

2-3. alkalom

Optimalizálási eljárások a MATLAB-ban

Optimalizálási problémák

- Az alábbi általános formában írhatjuk fel a szélsőérték feladatokat:

$$\begin{array}{c} h(x_i) = b \\ g(x_i) \leq b \\ \hline f(x_i) \Rightarrow \min(\max) \end{array}$$

- Amennyiben a $h()$, $g()$ feltételek nincsenek, akkor feltétel nélküli feladatokról beszélünk.
- A modellalkotás feladata, hogy a feladatot ilyen formába írja fel.

Optimalizálási problémák osztályozása

- Többféleképpen is osztályozhatóak az optimalizálási problémák.
 - Feltételek szerint:
 - Feltétel nélküli szélsőérték-feladatok
 - Feltételes szélsőérték-feladatok
 - Változók száma szerint:
 - Egyváltozós
 - Többváltozós
 - Célfüggvény típusa szerint:
 - Nemlineáris célfüggvény
 - Lineáris célfüggvény

Egyváltozós feltétel nélküli szélsőérték feladat

- Egy városnak dönteni kell, hogy milyen magas gátat építsen. A gát x -el való megemelésének költsége $I_0 + kx$ ($I_0 = 10$, $k = 10$). Ha a tengerszint átlépi a gátat, akkor $V (= 100)$ nagyságú kár keletkezik. Annak a valószínűsége, hogy egy éven belül meghaladja a x magasságot (p legyen $0, 1$):

$$p(x) = e^{-px}$$

A kérdés, mekkora gátat építsünk, hogy minél kisebb legyen a veszteségünk $r = 10\%$ kamatlábat feltételezve.

Modell

- Mi legyen a változó?
 - x legyen az építendő gát magassága.
- Hogyan alakul a célfüggvény?
 - A várható kár az árvízből:

$$\sum_{i=1}^{inf} p(x) V (1+r)^{-i} = p(x) V / r$$

- A teljes célfüggvény:

$$-(I_0 + kx) - p(x) V / r \Rightarrow \min$$

Megoldás MATLAB-ban

- Ez egy feltétel nélküli egyváltozós nemlineáris szélsőérték probléma.
- Egy lehetséges MATLAB-os optimalizálási eljárás a *fminbnd*.
 - `[x fval] = fminbnd(fun,x1,x2,options)`
- Ez az eljárás a parabolikus interpolációs (parabolic interpolation) eljáráson alapszik.

Parabolikus interpolációs eljárás

- Adott a, b, c hármass. Az $[a, c]$ intervallumon közelíti a függvényt egy parabolával.
- Ekkor a parabola minimuma az alábbi pontban található:

$$x' = b - \frac{1}{2} - \frac{(b-a)^2(f(b)-f(c)) - (b-c)^2(f(b)-f(a))}{(b-a)(f(b)-f(c)) - (b-c)(f(b)-f(a))}.$$

A feladat megoldása MATLAB-ban

- *Lásd a monitoron.*

Többváltozós feltétel nélküli szélsőérték feladat

- Adott egy „egységnégyzet” ország, továbbá ebben 10 egyenrangú város. Szeretnénk úgy elhelyezni egy légikikötőt, hogy az összes városba az eljutási idő összege minimális legyen.



Modell

- Mik legyenek a változók?
 - x_x, x_y legyenek a kikötő koordinátái.
- Hogy alakul a célfüggvény?
 - Egy várostól vett távolság az alábbi:

$$d_i = \sqrt{((V_i^x - X_x)^2 + (V_i^y - X_y)^2)}$$

- Azaz a célfüggvény (b):

$$\sum d_i \Rightarrow \min$$

Megoldás MATLAB-ban

- Ez egy feltétel nélküli nemlineáris szélsőérték probléma.
- Egy lehetséges MATLAB-os optimalizálási eljárás a *fminsearch*.
 - `[x fval] = fminsearch(fun,x0,options)`
- Ez az eljárás a szimplex keresési eljáráson (simplex search method), vagy más néven a Nelder-Mead eljáráson alapszik.

Szimplex keresési eljárás I.

