

A kényszererős fékezett inga kaotikus viselkedése és stabilizálása

Bánhelyi Balázs

2008. július 25.

Több közlemény is foglalkozik valószínűleg nem mondható dinamikai rendszerek kaotikusságával. Ezen a területen való rendszerek kaotikusságának matematikai bizonyítójú tárgyalása nagyon ritka, azonban számos rendszerről sejthető a kaotikus viselkedés. Jelen dolgozatban is egy ilyen sejtés számítógéppel segített matematikai bizonyítását fogjuk megadni. J. Hubbard egy egyszerűnek tűnő kényszererős fékezett ingáról állítja, hogy kaotikus [9, 10], de matematikai bizonyítást nem ad annak létezésére. Ezen dinamikai rendszer érdekessége, hogy a kaotikus viselkedést köznapi szavakkal, matematikai fogalmak nélkül is meg lehet fogalmazni. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy az alsó ponton való áthaladás jellegével is le lehet írni ezt a viselkedést, mely így egy szabad szemmel is tapasztalható jelenség.

Az első részben egy, a kaotikusságot kimutatni képes eljárást definiálunk. A technika egy Smale-patkó megmutatásán alapul, melynek léte egyszerű halmazelméleti tartalmazási tulajdonságokkal igazolható. Így ez az eljárás – az intervallumos számítógépes számításokkal ötvözve – képes matematikai bizonyító erővel kimutatni a kaotikus régiók létezését. A fejezet végén bemutatunk néhány gyakrabban használt főbb patkókat és a hozzájuk tartozó halmazelméleti tulajdonságokat.

A fejezetben szereplő technikák ismertetése során közölt tételeket matematikailag nem bizonyítjuk. Az 1.7. Tétel bizonyítását is csak a dolgozat megértéséhez szükséges mélységben mutatjuk be.

Majd a vizsgált inga bemutatása után megmutatjuk a vizsgált kényszererős fékezett inga periodikus megoldásait és megadjuk ezen megoldások kezdőértékeinek egy matematikailag is megbízható befoglalását. Majd a karakterisztikus multiplikátor módszerrel meghatározzuk ezen megoldások stabilitását/instabilitását.

A 2.5-ös fejezetben bemutatjuk egy a kaotikus viselkedéshez szükséges, de nem elégséges állítás számítógépes bizonyítását. Az ehhez tartozó numerikus eredmények és az állítás megtalálható a SCAN konferencia külöнкиadványában [6]. Majd a következő részben Hubbard ötletét követve egy teljes bizonyítást adunk [2] az ismertett inga kaotikus tulajdonságára, melyről egy összefoglaló dolgozatot is elkészítettünk [3].

A 4.1-es fejezetben a hagyományos ingán bemutatnuk egy az inga állapotaitól független stabilizálási eljárást. Ezen az eljárás alapján megpróbálkozunk az általunk tekintett kényszererős inga instabil megoldását stabilizálni. Majd a korábban

megismert számítógépes eljárással bebizonyítjuk a multilikátorok segítségével, hogy ez az eljárás valóban stabilizálja az inga instabil megoldását.

1. Kaotikus viselkedés és bizonyítása

1.1. A káosz definíciója

Egy rendszer kaotikusságához a legismertebb definíció szerint három tulajdonságnak kell teljesülnie a rendszerre [7, 16]. Vegyük sorra ezeket, melyekben \mathcal{J} tetszőleges halmaz lehet.

1.1. Definíció. Az $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ leképezés érzékenyen függ a kezdeti adatoktól, ha $\exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{J}$ és az x $\forall N_x$ környezetére $\exists y \in N_x$ és $\exists n \geq 0$, hogy $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Az előző definíció azt jelenti, hogy bármely két kezdőállapotból indulva – legyenek bármilyen közel is egymáshoz – idővel pozitív mértékben eltávolodhatnak egymástól a megoldások. Egy időtől független determinisztikus rendszerben azonban azonos kezdőállapotból indított megoldások mindig azonosak maradnak.

1.2. Definíció. Az $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ leképezés topologikusan keverő (topologically mixing), ha $\forall U, V \subset \mathcal{J}$ nyílt halmazra $\exists N > 0$, hogy $\forall n > N$ -re $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

A „topologikusan keverő” tulajdonság azt jelenti, hogy az összes nyitott halmaz egy idő múlva átfedi bármely másikat, adott régiót. Azaz egy idő múlva a két régió összekeveredik egymással. Ebből a keveredési tulajdonságból származik a keverő elnevezés.

1.3. Definíció. Az A halmaz sűrű X -ben, ha $\bar{A} \supset X$, ahol \bar{A} az A lezártja, azaz $\bar{A} = A \cup \{A \text{ torlódási pontjai}\}$.

Formálisan ez azt jelenti, hogy ha A sűrű X -ben, akkor minden X -beli pont minden környezete tartalmaz legalább egy pontot A -ból. Például a racionális számok sűrűk a $[0, 1]$ intervallumban.

1.4. Definíció. Az $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ leképezés $x \in \mathcal{J}$ pontját periodikusnak mondjuk, ha $\exists n > 0$, hogy $f^n(x) = x$.

Ez azt jelenti, hogy ha egy pontra egymás után alkalmazzuk a f leképezést, akkor a pontok sorozata periodikusan ismétlődik. A legkisebb olyan pozitív n számot, melyre teljesül a definícióban szereplő feltétel, szokás még x minimális periódusának is nevezni. Az x pontot n -periodikus pontnak, valamint az $n = 1$ esetben fixpontnak is hívják.

Ezen definíciók után nézzük, hogy mikor mondjuk, hogy egy rendszer kaotikus.

1.5. Definíció. Az $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ leképezés kaotikus, ha

1. f érzékenyen függ a kezdeti adatoktól,
2. f topologikusan keverő, és
3. f periodikus pontjainak halmaza sűrű \mathcal{J} -ben.

Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy egy rendszer nem attól kaotikus, hogy nem lehet meghatározni a trajektóriákat, hanem attól, hogy a rendszerben egy kis számítási hiba idővel nagyra is nőhet és lényegesen eltérő viselkedéseket eredményezhet.

Tekintsünk pár példát kaotikus rendszerekre.

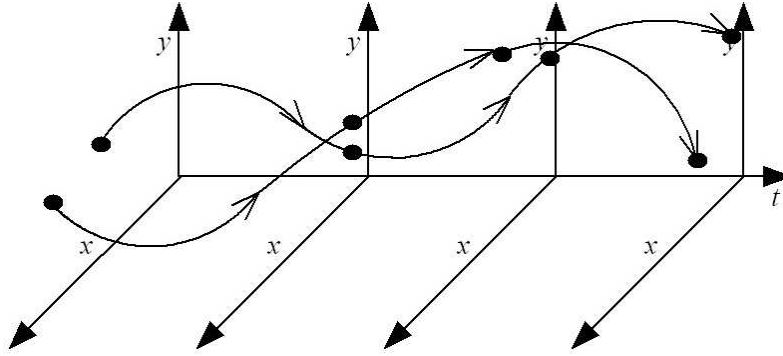
- Folytonos idejű rendszerek:
 - kettős inga,
 - Lorenz-modell,
 - dinamikai biliárd,
 - mágneses inga,
 - csigán lengő test;
- Diszkrét idejű rendszerek:
 - pék-leképezés,
 - Hénon-leképezés,
 - Ikeda-leképezés.

1.2. Egy praktikus feltétel a káosz létezésére

Egy rendszer kaotikusságát többféle módon is jellemezhetjük:

- az attraktor fraktál dimenziójával,
- a Lyapunov exponenssel,
- a bifurkációs diagrammal, vagy
- a Poincaré-leképezéssel.

A fraktáldimenziót úgy határozhatjuk meg, hogy a fraktált lefedjük különböző méretű négyzetekkel, és megszámoljuk, hogy adott s élhosszúságú négyzetből hány darab szükséges a lefedéséhez. Amennyiben a lefedéshez szükséges négyzetek $N(s)$ száma s^{-D} -vel arányosan nő az élhosszúság csökkenésével, a D számot a fraktál dimenziójának nevezzük, melynek nagysága utal a káosz nagyságára. Míg a Lyapunov-exponens a kezdeti pontatlanság exponenciális növekedésének sebességét számszerűsíti, és ezzel a káosz létezésére adhat bizonyítékot. A bifurkációs diagram esetében a periodikus pontok számának növekedésének alakulását láthatjuk



1. ábra. A Poincaré-leképezés illusztrálása.

egy paraméter függvényében, és ez nyújthat bizonyosságot a káoszra. De ezekkel jelen dolgozatban nem foglalkozunk.

A felsoroltak közül mi most csak a Poincaré-leképezést fogjuk alkalmazni a bizonyításhoz. Megmutatható, hogy a Poincaré-leképezések pontosan akkor kaotikusak, ha az eredeti folytonos rendszer is az volt [15]. Emiatt elegendő diszkrét dinamikai rendszerekkel foglalkozni, ha a kaotikus viselkedés általános tulajdonságait, törvényszerűségeit keressük.

1.6. Definíció. *Tekintsünk egy n dimenziós determinisztikus dinamikus rendszert, továbbá egy S -el jelölt $(n-1)$ -dimenziós hipersíkot. Az S -ből indított trajektória első metszéspontja az S hipersíkkal a Poincaré-, vagy stroboszkópikus-leképezés.*

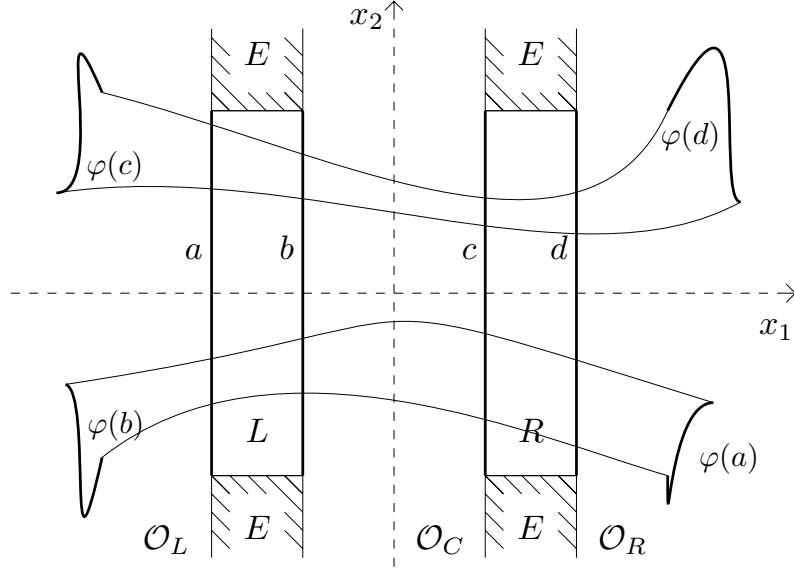
A Poincaré-leképezésre egy lehetséges példa: egy egyszerű, léghellenállás mentes inga sebességét feljegyezzük akkor, amikor a függőleges helyzeten áthalad. Mivel az egyszerű inga nem kaotikus rendszer, ezért mindig ugyanazt a sebességet fogjuk feljegyezni.

Jelen dolgozatban csak kétváltozós rendszerekkel foglalkozunk. Az időt is figyelembe véve már egy háromdimenziós rendszert kapunk. Ebben az esetben az időre vonatkozó hipersík mindig valamely adott időpillanat által meghatározott kétdimenziós síkot fogja jelenteni (lásd az 1. ábrát).

