

SZÁMÍTÓGÉPES ESZKÖZÖK DINAMIKUS MODELLEK VIZSGÁLATÁRA

10. hét - Az inga

Bánhelyi Balázs

Szegedi Tudományegyetem

2012

- ▶ Egy m tömegű pontszerű test lóg egy l hosszú súlytalan, merev rúdon. Ez azt jelenti, hogy a pontszerű test egy kör mentén mozoghat, melynek sugara l .
- ▶ A vizsgált ingára két erő hat.
 - ▶ Az egyik a gravitáció, amelynek nagysága g és függőlegesen lefelé hat.
 - ▶ A másik a légellenállás, amelynek nagysága a test sebességétől függ, és iránya ellentétes a pontszerű test mozgásának irányával.

- ▶ A rendszer felírható egy másodrendű differenciálegyenlettel:

$$mlx''(t) = -mg \sin x(t) - klx'(t)$$

ahol x az inga függőlegessel bezárt szöge, és x' az inga forgási sebessége.

- ▶ A szabad paraméterek megválaszthatóak úgy ($l=g$, $k=0,1$ és $m=1$), hogy az alábbi egyenletet kapjuk:

$$x''(t) = -\sin x(t) - 0,1x'(t)$$

- ▶ A rendszer felírható egy differenciálegyenletrendszerrel:

$$x_1'(t) = x_2(t)$$

$$x_2'(t) = -0,1x_2(t) - \sin x_1(t)$$

ahol x_1 az inga szöge, míg x_2 az inga szögsebessége.

- ▶ Ismert az a tény, hogy az egyszerű inga felső egyensúlyi állapota instabil. Bizonyított, hogy a felfüggesztés megfelelő mozgatásával ezt stabillá lehet tenni.
- ▶ Egy ilyen eredményt érhetünk el a felfüggesztési pont adott periódusú és nagyságú függőleges irányú oszcilláló mozgatásával. Ennek a mozgásnak a gyorsulása legyen

$$\frac{8ap^2}{l} \sin(pt),$$

ahol a a kitérés amplitúdója, l az inga hossza, és p a kitérések száma 2π idő alatt.

- ▶ Ekkor a hagyományos inga differenciálegyenlete az alábbi formában írható fel:

$$x''(t) = \left(-\frac{g}{l} + \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) \right) \sin x - \gamma x'.$$

- ▶ További vizsgálatainkban a $\gamma = 0.1$, $l = g = 9.81$, valamint $a = 1$ egyszerűsítésekkel élünk. Ekkor a differenciálegyenlet alakja a következő ($8/9.81 = 0.8155$):

$$x''(t) = - (1 + 0.8155p^2 \sin(pt)) \sin x - 0.1x'.$$

- ▶ Vizsgáljuk meg, hogy milyen p értékre tapasztalható már a felső állapot stabilizálódása! ¹

¹Ekkor a rezgés kezdő sebessége legyen $-0.5 \cdot 0.8155p^2$, hogy ne „repüljön” el a rendszerünk, és az inga kezdő szöge legyen $\pi - 0.01$, ahol már tapasztalható a stabilizálódás.

- ▶ A szakirodalomban gyakran vizsgált mechanikai rendszer a fordított inga (inverted pendulum). Ezt gyakran úgy prezentálják, hogy egy kicsi kocsin van egy álló – nem lógó – inga. A kocsi azt a szerepet tölti be, hogy az inga „felfüggesztési” pontját jobbra, illetve balra lehessen mozgatni. Ezen mozgással, pontosabban ilyen irányú erőkkel próbálják a kocsin lévő ingát függőleges helyzetben tartani, azaz az eredetileg instabil állapotát stabilizálni. Az erő nagysága rendszerint függ az inga függőlegessel éppen bezárt szögétől, továbbá néhány esetben az inga forgási sebességétől is.
- ▶ A rendszert leíró differenciálegyenlet:

$$x''(t) = -\frac{g}{l} \sin x - f(x, x') \cos x - \gamma x'.$$

- ▶ További vizsgálatainkban $\gamma = 0.1$, $l = g = 9.81$, valamint $f(x, x') = p(x - \pi)$ egyszerűsítésekkel élünk.
- ▶ Ekkor a differenciálegyenlet alakja a következő:

$$x''(t) = -\sin x - p(\pi - x) \cos x - 0.1x'.$$

- ▶ Vizsgáljuk meg, hogy milyen $p \in [0, 2]$ értékre tapasztalható már a felső állapot stabilizálódása! ²

²Az inga kezdő szöge legyen $\pi - 0.1$, ahol már tapasztalható a stabilizálódás.