- Egy n dimenziós problémánál vesz $n+1$ db alappontot (szimplexet).
- Lerendezi ezen pontokat a függvényértékek szerint:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_{n+1})$$

- Majd kiszámolja az első n pont (súlyozott)közepponjtjára (x_0) tükrözött képét x_{n+1} -nek:

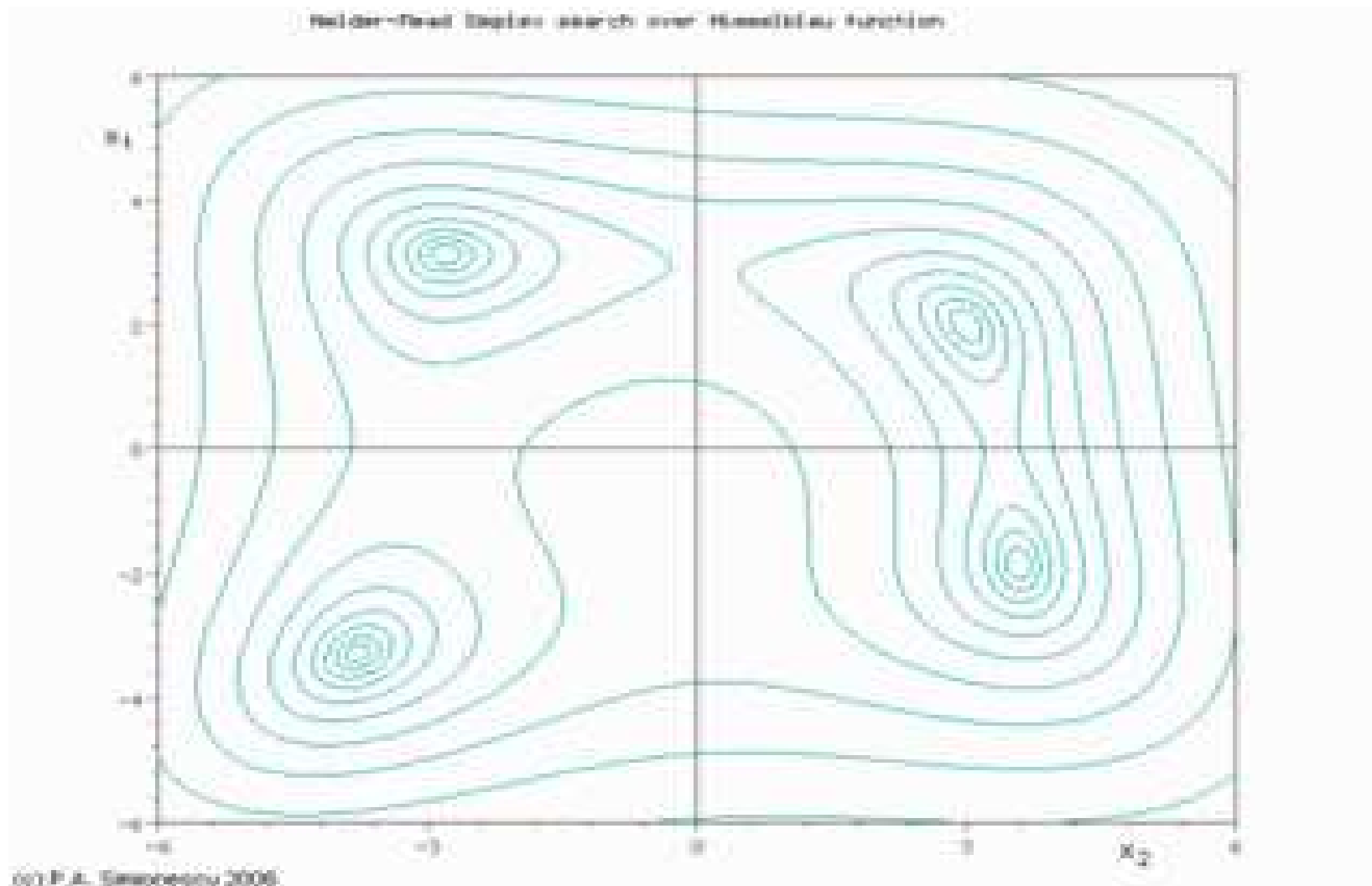
$$x_r = (1 + a)x_0 - a x_{n+1}$$

Szimplex keresési eljárás II.

- Ha $f(x_1) < f(x_r) < f(x_n)$, akkor töröljük az $n+1$ -dik pontot és folytatjuk az eljárást.
- Ha $f(x_r) < f(x_1)$, akkor $x_e = p x_r - (1 - p) x_0$ (távolabb is mehettünk), és ha ezen pont jobb, akkor ezzel folytatjuk.
- Ha $f(x_n) \leq f(x_r) \leq f(x_{n+1})$, akkor $x_c = (1 + q) x_0 - q x_{n+1}$ (túl is mehettünk), és ha ezen pont jobb, akkor ezzel folytatjuk.
- Egyébként összehúzzuk a szimplexet:

$$x_i = x_1 + s(x_i - x_1).$$

Szimplex keresési eljárás III.



A feladat megoldása MATLAB-ban

- *Lásd a monitoron.*