Az 1.5. Definícióban szereplő három feltétel csak speciális esetekben bizonyítható egy rendszerre. Nézzünk egy több esetben is alkalmazható feltételt a kaotikus régió létezésére, melyhez a Poincaré-leképezést használjuk.

Kezdetben ezen tételhez hasonló állítások bizonyításához a Brouwer-fokszámot és/vagy a Conley-indexet használták fel [8, 13]. Néhány speciális rendszer kaotikuságának számítógépes bizonyítása [17, 18] már sugallta a Brouwer-féle fixponttétel használatát az 1.7. Tétel bizonyítására. Az első ilyen fixponttételt használó bizonyítást Papini és Zanolin adta egy kétdimenziós esetben [12]. A tétel egzakt bizonyításában a fixponttétel általánosabb változatát a Lagrange-féle középértéktételt, vagy ennek a magasabb dimenziós változatát a Miranda tételt használjuk.

Az 1.7. Tételre és az ahhoz szükséges 1.8. Lemmára itt nem adunk egzakt matematikai bizonyítást, csak rámutatunk a bizonyítás lényeges pontjaira.



2. ábra. Az L, R halmaz és képeinek szükséges viszonya.

1.7. Tétel. Legyen $X = \mathbb{R}^2$ a Poincaré-metszet, melyen vegyük az alábbi kétdimenziós tartományokat:

$$E = \{x \in X \mid 1 \leq |x_1| \leq 2, |x_2| \geq 2\},$$

$$\mathcal{O}_L = \{x \in X \mid x_1 < -2\}, \quad \mathcal{O}_C = \{x \in X \mid |x_1| \leq 1\}, \quad \mathcal{O}_R = \{x \in X \mid x_1 > 2\},$$

$$L = \{x \in X \mid -2 \leq x_1 \leq -1, |x_2| \leq 2\}, \quad R = \{x \in X \mid 1 \leq x_1 \leq 2, |x_2| \leq 2\},$$

$$a = L \cap \mathcal{O}_L, \quad b = L \cap \mathcal{O}_C, \quad c = R \cap \mathcal{O}_C, \quad d = R \cap \mathcal{O}_R.$$

Vegyük egy folytonos $\varphi : L \cup R \rightarrow X$ Poincaré-leképezést, amelyre igaz, hogy

$$\varphi(a) \cup \varphi(d) \subset \mathcal{O}_R, \quad \varphi(b) \cup \varphi(c) \subset \mathcal{O}_L,$$

$$\text{és } \varphi(L \cup R) \subset X \setminus E$$

(lásd a 2. ábrát). Ekkor φ rendelkezik kaotikus régióval $L \cup R$ -en.

A tétel bizonyításához szükségünk van az 1.8. Lemmára.

1.8. Lemma. Az 1.7. Tételben megadott esetben, adott L - R mindkét irányban végtelen sorozathoz $(\{Q_{\gamma_k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, ha $\gamma_k \in \{0, 1\}$, és $Q_0 = L, Q_1 = R$) létezik olyan pontsorozat $(\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset X)$, hogy $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ és $x_k \in Q_{\gamma_k}$ minden $k \in \mathbb{Z}$ -re.

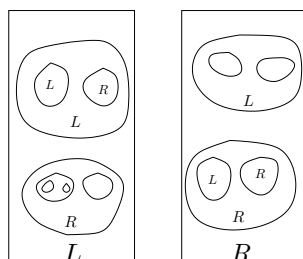
Bizonyítás. (Az 1.8. Lemma bizonyítása.)

$\varphi(L)$ és $\varphi(R)$ átfedi mind L -et, mind R -et. Vegyük a $\varphi^{-1}(\varphi(L) \cap L)$ -et. Ez egy olyan régió L -ben, melynek képe átfedi L -et. Az L a és b oldala lefedi a tekintett régió képeinek széléit. Mivel az a és b oldalak képei az L és R régiók ellentétes oldalain vannak, így a $(\varphi(L) \cap L)$ kép képe úgyszintén átfedi L -et és R -et is. Tekintsük a $\varphi^{-2}(\varphi(\varphi(L) \cap L) \cap L)$ -et és $\varphi^{-2}(\varphi(\varphi(L) \cap L) \cap R)$ -et. Ez két olyan régió

a $\varphi^{-1}(\varphi(L) \cap L)$ -ben, melyeknek a második képe átfedi L -et és R -et is. Ezt a gondolatmenetet R -re megismételve és folytatva a további iteráltakra, kialakul minden véges sorozathoz egy halmaz, melyből bármely pont iteráltjai az adott sorozatot írják le. Így egy tetszőleges végtelen sorozathoz találhatunk megfelelő pontot.

A mindkét irányban vételen sorozatokhoz pedig úgy találhatunk megfelelő pontot, hogy vegyük a sorozat korábbi elemeit és ahhoz találjunk megfelelő pontot, majd alkalmazzuk a pontra a leképezést. Folytonos leképezés esetén ezen, egyre korábbi sorozatokhoz tartozó megfelelő pontoknak van torlódási pontja, mely alkalmas lesz a mindkét irányban végtelen sorozathoz. Ezzel az állítást igazoltuk.

Ezen, mindkét irányban végtelen sorozatokhoz tartó ponthalmaz a rendszer egy kaotikus régiója. Az így kialakult halmazt szokás Cantor-szerű halmaznak nevezni (lásd a 3. ábrát). ■



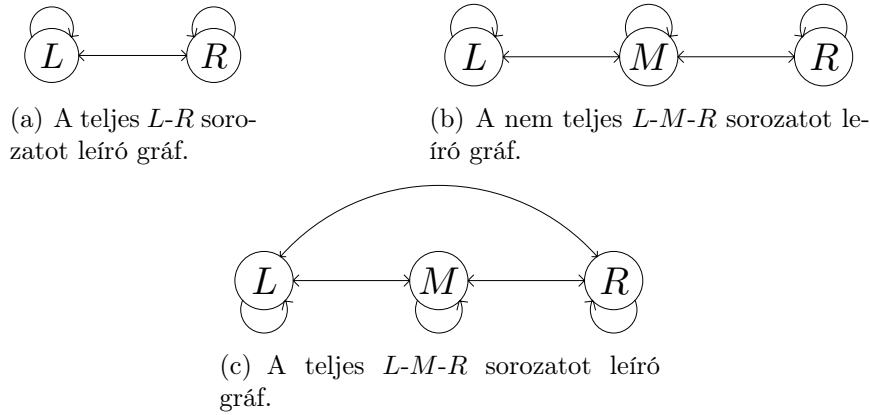
3. ábra. Cantor-szerű halmaz.

Bizonyítás. (Az 1.7. Tétel bizonyítása.)

Először vizsgáljuk meg, hogyan láthatjuk be a kezdőfeltételekre való érzékenységet. Legyen δ az L és R tartományok távolsága. Ez a távolság pozitív, mivel L és R diszjunktak és zártak. Vegyünk egy tetszőleges pontot, legyen a hozzá tartozó sorozat S . Ezen pont környezetében a folytonosságból adódik, hogy léteznek olyan pontok, melyekhez tartozó sorozatok eleje megegyezik S elejével, de ezen egyező rész után más szimbólum következik. Legyen az n . szimbólum az első eltérő szimbólum. Ha a leképezést $(n - 1)$ -szer alkalmazzuk a pontokra, akkor az egyik pont képe az L , míg a másiké az R régióba kerül. Így a távolságuk legalább δ , mellyel az első állítást igazoltuk.

A második állítás az, hogy ez a leképezés topologikusan keverő. Vegyünk egy nyílt halmazt, és abban egy pontot. A hozzá tartozó sorozat legyen S . Mivel az eredeti halmaz nyitott, így a pont környezetében találhatunk olyan halmazt az 1.8. Lemma alapján, amelyhez tartozó sorozatok eleje megegyezik S elejével, és az utána levő sorozatok az összes lehetséges sorozatot leírják. Azaz, ha az egyező sorozat hossza n , akkor a leképezést $(n - 1)$ -szer ismételve egy olyan halmazt kapunk, amely az összes pontot tartalmazza a kaotikus régióból, vagyis tetszőleges másik halmazt lefed. Ezzel igazoltuk a második állítást.

A harmadik állításhoz vegyünk egy tetszőleges pontot. Legyen a hozzá tartozó sorozat S . Ha S periodikus, akkor a harmadik feltételben szereplő tartalmazás egyértelmű. Ha S nem periodikus, akkor vegyük csak az S első szimbólumát tartalmazó sorozathoz tartozó periodikus pontot, majd vegyük az első két szimbólumhoz



4. ábra. A sorozatokat leíró gráfok.

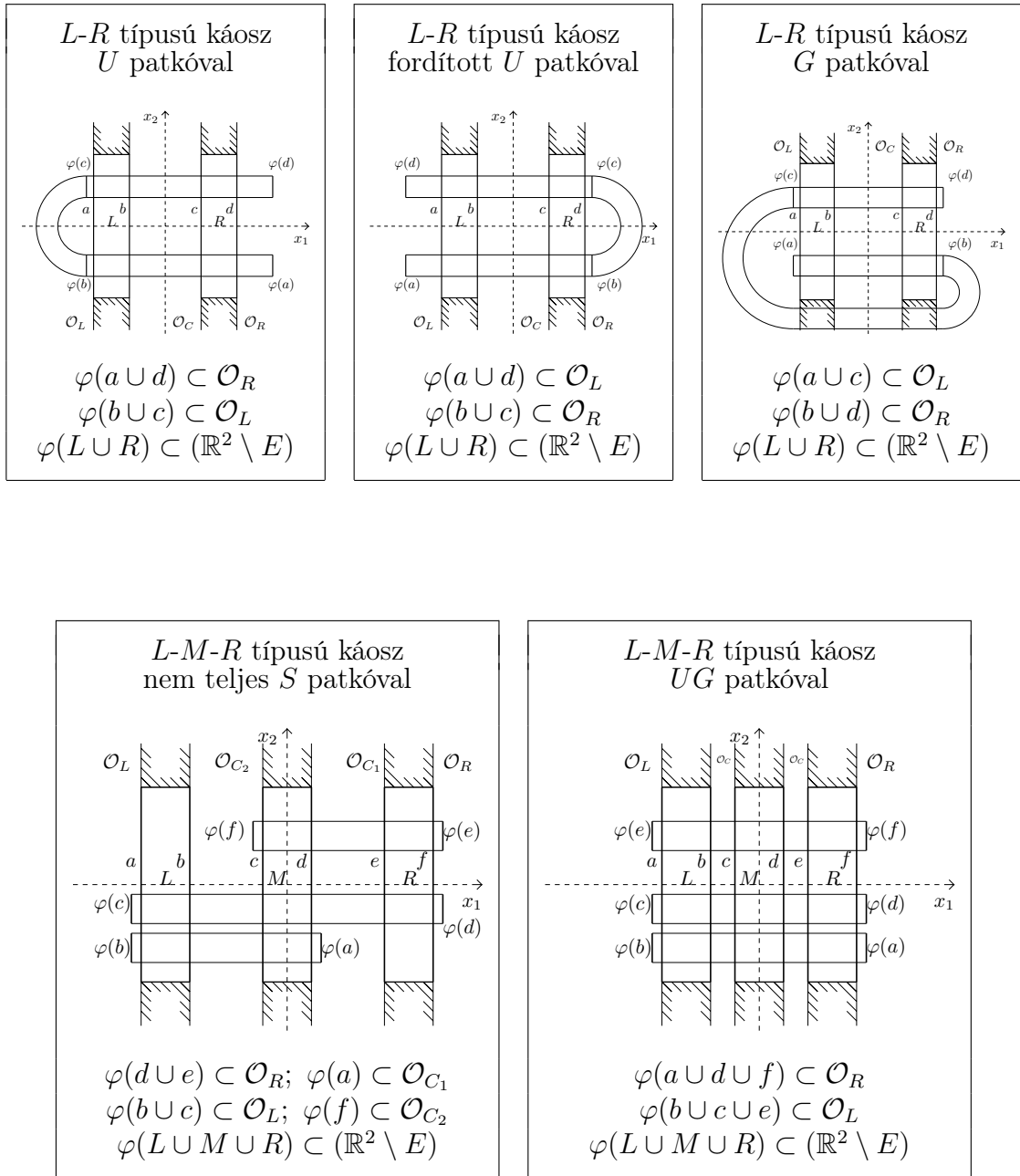
tartozó periodikus pontot, és így tovább. Ebben az esetben ezen periodikus sorozatok torlódási pontja S , így a tartalmazást is beláttuk. Ezzel a harmadik állítást is igazoltuk, mellyel bizonyítottuk, hogy a fent definiált leképezésnek van kaotikus régiója. ■

