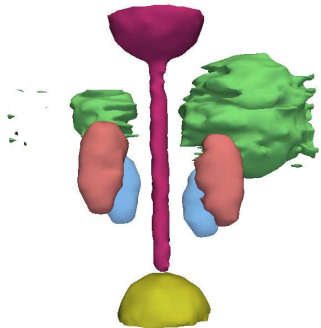


(a) Heurisztikus módszer

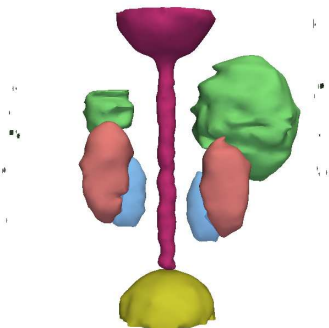


(b) Konzisztencia módszer

**11. ábra.** A rekonstruált átlagos struktúrák 3D-s megjelenítése előlnézetben a kétféle módszer alapján.



(a) Heurisztikus módszer



(b) Konzisztencia módszer

**12. ábra.** A rekonstruált átlagos struktúrák 3D-s megjelenítése hátsó nézetben a kétféle módszer alapján.

## 6. Diszkusszió

Az EDT egy SPECT-beli lehetséges alkalmazását mutattuk be. Három lépéses eljárást javasoltunk a dinamikus vese SPECT vizsgálatból nyert 3D-s faktorstruktúrák 4 abszorpciós vetületből történő rekonstruálására. Az első lépésben a faktorstruktúrák faktoranalízissel lettek szétválasztva egymástól, majd a második lépésben két módszer (heurisztikus és konzisztencia feltételen alapuló) segítségével határoztuk meg a struktúrák intenzitás értékét. Végül, a harmadik lépésben egy EDT módszerrel rekonstruáltuk a 3D-s struktúrákat.

A faktorstruktúrák intenzitás értékének meghatározásakor a heurisztikus és a konzisztencia feltételen alapuló algoritmus esetén különböző szorzó konstansokat kaptunk eredményül. Ennek megfelelően a rekonstruált struktúrák is eltérnek.

Megfigyeltük, hogy a rekonstruált máj és lép struktúrák kevésbé voltak simák, mint a többi faktorstruktúra. A hiba forrása az lehet, hogy az abszorpció miatt a máj aszimmetrikusan elhelyezkedő nagy részét bizonyos irányokból csak részlegesen lehet látni (például a bal oldali vetület a 2. ábrán). Hasonló magyarázat adható a vesemedencék és a húgyhólyag esetében is (4. táblázat).

A vetületek kiszámításakor az abszorpciót figyelembe vettük a rekonstrukcióban, de nem hajtottunk végre semmilyen szórás-, illetve zaj-korrekciót. A probléma egyszerűbb lenne, ha a faktoranalízist csak egy képsorozaton hajtanánk végre (a 4 vetület sorozatai helyett), ahol egy kép négy megfelelő vetület kompozíciója lenne.

Mivel az eredeti modell nem áll rendelkezésünkre, így csak az adott struktúrák térfogataihoz tudjuk hasonlítani az eredményeinket, amely csak részben ad pontos képet a rekonstrukció pontosságáról. Azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a faktorstruktúrák helyreállított térfogatai nincsenek messze az igazi értékektől. A 4. táblázat azt mutatja, hogy a heurisztikus módszerrel meghatározott faktorstruktúrák intenzitás értékei esetén a rekonstrukciós módszer a sztochasztikus optimalizálás ellenére stabilnak mondható. A konzisztencia feltétel alapján meghatározott intenzitás értékekkel végrehajtott rekonstrukció után viszont a számított térfogat nagyobb szóródást mutat (5. táblázat), mint a heurisztikus módszer esetén.

## 7. Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Dr. Werner Backfriedernek (AKH Vienna, Ausztria) és Dr. Martin Samalnak (Charles University Prague, Csehország), hogy a cikk megírásához adatokat bocsátottak rendelkezésemre. Külön szeretnék köszönetet mondani Kuba Attilának, aki halála előtt, időt és fáradságot nem kímélve irányította, megjegyzéseivel és javaslataival segítette munkámat. Kutatásomat az OTKA T048476 pályázat is támogatta.