Ez a fajta kaotikus viselkedés az úgynevezett „ L - R ” típusú káosz. A feltételek egy „ U ” típusú, úgynevezett Smale-patkó létezésének a feltételei. Az 1. táblázatban különböző típusú káoszt mutatunk be a hozzájuk tartozó feltételekkel. Megjegyezzük, hogy az L és R közötti régiónak a képe belemetszhet az E halmazba, mely a G patkó illusztrálásánál látható is. Egyébként, ha ez a belemetszés nem történik meg, akkor egy bonyolultabb patkószerkezet is létezhet. Például, a G patkó esetén egy L - M - R típusú káosz teljes S patkóval. Továbbá, a nem teljes S patkónál az a és f oldalaknak nem szükséges az \mathcal{O}_{C_1} és \mathcal{O}_{C_2} régiókba esniük, hanem elegendő az M régiótól jobbra, illetve balra esnie. Ezt a későbbiekben részletesen tárgyaljuk.

Az U és G patkók esetében az összes L - R sorozathoz létezik azt megvalósító pont. A sorozatokat leíró gráfot a 4(a) ábrán láthatjuk. Az UG patkóban észrevehetünk egy teljes U , illetve G patkót. E rendszer esetében az összes L - M - R sorozathoz létezik azt megvalósító pont. Az ilyen sorozatokat leíró gráfot a 4(c) ábrán láthatjuk. Az S típusú patkó esetén két U típusú patkó összekapcsolódását vehetjük észre. Ebben az esetben nem létezik az összes L - M - R típusú sorozathoz pont. Az olyan sorozatokhoz nem tudjuk bizonyítani a megfelelő pont létezését, amelyben az LR vagy az RL kombináció valamelyike előfordul. Az ilyen sorozatokat leíró gráfot a 4(b) ábrán láthatjuk.

Ezen struktúrák túl speciálisak, és ezeket a specialitásokat erősen kihasználják a káosz létezésének bizonyítása során. Egy bonyolultabb struktúra esetén rendszerint egy homeomorf leképezést mutatnak a vizsgált rendszer és ezen struktúrák között.

A vizsgált kényszererős fékeztett inga esetében az UG patkó létezését fogjuk megmutani.



1. táblázat. 5 különböző patkó szerkezete. Az egyes patkókhoz tartozó geometriai szerkezetet mutató ábrák felett szerepel a káosz és a patkó típusa, alatta pedig a szükséges halmazelméleti feltételek.

2. A kaotikusság irányában

2.1. A kényszererős fékezett inga

Jelen fejezetben egy kényszererős fékezett ingát vizsgálunk, mely egy 1 szabadsági fokkal rendelkező mechanikai rendszer. Egy m tömegű pontszerű test lóg egy l hosszú súlytalan, merev rúdon (lásd az 5. ábrán). Ez azt jelenti, hogy a pontszerű test egy kör mentén mozoghat, melynek sugara l . A vizsgált ingára három erő hat. Az egyik a gravitáció, amelynek nagysága g és függőlegesen lefelé hat. A másik a légellenállás, amelynek nagysága a test sebességétől függ, és iránya ellentétes a pontszerű test mozgásának irányával. A forgási sebesség és ezen erő hányadosa legyen konstans, és jelöljük ezt $(-\gamma)$ -val, ahol $\gamma > 0$. A harmadik egy periodikus külső erő, amely hat az inga sebességére az inga minden pozíciójában. Ez a kényszererő legyen $A \cos t$, ahol A egy konstans és t az idő. Ekkor a rendszer felírható egy másodrendű differenciálegyenlettel:

$$mlx''(t) = -mg \sin x(t) - \gamma lx'(t) + A \cos t,$$

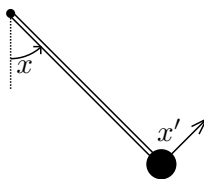
ahol x az inga függőlegessel bezárt szöge, és x' az inga forgási sebessége. A tömeget egységnyinek választva és az inga hosszával (l) leosztva az előző egyenletet az alábbi egyenlethez jutunk:

$$x''(t) = -\frac{g}{l} \sin x(t) - \gamma x'(t) + \frac{A}{l} \cos t.$$

A további szabad paraméterek megválaszthatóak úgy ($g = l$ és $A = l$), hogy az alábbi egyenletet kapjuk:

$$x''(t) = -\sin x(t) - 0.1x'(t) + \cos t.$$

Ez az egyenlet fogja vizsgálataink tárgyát képezni. Korábbi, a kapcsolódó irodalom-beli eredményekből tudható, hogy az ilyen rendszerek numerikus megoldásai nagyon érzékenyek néhány pont közelében [5]. Hasonló szögből és kicsit eltérő szögsebességekkel elindított megoldások láthatóak a 6. ábrán.

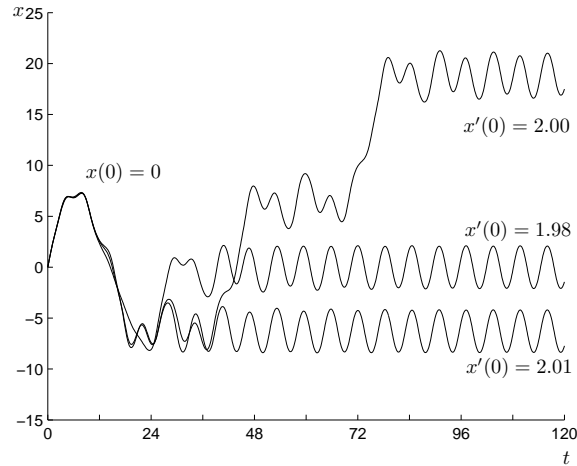


5. ábra. A kényszererős fékezett inga.

A fenti egyenletet felírhatjuk az alábbi formában is:

$$x_1'(t) = x_2(t),$$

$$x_2'(t) = -0.1x_2(t) - \sin x_1(t) + \cos t,$$



6. ábra. A kényszererős fékezett inga pár trajektóriája.

ahol x_1 az inga szöge, míg x_2 az inga szögsebessége.

A káosz bizonyításához egyik eszköz a Poincaré-leképezés. Mivel a kényszererő 2π periodikus, így a Poincaré-képeket a $t = 2n\pi$ időpillanatokban vesszük, ahol n egy egész szám. Az ezen időpillanatok között kialakult leképezések azonosak. Így a trajektória követéséhez elegendő a Poincaré-leképezést ($\mathcal{P} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$) iterálni, melyet az alábbi módon definiálhatunk:

$$\mathcal{P} : (x(0), x'(0)) \mapsto (x(2\pi), x'(2\pi)).$$

Megjegyzendő, hogy ez a Poincaré-leképezés x -ben 2π periodikus, mivel az inga szöge is 2π periodikus, és egyik erő sem függ a körbefordulások számától. De amíg a hagyományos inga szimmetrikus x -ben is, a mi rendszerünk nem az, mivel a kényszererő nem szimmetrikusan hat az inga szimmetrikus szögeiben.

2.2. Megbízható módszer a Poincaré-leképezés befoglalására

A káosz bizonyításához a Poincaré-leképezést is megbízható módon kell megadni. Mivel ez a leképezés nem írható fel zárt alakban, így egyetlen megoldás marad, a trajektória követése a $[0, 2\pi]$ időintervallumon. Egy adott pontra a Poincaré-leképezést a trajektória helyzete adja meg a $t = 2\pi$ időpillanatban.

Több megbízható differenciálegyenlet-rendszert megoldó szoftver létezik, melyek szabadon felhasználhatók [4]. A választásunk a könnyű használat, és a széleskörűen elismert teljesítménye miatt a VNODE-ra (Validated Numerical ODE) esett [14]. A csomag működése a Taylor-sorfejtésen alapul. Erőssége az, hogy a lépéshosszt automatikusan választja meg, és így ott végez kisebb lépéseket, ahol ez szükséges. Ezzel a módszerrel nagyobb pontosságot képes elérni. A csomag további előnye, hogy a trajektóriákat időben előre- és hátrafelé is tudja követni.

A program egyetlen hátránya számunkra, hogy csak számítógépen ábrázolható időpillanatokban képes megadni a trajektória helyzetét. A Poincaré-leképezésben

szereplő 2π azonban nem ábrázolható számítógépen, így az alábbi átalakítással használjuk az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}y_0'(t) &= \pi, \\y_1'(t) &= \pi(y_2(t)), \\y_2'(t) &= \pi(-0.1y_2(t) - \sin y_1(t) + \cos t).\end{aligned}$$

Erre a módszerre a $t = 2$ időpillanatban kapjuk meg a Poincaré-leképezést. A Poincaré-leképezés inverzét pedig a $t = -2$ időpillanatban. Ezen két függvény értékét jelöljük az I 2 dimenziós intervallumra $P(I)$ -vel és $P^{-1}(I)$ -vel.

2.3. A periodikus pontok

A kaotikus viselkedésben fontos szerepet játszanak a periodikus pontok. Ezek helyének és stabilitásának vizsgálata szükséges a káosz bizonyításához. Korábbi eredményekből tudható [11], hogy ilyen rendszereknek legalább egy periodikus megoldása van, de ennél többre lesz szükségünk.

Jelen részben csak a Poincaré-leképezés fixpontjaival foglalkozunk, ugyanis léteznek olyan periodikus pontjai az ingának, melyek 2π időközönként ugyanazt az állapotot veszik fel, de közben legalább egyszer körbefordulnak. Sejthető, hogy egy bizonyos értéknél nagyobb sebességgel mozgó inga nem lehet periodikus. Durva számításokkal az alábbi felső korlátot kapjuk a kaotikus inga sebességére:

$$|x_2| < \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)e^{0.1t} dt < 10.1.$$

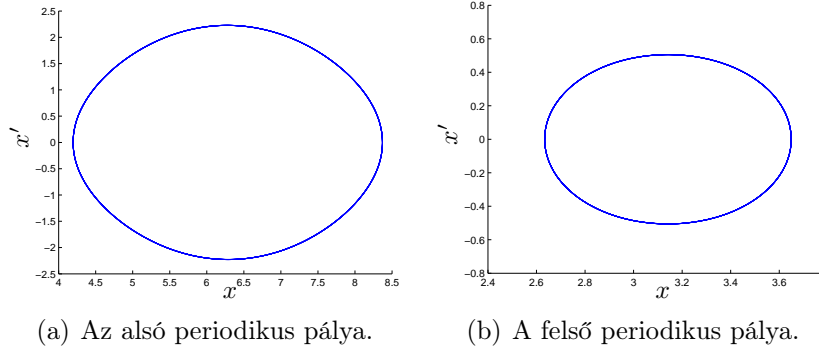
A periodikus pontok kereséséhez egy egyszerű megbízható B&B eljárást alkalmaztunk. A keresési terület az

$$(x, x') \in [0, 2\pi] \times [-10.1, 10.1]$$

kezdő intervallum volt. A B&B eljárásunk olyan 2 dimenziós intervallumokat (I_i) generál a kezdő intervallumból, melyekre igaz az alábbi állítások valamelyike:

1. az I_i intervallumnak nincs közös pontja a $P(I_i)$ és $P^{-1}(I_i)$ legalább egyikével, vagy
2. az I_i intervallum kicsi (a felhasználó által beállított méretű), és van közös pontja a $P(I_i)$ -vel és a $P^{-1}(I_i)$ -vel is.

A periodikus pontok csak a második halmazban lehetnek. Következő lépésként az ezen csoportban lévő közös ponttal rendelkező intervallumokat összevonjuk egy nagyobb intervallumba, amely tartalmazza mindkét kisebb intervallumot. Ezt mindaddig csináljuk, míg van ilyen intervallum a csoportban. Ezzel feltehetően pontosan annyi intervallumot kapunk, mint ahány periodikus pontja van a rendszernek, és mindegyiknek egy-egy garantált befoglalását nyerjük. Sajnos ez a technika egyelőre nem zárja ki, hogy egy-egy „dobozban” több vagy akár egy periodikus pont se szerepeljen.



7. ábra. A periodikus pályák.

Esetünkben ezen 2 dimenziós intervallumok az alábbiaknak adódtak:

$$(x, x')_1 = ([2.634272, 2.634274], [0.02604294, 0.02604485]),$$

$$(x, x')_2 = ([4.236893, 4.236894], [0.3926964, 0.3926973]).$$

Megvizsgálva a trajektóriákat, azt sejtjük, hogy az első egy felső egyensúlyi pályát, míg a második egy alsó egyensúlyi pályát feltételez (lásd a 7. ábrát).

A létezés és az egyértelműség igazolásához a karakterisztikus multiplikatort fogjuk használni. Ezt az úgynevezett variációs egyenlet módszerrel határozzuk meg. Ehhez szükségünk van a jobboldalak x_1 és x_2 szerinti deriváltjaira, melyek a következők:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & -0.1 \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy az x'_2 -nek az x_1 szerinti deriváltja tartalmazza az x_1 -et, így szükségünk van a megoldásra is, melyet csak numerikusan befoglalva tudunk megadni. Így az alábbi differenciálegyenlet-rendszert vizsgáljuk:

$$\begin{aligned} z'_1(t) &= z_2(t), \\ z'_2(t) &= -0.1z_2(t) - \sin z_1(t) + \cos t, \\ z'_3(t) &= z_4(t), \\ z'_4(t) &= -0.1z_4(t) - z_3(t) \cos z_1(t). \end{aligned}$$

A z_1 és z_2 teljesen azonos az x_1 -gyel, illetve x_2 -vel, és ezek fogják a megoldást minden időpillanatra kiszámolni, míg a z_3 és z_4 a multiplikatort tartalmazzák.

Az eljárás során a differenciálegyenlet z_1, z_2 kezdőértékei legyenek az első fixpont koordinátái, valamint $z_3(0) := 1$ és $z_4(0) := 0$. Ezekkel az értékekkel kiszámolt Poincaré-leképezés z_3 és z_4 értékei legyenek egy A_1 2×2 -es mátrix első oszlopa. Az A_1 mátrix második oszlopát hasonlóan számoljuk ki, csak a $z_3(0) := 0$ és $z_4(0) := 1$. Az így adódó mátrix:

$$A_1 = \begin{pmatrix} [169.6369, 169.6370] & [168.7925, 168.7926] \\ [152.9595, 152.9597] & [152.2012, 152.2014] \end{pmatrix},$$

melynek sajátértékeinek befoglalása:

$$\alpha_1^1 = [321.8363, 321.8368],$$

$$\alpha_1^2 = [0.001421, 0.001894].$$

Mivel abszolút értékben az egyik nagyobb, mint 1, a másik pedig kisebb, ezért az $(x, x')_1$ intervallum pontosan 1 instabil fixpontot tartalmazhat.

Hasonlóan a másik intervallumra:

$$A_2 = \left(\begin{array}{cc} [-0.7426217, -0.7426218] & [0.09101517, 0.09101522] \\ [-0.04890921, -0.04890920] & [-0.7123905, -0.7123904] \end{array} \right),$$

melynek sajátértékei

$$\alpha_2^1 = [-0.7275062, -0.7275061] + \sqrt{[-0.01689209, -0.01689190]},$$

$$\alpha_2^2 = [-0.7275062, -0.7275061] - \sqrt{[-0.01689209, -0.01689190]}.$$

Mivel a valós rész abszolút értéke mindkét esetben kisebb mint 1, így ez egy stabil fixpontot tartalmaz.

2.4. A stabil periodikus pont

Korábban megmutattuk, hogy a

$$(x, x')_2 = (4.23689 \dots, 0.39269 \dots).$$

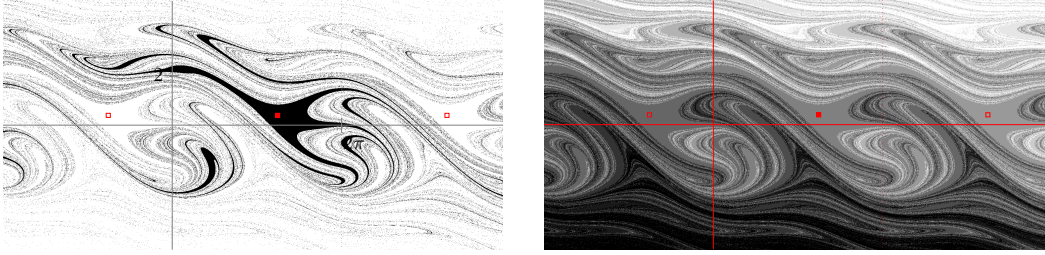
pontból induló megoldás egy stabil periódikus megoldás. Természetesen az első koordinátában 2π és ennek többszöröseivel eltolt megoldások is hasonlóan viselkednek. Valószínűleg ez a megoldás a hagyományos inga (kényszererő nélküli fékezett inga) alsó stabil egyensúlyi állapotából, míg az instabil megoldás a hagyományos inga felső nem stabil állapotából bifurkálódott.

Hasonlóan mint a hagyományos ingánál ennek a megoldásnak is van egy vonzókörzete, azaz ezekből indított megoldások a stabil periódikus megoldásokba tartanak. Ezt a vonzókörzetet láthatjuk a 8(a) ábrán. Ha ezt a vonzókörzetet megrajzoljuk a többi periódikusan eltolt megoldásokra is, akkor alakul ki a Wada tavakként emlegetett halmaz melyet a 8(b) ábrán láthatunk.

2.1. Definíció (Wada tavak). *Az \mathbb{R}^n térben definiált halmazok rendelkeznek a Wada tavak tulajdonságaival, ha bármely két halmaz közös határpontja az összes többi halmaz határpontja is.*

Más szavakkal mondva, bármilyen közletről is nézünk egy határt ott az összes definiált halmaz megjelenik. Jelen esetünkben ez azt jelenti, hogy egy ilyen határpont közelében az összes periódikus megoldás vonzókörzete megjelenik. Azaz ezen pontokból tetszőlegesen kicsit elmozdítva tetszőleges periódikus megoldást elérhetünk, melyek természetesen csak az addig megtett körbefordulások számában különbözik csak.

A vizsgált rendszerünk (x, x') terének nem minden pontja tartozik valamely stabil megoldás vonzókörzetébe (pl. instabil megoldás), későbbiekben ezen pontokkal foglalkozunk.



(a) Egy stabil megoldás vonzáskörzete.

(b) Több stabil megoldás vonzáskörzete.

8. ábra. A stabil periodikus megoldások vonzáskörzetei.

2.5. A káosz létezésének szükséges feltétele

Definiáljunk egy N négyszöget az (x, x') térben. Ez a négyszög tartalmazza a megismert instabil fixpontot. Legyen ezen négyszög a stabil sokaság irányában keskeny és az instabil sokaság irányában pedig hosszú. Ezen N téglalap $2k\pi$ -szeres x tengely irányába való eltolásaival kapott négyszögeket jelöljük N_k -val. A kaotikus viselkedés bizonyítása előtt annak egy következményét próbáljuk bizonyítani.

A rendszer kaotikus viselkedését a következő tétel jellemzi:

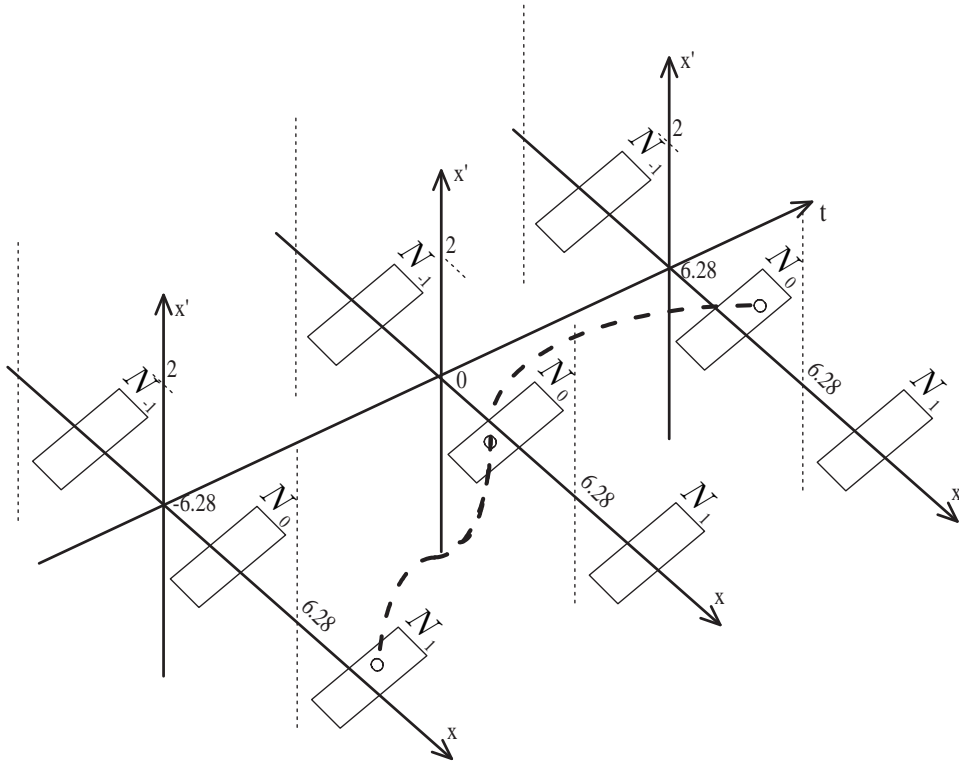
2.2. Tétel. *Tekintsünk egy tetszőleges, mindkét irányban végtelen hosszú $i_j \in \mathbb{Z}$ sorozatot, melyre minden j -re igaz, hogy $|i_j - i_{j+1}| \leq 1$. Ha az ingának létezik olyan (x, x') kezdőállapota, hogy az inga állapota a $2j\pi$ időpillanatban eleme az N_{i_j} négyszögnek, akkor a rendszer kaotikus.*

Most bizonyítsuk ezen tétel egy következményét:

2.3. Állítás. *Az összes N_-, N_0, N_+ ($N_-, N_+ \in \{N_{-1}, N_0, N_1\}$) háromhosszú sorozathoz létezik az ingának olyan $(x, x') \in N_0$ kezdőállapota, hogy $P^{-1}(x, x') \in N_-$ és $P(x, x') \in N_+$.*

Az állításban szereplő háromhosszú sorozat egy részsorozata a fenti tételben szereplő végtelen hosszú sorozatnak. Továbbá, csak azt a tulajdonságát használtuk ki, hogy az inga szöge 2π periodikus, így a középső elemet nyugodtan vehetjük az N_0 négyszögnek. Ezekkel az észrevételekkel már megmutattuk, hogy az utóbbi állítás egy szükséges, de nem elegendő feltétele a tételben szereplő kaotikus viselkedésnek. Egy az állításban szereplő, lehetséges N_1, N_0, N_0 sorozathoz tartozó trajektóriát illusztrálunk a 9. ábrán.