### Hivatkozások

- [1] BACKFRIEDER, W., SAMAL, M., AND BERGMANN, H.: *Towards estimation of compartment volumes and radionuclide concentrations in dynamic SPECT using factor analysis and limited number of projections*. Physica Medica **15**, 3 (1999), 160.
- [2] KUBA, A.: *Reconstruction of measurable sets from two absorbed projections*. Technical Report of Dept. of Computer Science, Univ. of Szeged (2005).
- [3] KUBA, A., AND NIVAT, M.: *Reconstruction of discrete sets from absorbed projections*. In Proceedings of the 9th International Conference, Discrete Geometry for Computer Imagery (Berlin, 2000), G. Borgefors, I. Nyström, and G. Sanniti di Baja, Eds., vol. 1953 of Lecture Notes in Computer Sciences, Springer Verlag, pp. 137–148.
- [4] NAGY, A., KUBA, A., AND SAMAL, M.: *Reconstruction of factor structures using discrete tomography method*. Electronic Notes in Discrete Mathematics **20** (2005), 519–534.
- [5] SAMAL, M., KARNY, M., SUROVA, H., MARIKOVA, E., AND DIENSTBIER, Z.: *Rotation to simple structure in factor analysis of dynamic radionuclide studies*. Phys. Med. Biol. **32** (1987), 371–382.
- [6] SAMAL, M., NIMMON, C. C., BRITTON, K. E., AND BERGMANN, H.: *Relative renal uptake and transit time measurements using functional factor images and fuzzy regions of interest*. Eur. J. Nucl. Med. **25**, 1 (1998), 48–54.
- [7] <http://www.slicer.org>.
- [8] ZOPF, S., AND KUBA, A.: *Reconstruction of measurable sets from two generalized projections*. Electronic Notes in Discrete Mathematics **20** (2005), 47–66.

(Beérkezett: 2008. április 30.)

NAGY ANTAL  
Szegedi Tudományegyetem  
Képfeldolgozás és Számítógépes Grafika Tanszék  
6701 Szeged Pf. 652  
nagy@inf.u-szeged.hu

### APPLYING EMISSION DISCRETE TOMOGRAPHY METHODS ON FACTOR STRUCTURES

ANTAL NAGY

First, consider the following problem. Let us suppose that there is a 3D dynamic object, which can be represented by a non-negative function  $f(r, t)$ , where  $r$  and  $t$  denote the position in space and time, respectively. Suppose that  $f$  can be expressed as a weighted composite of a

*Alkalmazott Matematikai Lapok (2009)*

set of (so far unknown) binary valued functions  $f_k(r)$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$  ( $K \geq 1$ ) being constant in time, such that

$$f(r, t) = c_1(t) \cdot f_1(r) + c_2(t) \cdot f_2(r) + \dots + c_K(t) \cdot f_K(r) + \eta(r, t), \quad (7.1)$$

where  $c_k(t)$  denote the  $k$ -th weighting coefficient, which depends on time, and  $\eta(r, t)$  represents the noise or residual in  $(r, t)$ . Given the assumption that  $\eta$  and  $f$  are uncorrelated,  $c_k(t)$  and  $f(r)$  are to be determined such that  $f_i$  are independent from  $f_j$  for all  $i \neq j$ . If the values of  $f(r, t)$  are available then the problem can be solved by factor analysis.

However, it can happen that we cannot measure the function  $f$  in the points of the space, but we can measure certain projections only. This is frequently the case, for example, in nuclear medicine, where the dynamic object is the radioactivity distribution in some human organ and the projections are gamma camera images from different directions. In this case SPECT imaging is applied to reconstruct the cross-sections of the object.

Let  $f(r, t)$  denote the intensity function of the object to be reconstructed. Suppose that the absorption in the space is constant, that is the absorption coefficient is  $\mu \geq 0$  everywhere. All half-lines in the space can be described as  $\ell(S, v) = \{S + u \cdot v \mid u \geq 0\}$ , where  $S$  and  $v$  are the point and direction of the half-line, respectively. Then the projections of  $f$  in time  $t$  can be measured along  $\ell(S, v)$  half-lines by point detectors as follows

$$[\mathcal{P}^{(\mu)} f](S, v, t) = \int_0^{\infty} f(S + u \cdot v, t) \cdot e^{-\mu u} du.$$

Usually, the absorbed projection values are measured along many parallel half-lines simultaneously (e.g., by using line or plane detectors).

The method was tested on 3D phantom experiment. Our phantom (i.e., the function  $f$  in (7.1) was a simplified 3D mathematical model of the human renal system (it was provided by Dr. Werner Backfrieder, AKH Vienna, Austria). Each simulated factor structure of the whole 3D object had specific dynamics (radioactivity changes with time) according to (7.1), so, their projections seemed to be separable from the projections of other structures by factor analysis. The factor analysis was performed on each sequence of projections by the method published in [5, 6] using spatial constraints (Dr. Martin Samal, Charles University Prague, Czech Republic).

The projection images cannot be considered as the absorbed projections of the factor. However, the absorbed projections of the factor structures can be computed from these images by suitable multiplications. Therefore, before using any kind of reconstruction method, we need to determine the multiplicative constants. We have given two methods to determine these intensity values. The first is a heuristic method and the second method based on the consistency condition derived for absorbed projections [8].

We have successfully reconstructed the binary matrices from the absorption projections after determination of the intensity values.