Az állítás bizonyításához elegendő az összes lehetséges háromhosszú sorozathoz mutatni egy-egy olyan pontot melyre igaz, hogy a Poincaré-képei az előírt négyszögekbe esnek. Minden egyes keresés során egy B&B eljárást fogunk alkalmazni. A kereső algoritmus (az 1. Algoritmus) végrehajtása során akkor dobunk el egy intervallumot, ha valamely képének nincs közös pontja az elvárt célterülettel. Ha egy intervallumra igaz mind a 3 tartalmazás, akkor az intervallum bármely pontja megfelel az adott sorozatnak. Ilyen háromhosszú sorozatból összesen 9 létezik, azaz a kereső eljárást ennyiszor futtatjuk a megfelelő célterületekkel. A 2. táblázatban a 9



9. ábra. Egy a N_1, N_0, N_0 sorozathoz tartozó trajektória illusztrálása.

keresés eredményét, illetve a 10. ábrán az N_1, N_0, N_0 sorozathoz tartozó megoldás trajektóriájának garantált befoglalását adtuk meg.

Ezzel a típusú eljárással csak véges hosszú részsorozatra tudjuk belátni, hogy létezik hozzá pont, mely az adott sorozatot „követi”. A kaotikussághoz azonban végtelen hosszú sorozatokra kell ezt belátni, így ezen módszer nem alkalmas a káosz teljes bizonyítására. Azaz a káosz bizonyításához vissza fogunk nyúlni az Hénon-leképezésnél megismert technikákhoz.

3. A káosz matematikai bizonyítása

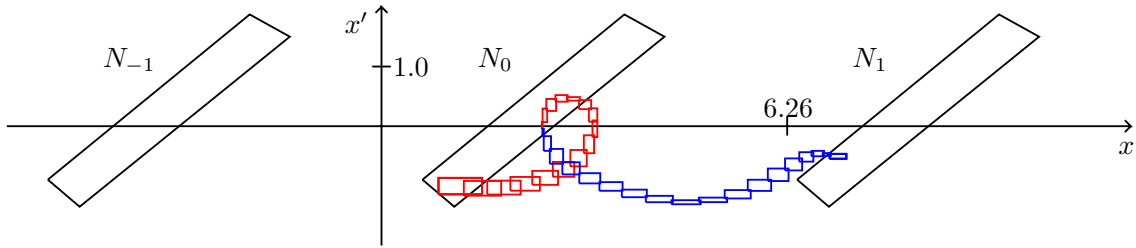
3.1. J. Hubbard tétele a kaotikus viselkedésre

Hubbardnak, a tekintett inga kaotikusságára vonatkozó tételének ismertetése előtt vezessük be az alábbi jelöléseket:

- Jelöljük a $[2k\pi, 2(k + 1)\pi]$ időintervallumot I_k -val.
- $\epsilon_{k \in \mathbb{Z}}$ egy szimbólum, melynek értékkészlete $\{-1, 0, 1\}$.
- – Ha az I_k időintervallumban az inga az óra járásával megegyező irányban pontosan egyszer haladt át az alsó ponton, akkor azt mondjuk, hogy az inga az $\epsilon_k = -1$ szerinti mozgást végezte.

Cél-terület	P^{-1} melletti / eredeti / P melletti intervallum (x, x' koordinátái)	CPU idő (s)	Int-ok száma
N_0	[2.317648, 2.709306] [-0.050055, 0.342587]	383	1 390
N_0	[2.628677, 2.629443] [0.021484, 0.021973]		
N_0	[1.076006, 1.253059] [-1.048104, -0.964307]		
N_1	[7.632088, 7.660986] [-0.512440, -0.483095]	363	1 615
N_0	[2.696904, 2.698438] [-0.047852, -0.046875]		
N_0	[0.990481, 1.369249] [-1.100671, -0.899117]		
N_{-1}	[-2.894219, -2.710906] [1.155728, 1.233331]	402	1 595
N_0	[2.607979, 2.609512] [0.041992, 0.042969]		
N_0	[1.028439, 1.405768] [-1.086193, -0.880000]		
N_0	[2.284252, 2.669446] [-0.003131, 0.381040]	694	3 178
N_0	[3.751748, 3.752515] [1.072266, 1.072754]		
N_1	[7.173756, 7.188131] [-1.052968, -1.048956]		
N_1	[7.556686, 7.831820] [-0.896126, -0.595137]	356	1 364
N_0	[3.875938, 3.888203] [1.062500, 1.070313]		
N_1	[7.265608, 7.524591] [-1.042681, -0.922727]		
N_{-1}	[-2.811017, -2.345166] [1.059322, 1.274043]	561	2 292
N_0	[3.719551, 3.722617] [1.078125, 1.080078]		
N_1	[7.186581, 7.247708] [-1.049464, -1.030382]		
N_0	[2.342858, 2.729911] [-0.079739, 0.311653]	1 001	5 258
N_0	[1.421279, 1.422046] [-0.881836, -0.880859]		
N_{-1}	[-1.755311, -1.745855] [1.595219, 1.602129]		
N_1	[7.704982, 8.076489] [-0.812236, -0.355093]	384	1 462
N_0	[1.520938, 1.533203] [-0.968750, -0.953125]		
N_{-1}	[-2.091369, -1.911043] [1.343996, 1.492038]		
N_{-1}	[-2.798045, -2.243367] [0.960221, 1.221012]	652	2 853
N_0	[1.404414, 1.410547] [-0.847656, -0.843750]		
N_{-1}	[-1.877814, -1.815990] [1.502639, 1.548777]		

2. táblázat. A 2.3. Állítás bizonyításához szükséges intervallumok, az azok megtalálásához szükséges CPU idő és a generált intervallumok száma.



10. ábra. Az N_1, N_0, N_0 sorozathoz tartozó megoldás trajektóriájának garantált befoglalása.

- Ha az I_k időintervallumban az inga *nem* haladt át az alsó ponton, akkor azt mondjuk, hogy az inga az $\epsilon_k = 0$ szerinti mozgást végezte.
- Ha az I_k időintervallumban az inga *az óra járásával ellentétes irányban pontosan egyszer* haladt át az alsó ponton, akkor azt mondjuk, hogy az inga az $\epsilon_k = 1$ szerinti mozgást végezte.

Megjegyzendő, hogy az alsó pont alatt azt értjük, hogy az inga szöge egyenlő $2k\pi$ -vel, valamilyen egész k -ra. Ekkor az inga nincs egyensúlyban, mint ahogy ez a korábbi eredményeinkből látható. Azt is érdemes megjegyezni, hogy az ϵ_k szerinti mozgáson kívül léteznek egyéb típusú mozgások is. Például az I_k időintervallum alatt többször is átmegy az alsó ponton. Most az ilyen típusú mozgásokat figyelmen kívül hagyjuk, a kaotikus viselkedést csak e három típust tartalmazó trajektóriákra mondjuk ki.

3.1. Tétel (Hubbard). *Az összes, mindkét irányban végtelen hosszú $\epsilon_k \in \{-1, 0, 1\}$ -val megadott sorozathoz létezik olyan $(x(0), x'(0))$ kezdőérték, amelyre az inga az I_k időintervallumok alatt az ϵ_k szerinti mozgást végzi.*

Ez azt jelenti, hogy tetszőlegesen előírhatjuk azt, hogy az inga az egymás utáni 2π hosszú időintervallumok alatt melyik irányba haladjon át az alsó ponton, vagy azt, hogy ne haladjon át az adott idő alatt ezen a ponton. Például előírhatjuk azt a sorozatot, mely szerint a $[-2\pi, 0]$ idő alatt jobbra, míg a $[0, 2\pi]$ idő alatt balra, majd a $[2\pi, 4\pi]$ idő alatt ne haladjon át, és végül a $[4\pi, 6\pi]$ idő alatt megint balra haladjon át az alsó ponton (lásd a 11 ábrán). A tétel szerint ezt a sorozatot mindkét irányban tetszőlegesen folytatva is létezik az ingának olyan kezdeti szöge és sebessége, melyből elindítva az előírt sorozatot írja le.

Hubbard a cikkében [9] kimondta a tételt, de egzakt matematikai bizonyítást nem tudott adni rá, habár a bizonyítás egy lehetséges menetét leírta. A következőkben ez alapján adunk bizonyítást.

3.2. A bizonyítás menete

A kaotikusságot bizonyító patkók keresése csak a Poincaré-metszeteken alkalmazható. Jelen esetben ezen Poincaré-metszetek az inga szöge és sebessége terében vannak. Azaz az itt létrejövő területek, melyek mutatják a patkó létezését, szögsebesség párokból álló halmazok. Ezen halmazok tetszőleges bejárására ad egzakt

1. Algoritmus. Az adott sorozathoz tartozó kiindulási intervallum keresése.

Input:

- ϵ : a részintervallumok felhasználó által beállított minimális mérete,
- N_0 : a tekintett halmaz,
- N_-, N_+ : az aktuális célhalmazok.

Output:

- egy intervallum, amely megfelel az adott sorozathoz, vagy
- nem talál ϵ -nál nagyobb intervallumot, amely megfelelne.

- 1. lépés** Számoljuk ki a kezdő intervallumot.
- 2. lépés** Tegyük be ezt az intervallumot a verembe.
- 3. lépés** Vegyünk ki egy v intervallumot a veremből.
- 4. lépés** Határozzuk meg a v intervallum legszélesebb oldalát.
- 5. lépés** Számoljuk ki a transzformált $w_- = P^{-1}(v)$ és $w_+ = P(v)$ intervallumokat.
- 6. lépés** Ha a $v \subset N_0, w_- \subset N_-$ és $w_+ \subset N_+$, akkor

a keresés sikeres volt, írjuk ki v -t és STOP,

egyébként,

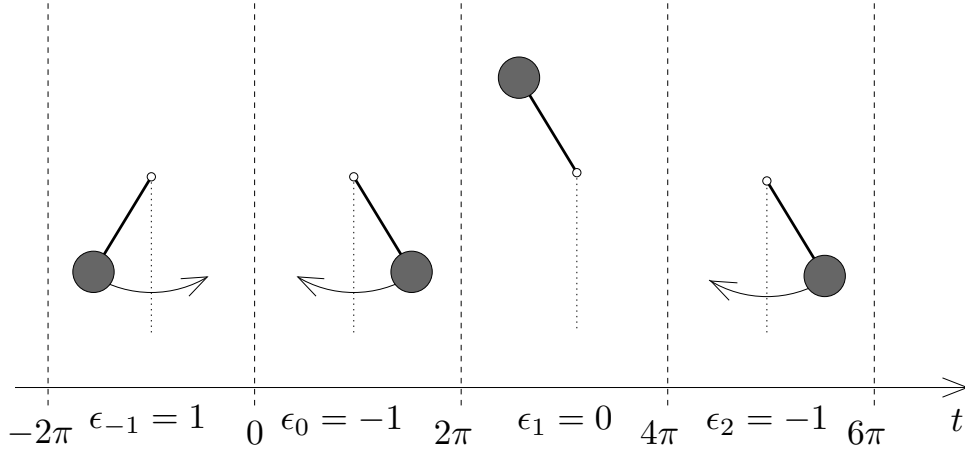
ha a v intervallum szélesebb oldala nagyobb, mint a felhasználó által adott érték, $v \cap N_0 \neq \emptyset, w_- \cap N_- \neq \emptyset$ és $w_+ \cap N_+ \neq \emptyset$, akkor vágjuk ketté v -t a szélesebb oldala mentén, rakjuk be a két részintervallumot a verembe és folytassuk a 3. lépéssel.

- 7. lépés** Ha a verem üres, akkor a keresés nem sikerült és STOP, egyébként folytassuk a 3. lépéssel.
-

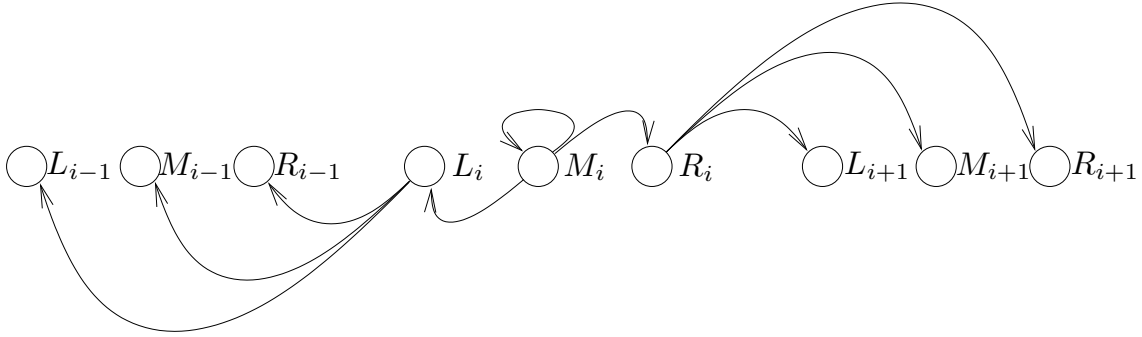
bizonyítást a patkók létezésére. Jelen esetben egy teljes L - M - R típusú UG patkót fogunk keresni. A patkót mutató halmazokat rendre L , M és R szimbólumokkal fogjuk jelölni, és ezt a teret szimbolikus térnek fogjuk nevezni. Ha a Poincaré-metszeteken sikerül bizonyítani a patkó létezését, akkor már tudjuk, hogy a rendszer kaotikus, de a tétel ennél erősebbet állít. A tételben szereplő események a két Poincaré-metszet között bekövetkezett ingamozgásokat írják elő. Így a következő lépésben meg fogjuk mutatni, hogy a kaotikus pontok ilyen típusú mozgásokat fognak végrehajtani a 2π hosszú idő alatt. Azaz a bizonyításunk a következő két részből fog állni:

- 1.** Az (x, x') szimbolikus térben mutatunk olyan L , M és R halmazokat, amelyekre bizonyíthatjuk a káosz létét, azaz tetszőleges $\{Q_{\gamma_k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (ahol $\gamma_k \in \{-1, 0, 1\}$ és $Q_{-1} = L, Q_0 = M, Q_1 = R$) sorozathoz mutatunk egy pontot a szimbolikus térben, melynek a trajektóriája épp az adott sorozatot járja be.
- 2.** Megmutatjuk, hogy az (x, x') szimbolikus térben kimutatott káosz ekvivalens az ingán definiált káosszal, azaz az L, M, R szimbólumok rendre ekvivalensek az $\epsilon_k = -1, \epsilon_k = 0, \epsilon_k = 1$ típusú mozgással.

Bár, eddig egyetlen L , M , illetve R halmazról beszéltünk, de tulajdonképpen végtelen sok van belőlük, ugyanis az inga szöge 2π szerint periodikus. Jelöljük ezen halmazokat rendre L_i -vel, M_i -vel és R_i -vel. Mivel azt akarjuk belátni, hogy az L_i halmazból induló inga pontosan egyszer megy át az alsó ponton, így csak az L_{i-1} ,



11. ábra. Egy lehetséges mozgássorozat 4 hosszú részlete.



12. ábra. A kényszererős inga kaotikusságát leíró gráf egy részlete.

M_{i-1} és R_{i-1} halmazokba mehet, és hasonlóan, az M_i halmazból az L_i , M_i és R_i -be, és az R_i -ből az L_{i+1} , M_{i+1} és R_{i+1} -be. Ezen átmenet gráf egy részletét láthatjuk a 12. ábrán.

Ebben a térben egy „igazi” patkó tulajdonképpen nem is alakul ki, mivel nem saját magukat fedik át, hanem a szomszédos hasonló régiókat. Azonban, ha csak magát az ingát tekintjük, akkor mégis kialakul a patkó szerkezet. Ez a gondolat szimbolikusan azt jelenti, hogy az eredeti síkbeli állapothalmazt egy végtelen magas henger palástjára képezzük le.

3.3. Káosz bizonyítása a szimbolikus térben

Az L_i , M_i és R_i halmazok helyzete periodikus, így elegendő ezek egyikére belátni, hogy átfedi a megfelelő L_j , M_j és R_j halmazokat. Legyenek ezek az L_0 , M_0 és R_0 halmazok, melyekre bizonyítjuk az átfedéseket. A bizonyítás során nem az $L_{\pm 1}$, $M_{\pm 1}$ és $R_{\pm 1}$ halmazokkal való átfedést fogjuk bizonyítani, hanem a Poincaré-metszetet fogjuk eltolni az x tengely mentén $\mp 2\pi$ -vel. Jelöljük a $+2\pi$ -vel eltolts Poincaré-leképezést P^+ -szal, és a -2π -vel eltoltsat P^- -szal. Azt, hogy a leképezés ténylegesen az L_0 esetén az L_{-1} , M_{-1} és R_{-1} halmazokat fedi át, azt az L_0 oldalának a képeinek

a megfelelő eltolásával fogjuk igazolni. Azaz, ha az L_0 jobb, illetve bal oldalainak a képét eltoljuk $+2\pi$ -vel és azok az L_0 , M_0 és R_0 átellenes oldalain vannak, akkor az eredeti képek az L_{-1} , M_{-1} és R_{-1} átellenes oldalain kell, hogy legyenek. Az M_i esetén hasonló bizonyítunk, ha nem toljuk el az oldalak képeit. Az R_i esetében pedig -2π -vel kell eltolni a jobb és bal oldalainak a képét, azaz a P^- leképezést kell használni a megfelelő átfedéshez.

Jelöljük az L_0 és M_0 közötti területet C_0^L -vel, az M_0 és R_0 közötti területet C_0^R -val. Ekkor az E halmaz tartalmazni fogja az L_0 , C_0^L , M_0 , C_0^R és R_0 felső és alsó oldalait, valamint egy-egy innen induló félegyenest függőlegesen fel és le. Az E halmaztól balra, illetve jobbra eső régiók legyenek az \mathcal{O}_L és \mathcal{O}_R halmazok, melyeknek jobb, illetve bal szélei 2π távolságra lesznek egymástól. Továbbá ne legyen ezeknek közös pontja az E halmazzal, valamint az L_0 , C_0^L , M_0 , C_0^R és R_0 halmazokkal.

Ezek után a helyesen megválasztott \mathcal{O}_L , \mathcal{O}_R és E halmazokra az alábbi halmazelméleti tulajdonságoknak kell teljesülnie:

$$P^+(b) \cup P(c) \cup P^-(e) \subset \mathcal{O}_L, \quad (1)$$

$$P^+(a) \cup P(d) \cup P^-(f) \subset \mathcal{O}_R, \quad (2)$$

$$P^+(L_0) \cup P(M_0) \cup P^-(R_0) \subset (\mathbb{R}^2 \setminus E), \quad (3)$$

ahol a, \dots, f rendre az L_0 , M_0 és R_0 halmazok bal és jobb oldalai.

A (1-3) feltételek igazolására az eltolások szerint három-három B&B eljárást fogunk alkalmazni.

3.4. Az inga mozgásának bizonyítása

Az előző feltételek már garantálják, hogy L_0 és R_0 esetében az áthaladások száma páratlan, és M_0 esetében páros. Például L_0 esetében az L_{-1} , M_{-1} és R_{-1} valamelyikébe került a trajektória, így egyszer biztosan áthaladt az alsó ponton a megfelelő irányban. Ha további áthaladások is bekövetkeztek volna, akkor egy ellentétes irányú áthaladásnak is lennie kellene, mivel csak ekkor kerülhet a trajektória a megfelelő halmazba. Azaz elegendő azt bizonyítani, hogy ilyen ellentétes áthaladások nem történtek. Így a trajektória bármely pontjára az alábbi feltételeknek nem szabad teljesülnie:

1. ha $x = -2(k-1)\pi$, akkor $x' \geq 0$;
2. ha $x = 2k\pi$, akkor $x' \leq 0$

az összes $k \in \mathbb{N}^+$ -ra. Mivel két átfordulásra nincs szükségünk, ezért a trajektória összes pontjára az alábbi feltételeknek kell teljesülnie:

1. ha $x = 0$, akkor $x' < 0$;
2. ha $x = 2\pi$, akkor $x' > 0$;
3. $x \neq 4\pi$;
4. $x \neq -2\pi$.

A bizonyítás során szeretnénk minél könnyebben leírható L , M és R halmazt tekinteni, így egyszerű négyszögekkel fogunk próbálkozni. Ekkor előfordulhat, hogy

a bővebb halmazokra már nem lesz igaz az, hogy az L halmazból induló trajektóriák pontosan egyszer haladnak át az alsó ponton, és hasonlóan a többire sem. Számunkra viszont csak azok a pontok érdekesek, amelyek benne vannak a kaotikus halmazban, így elegendő csak azokat a trajektóriákat vizsgálni, amelyek a 2π időpillanatban az L , M és R halmazok valamelyikében vannak. Ezzel az ötlettel tulajdonképpen egy alkalmas szűrést végzünk a megfelelő halmazokon. Ezek után már egy B&B eljárás alkalmazása elegendő lehet a bizonyításhoz.

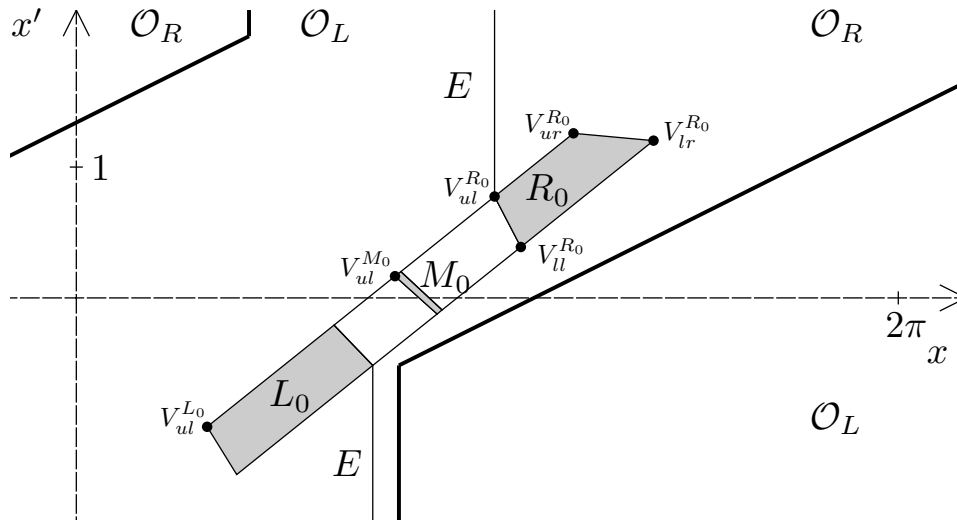
3.5. A bizonyítás futási eredményei és a megfelelő halmazok

Néhány kísérlet után az alábbi négyszögekkel sikerült bizonyítani Hubbard tételét (lásd a 13. ábrát):

$$\begin{aligned}
V_{ul}^{L_0} &= (1.000, -0.985), & V_{ur}^{L_0} &= (1.970, -0.208), \\
V_{ll}^{L_0} &= (1.226, -1.350), & V_{lr}^{L_0} &= (2.266, -0.516), \\
V_{ul}^{C_0^L} &= (1.970, -0.208), & V_{ur}^{C_0^L} &= (2.436, 0.166), \\
V_{ll}^{C_0^L} &= (2.266, -0.516), & V_{lr}^{C_0^L} &= (2.758, -0.123), \\
V_{ul}^{M_0} &= (2.436, 0.166), & V_{ur}^{M_0} &= (2.481, 0.201), \\
V_{ll}^{M_0} &= (2.758, -0.123), & V_{lr}^{M_0} &= (2.796, -0.092), \\
V_{ul}^{C_0^R} &= (2.481, 0.201), & V_{ur}^{C_0^R} &= (3.197, 0.775), \\
V_{ll}^{C_0^R} &= (2.796, -0.092), & V_{lr}^{C_0^R} &= (3.398, 0.389), \\
V_{ul}^{R_0} &= (3.197, 0.775), & V_{ur}^{R_0} &= (3.800, 1.258), \\
V_{ll}^{R_0} &= (3.398, 0.389), & V_{lr}^{R_0} &= (4.412, 1.202).
\end{aligned}$$

A patkó létezésének a bizonyításához szükséges számítási idő közel fél órányi volt (lásd a 3. táblázatot). Ez a viszonylag hosszú ellenőrzési idő kizárta tette, hogy egy teljesen automatizált keresést alkalmazzunk, de az előzetes ismeretek alapján az nem is volt indokolt. Mint látható, ha egy valós rendszert szeretnénk vizsgálni, a káosz keresése nehéz és időigényes lehet. A 14. ábrán láthatóak az ellenőrzött intervallumok a (3) feltétel esetében (a három B&B eljárás összevont eredménye). Megfigyelhető, hogy az M halmazban nagyon sok kicsi intervallum található. Ez a régió tartalmazza az instabil fixpontot. Azaz, ha a hozzá tartozó 321-es értékű sajátértékből következő nyújtásra gondolunk, akkor nem is olyan meglepő, hogy ilyen sok kisméretű intervallum szükséges a bizonyításhoz.

A patkó létezése csak a kaotikusságot bizonyítja. A teljes bizonyításhoz az inga mozgására is bizonyítani kell az állításban szereplő mozgásokat. Az R , M és L régiók Poincaré-képei szerepelnek a 15. ábrán. Látható, hogy az M_i régió képe „átnyúlik” az $x = 0$ és az $x = 2\pi$ egyeneseken. Hasonlóan az L_i az $x = -2\pi$ -n és az $x = 0$ -án, valamint az R_i az $x = 2\pi$ -n és az $x = 4\pi$ -n. Így nem igaz például, hogy az összes M_i -ből induló trajektória nem megy át az alsó ponton. Így a trajektória mozgásának leírásához szükséges a régiók szűrése az alapján, hogy az eredmény



13. ábra. A káosz bizonyításának megfelelő halmazok.

Feltétel	Adott halmaz	Intervallumok száma	CPU idő (másodperc)
(1)	b oldal	53	3
	c oldal	425	21
	e oldal	89	5
(2)	a oldal	49	3
	d oldal	543	24
	f oldal	137	8
(3)	L_0 négyszög	3 653	133
	M_0 négyszög	33 209	1 097
	R_0 négyszög	8 525	382

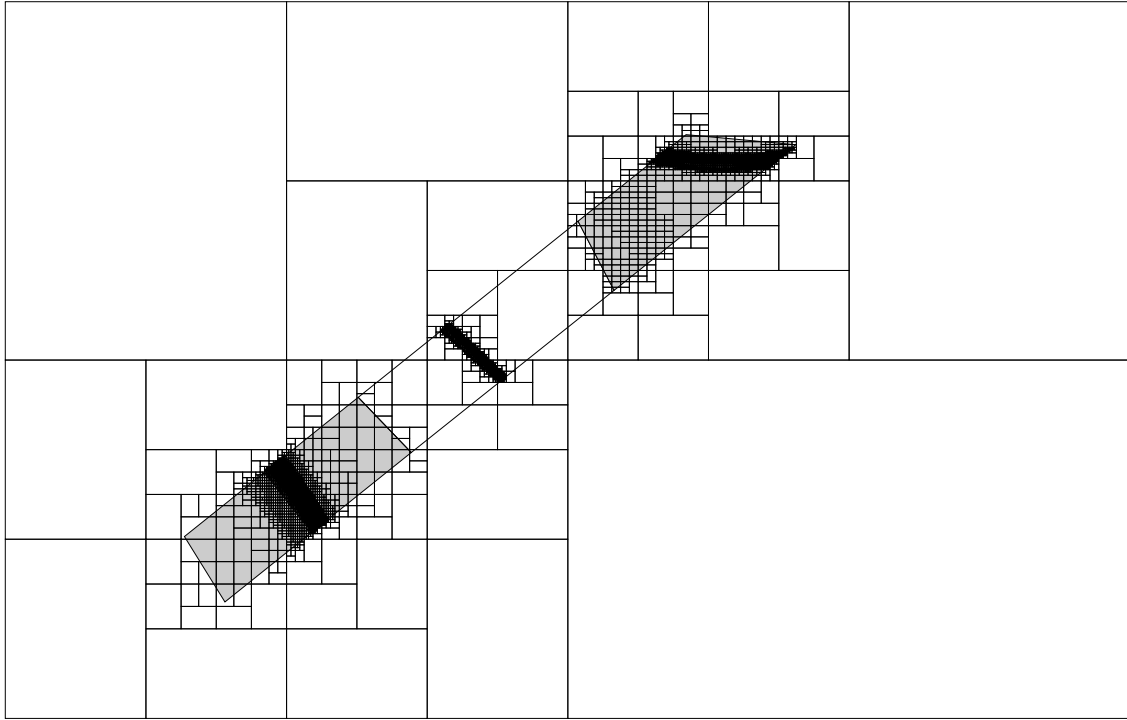
3. táblázat. A patkó létezésének bizonyításához szükséges CPU idők és a generált intervallumok száma.

intervallumnak van-e közös pontja a L_i , M_i és R_i régiók valamelyikével. Ez a szűrés nyilvánvalóan helyes, ugyanis a kaotikus állapotok között csak ilyen trajektóriák szerepelnek. Ezen megkötés mellett 1 855 intervallum képének kiszámításával 90 másodperc alatt sikerült bizonyítani az inga mozgására kimondott állítást.

4. Az instabil megoldás stabilizálása

4.1. Az egyszerű inga stabilizálása

Kétféle stabilizálási eljárást ismertet a szakirodalom. Az egyik az, amikor a dinamikai rendszer állapotától függően befolyásoljuk a rendszert. Ezt vagy folytonosan, vagy diszkrét időközönként tehetjük meg. Ez a típusú kontroll, melyet „visszacatolásos technikának” is neveznek, a kezdő állapotok sokkal szélesebb körére stabilizálja



14. ábra. Az ellenőrzött intervallumok.

a kívánt állapotot. A másik eljárás az, amikor a dinamikai rendszer éppen aktuális állapotától nem függ a rendszerre ható erő. Ebben az esetben a kezdő állapotok sokkal kisebb halmazára tapasztalható a stabilizálódás. Jelen esetben ezen második eljárással foglalkozunk.

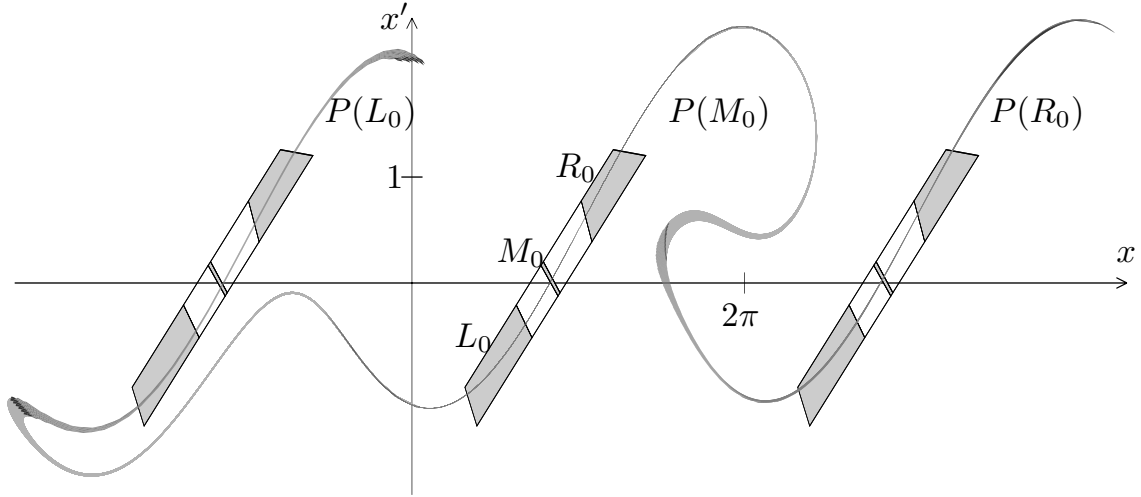
Ismert az a tény, hogy az egyszerű inga felső egyensúlyi állapota instabil. Bizonyított [1], hogy a felfüggesztés megfelelő mozgatásával ezt stabillá lehet tenni. Egy ilyen eredményt érhetünk el a felfüggesztési pont adott periódusú és nagyságú függőleges irányú oszcilláló mozgatásával (Ezt a rendszert szokták Kapica ingának is nevezni, a szovjet P. L. Kapica fizikus után, aki először figyelte meg a most tárgyalt jelenséget). Ennek a mozgásnak a gyorsulása legyen

$$\frac{8ap^2}{l} \sin(pt),$$

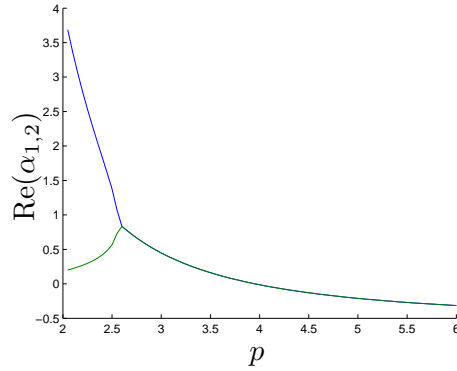
ahol a a kitérés amplitúdója, l az inga hossza, és p a kitérések száma 2π idő alatt. Ekkor a hagyományos inga differenciálegyenlete az alábbi formában írható fel:

$$x''(t) = \left(-\frac{g}{l} + \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) \right) \sin x - \gamma x'.$$

A stabilitás vizsgálatához alkalmazhatjuk a korábban is használt variációs egyenlet módszerét. Jelen esetben ismert, hogy az ingának két fixpontja van, melyek közül az egyik stabil (az alsó egyensúlyi állapot), a másik pedig instabil (a felső egyensúlyi állapot). Vizsgálataink most a felső egyensúlyi állapotra koncentrálódnak és ezt



15. ábra. A kényszererős fékezett inga kaotikus tartományának Poincaré-képei.



16. ábra. Az sajátértékek valós részének abszolút értékének alakulása.

szeretnénk stabilizálni. A fenti egyenlet periódusideje $\frac{2\pi}{p}$, azaz ilyen hosszan fogjuk vizsgálni a variációs egyenletrendszert. Ezen idő alatt a periodikus pálya ismert (konstans π), így nincs szükségünk a pálya kiszámítására. Ezen észrevételekkel az egyenletrendszer az alábbi módon adható meg:

$$\begin{aligned} z_3'(t) &= z_4(t), \\ z_4'(t) &= \left(-\frac{g}{l} + \frac{8ap^2}{l} \sin(pt)\right) z_3(t) - \gamma z_4(t). \end{aligned}$$

További vizsgálatainkban a kaotikus kényszererős fékezett ingához legjobban hasonlító rendszert vizsgáltuk, azaz $\gamma = 1$ és $l = g = 9.81$. Megvizsgáltuk, hogy milyen gyorsan kell mozgatni a felfüggesztési pontot, ha azt szeretnénk, hogy a felső egyensúlyi állapot stabilizálódjon. Ehhez az kell, hogy teljesüljön az, hogy a fent említett differenciálegyenlet-rendszerrel kapott mátrix sajátértékeinek abszolút értékei 1-nél kisebbek legyenek. Konstans $a = 1$ és különböző p paraméterek mellett a 16. ábra jeleníti meg ezen értékeket.

4.2. A kényszererős fékezett inga stabilizálása

Az előző módszer analógiájára, a kaotikus kényszererős fékezett inga stabilizálásával próbálkozunk. Legyen a kényszererős fékezett inga felső instabil periodikus megoldásának a szöge az idő függvényében $\hat{x}(t)$. Az előző eredmények alapján sejtethető, hogy egy $\hat{x}(t)$ irányú és $\frac{8ap^2}{l} \sin(pt)$ értékkel gyorsuló felfüggesztési ponttal rendelkező kényszererős fékezett ingának stabilizálódik a felső instabil egyensúlyi pályája valamely a és p paraméterre. Ebben az esetben a középpont függőleges irányú gyorsulása:

$$\cos(\hat{x}(t)) \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) = \omega_f,$$

a vízszintes irányú gyorsulása pedig:

$$\sin(\hat{x}(t)) \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) = \omega_v.$$

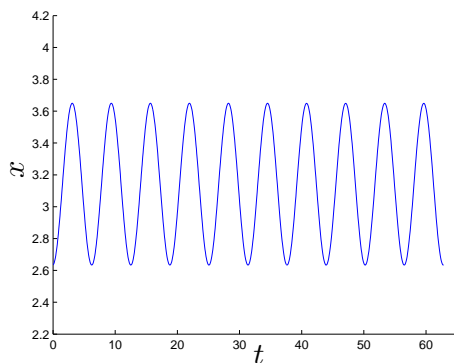
Ekkor az alábbi formában írható fel a differenciálegyenlet:

$$x''(t) = (-1 - \omega_f) \sin(x) + \omega_v \cos(x(t)) - 0.1x' + \cos(t).$$

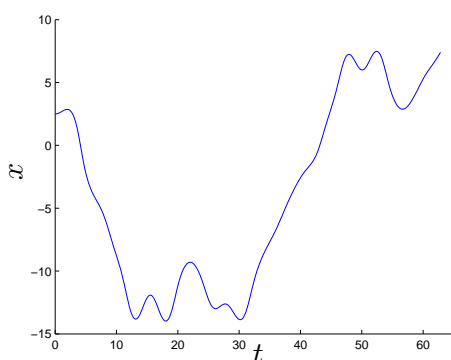
Az $a = 0.5$ és $p = 4$ paraméterekkel következett be egy stabilizálódás. Ezt mutatja a 17. ábra. A 17(a) ábrán az inga szögének alakulását láthatjuk az idő függvényében a felső instabil állapotban. Ezzel a mozgatással ezt az instabil állapotot szeretnénk stabilizálni. Egy közeli állapotból indított inga szögének alakulását láthatjuk a 17(b) ábrán. Majd ugyanezen állapotból a mozgással ellátott rendszer alakulását mutatja a 17(c) ábra. Sejtethető, hogy ezen külső mozgatás hatására az inga szöge tart a felső pályához és ez stabilizálja a tekintett pályát.

A bizonyításhoz a Poincaré-metszeteken alkalmazott multiplikátor módszert alkalmazzuk. Ennek vizsgálatához a kényszererő periódusának, és a középpont gyorsulásának periódusának összemérhetőnek kell lennie. Ez jelen esetben igaz, és a minimális közös periódus 2π . A vizsgálandó differenciálegyenlet az alábbi módon alakul:

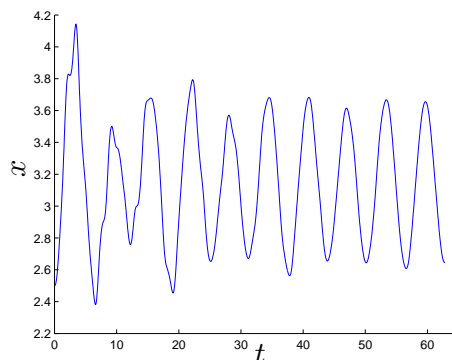
$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2'(t), \\ z_2'(t) &= -0.1z_2(t) - \sin(z_1(t)) + \cos(t), \\ z_3'(t) &= z_4'(t), \\ z_4'(t) &= \left(-1 - \cos(z_1(t)) \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) \right) \sin(z_3(t)) + \\ &\quad + \left(\sin(z_1(t)) \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) \right) \cos(z_3(t)) - 0.1z_4(t) + \cos(t), \\ z_5'(t) &= z_6'(t), \\ z_6'(t) &= \left(\left(-1 - \cos(z_1(t)) \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) \right) \cos(z_3(t)) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\sin(z_1(t)) \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) \sin(pt) \right) \sin(z_3(t)) \right) z_5(t) - bz_6(t). \end{aligned}$$



(a) Felső instabil pálya.



(b) Kontroll nélküli kaotikus mozgás.



(c) Kontrollált mozgás.

17. ábra. A kényszererős inga stabilizálódása.

A z_1 és z_2 megegyezik az eredeti kényszererős fékezett inga egyenletrendszerével. Ennek feladata a periodikus megoldás kiszámítása, mely segítségével meg tudjuk határozni a középpont gyorsulásának irányát. A stabilizáló mozgással ellátott egyenletrendszert alkotja a z_3 és z_4 , míg a multiplikátorok számítását a z_5 és z_6 végzi.

Ekkor a korábban ismertett módszerrel kapott mátrix két sajátértéke a felső, kezdetben instabil megoldásra:

$$\lambda^1 = [-0.416498, -0.415888] + [0.59792, 0.602524]i,$$

és

$$\lambda^2 = [-0.416498, -0.415888] - [0.59792, 0.602524]i,$$

azaz ez a pálya a rezegtetéssel stabil.

Vegyük észre, hogy az ω_f és az ω_v gyorsulások nem függenek az éppen aktuális inga állapotaitól – sem a sebességétől, sem a szögétől. Ezen függvényekben csak a felső instabil pálya megoldása szerepel, melyet akár előre kiszámíthatunk és eltárolhatunk. Tehát a jelen problémán alkalmazott mozgatás a nem visszacsatolásos technikák körébe tartozik.

Hivatkozások

- [1] V.I. Arnold: *Közönséges differenciálegyenletek*. 1978, Műszaki Könyvkiadó (Budapest).
- [2] B. Bánhelyi–T. Csendes–B.M. Garay–L. Hatvani: A computer-assisted proof for Σ_3 -chaos in the forced damped pendulum equation. 2007. Kézirat.
- [3] B. Bánhelyi–T. Csendes–B.M. Garay–L. Hatvani: Computer assisted proof of chaotic behaviour of the forced damped pendulum. In *Proceedings of the Colloquium on Differential and Difference Equations (CDDE2006), Brno (Czech Republic)*, Folia Facultatis Scientiarum Naturalium Universitatis Masarykianae Brunensis. Mathematica konferenciasorozat. 2007, Masaryk University. Közlésre elfogadva.
- [4] M. Berz–K. Makino–K. Shamseddine–G. Hoffstätter–W. Wan: COSY INFINITY and its applications to nonlinear dynamics. In M. Berz–C. Bischof–G. Corliss–A. Griewank (szerk.): *Computational Differentiation: Techniques, Applications, and Tools*. 1996, SIAM (Philadelphia), 363–365. p. Proceedings of the SIAM Workshop on the Automatic Differentiation of Algorithms, Santa Fe (New Mexico, USA).
- [5] R. Borrelli–C. Coleman: Computers, lies and the fishing season. 25. évf. (1994), *The College Mathematics Journal*, 401–412. p.
- [6] T. Csendes–B. Bánhelyi–L. Hatvani: Towards a computer-assisted proof for chaos in a forced damped pendulum equation. 199. évf. (2007), *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 378–383. p.
- [7] R. Devaney: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 1989, Addison-Wesley (Redwood City).
- [8] M. Gidea–P. Zgliczyński: Covering relations for multidimensional dynamical systems. 202. évf. (2004), *Journal of Differential Equations*, 32–58. p.
- [9] J. Hubbard: The forced damped pendulum: Chaos, complication and control. 106. évf. (1999), *American Mathematical Monthly*, 741–758. p.
- [10] J. Hubbard–B. West: *ODE Architect Companion, Lab book*. Chaos and Control fejezet. 1999, John Wiley & Sons (New York), 221–232. p.
- [11] J. Mawhin: Periodic oscillations of forced pendulum-like equations. 964. évf. (1982), *Ordinary and Partial Differential Equations*, 458–476. p.
- [12] D. Papini–F. Zanolin: Fixed points, periodic points, and coin-tossing sequences for mappings defined on two-dimensional cells. 2004. évf. (2004) 2. sz., *Fixed Point Theory and Applications*, 113–134. p.
- [13] M. Pireddu–F. Zanolin: Fixed points for dissipative–repulsive systems and topological dynamics of mappings defined on n -dimensional cells. 5. évf. (2005), *Advanced Nonlinear Studies*, 411–440. p.

- [14] VNODE Package home page.
<http://www.cas.mcmaster.ca/~nedialk/Software/VNODE/VNODE.shtml>.
- [15] S. Wiggins: *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. 2003, Springer-Verlag (Berlin).
- [16] Chaos theory from Wikipedia.
http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory.
- [17] P. Zgliczyński: Fixed point index for iterations of maps, topological horseshoe and chaos. 8. évf. (1996), *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 169–177. p.
- [18] P. Zgliczyński: Multidimensional perturbations of one-dimensional maps and stability of Sharkovski ordering. 9. évf. (1999), *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1867–1876. p.