

# SZÁMÍTÓGÉPES ESZKÖZÖK DINAMIKUS MODELLEK VIZSGÁLATÁRA

1. hét - Bevezető a deriválás és integrálás fogalmába.

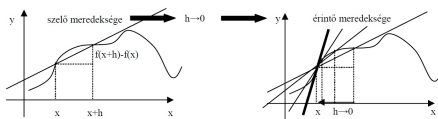
Bánhelyi Balázs

Szegedi Tudományegyetem

2012

Definíció:  $x \rightarrow f(x)$  függvény deriváltja az  $x$  helyen:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



## Deriválás

### Deriválás fogalma

Függvények deriváltja

Kiegészítések

Teljes  
függvényvizsgálat

## Deriválás

### Deriválás fogalma

Függvények deriváltja

Kiegészítések

Teljes  
függvényvizsgálat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\sin x < x < \tan x$$

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \frac{\cos x}{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- Használjuk az alábbi azonosságot:

$$\sin x - \sin a = 2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}.$$



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{2 \frac{x-a}{2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos \frac{2a}{2} = \cos a$$

## Deriválás

Deriválás fogalma

Függvények deriváltja

Kiegészítések

Teljes  
függvényvizsgálat

# Néhány elemi fv. deriváltja

## Deriválás

Deriválás fogalma

Függvények deriváltja

Kiegészítések

Teljes  
függvényvizsgálat

| $f$                       | $f'$                      | pl.             |
|---------------------------|---------------------------|-----------------|
| $c$ (konstans)            | $0$                       | $8' = 0$        |
| $x^n$ (n tetszőleges)     | $nx^{n-1}$                | $(x^5)' = 5x^4$ |
| $e^x$                     | $e^x$                     |                 |
| $\ln x$                   | $1/x$                     |                 |
| $a^x$                     | $a^x \ln a$               |                 |
| $\log_a x$                | $\frac{1}{x \ln a}$       |                 |
| $\sin x$                  | $\cos x$                  |                 |
| $\arcsin x$               | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  |                 |
| $\cos x$                  | $-\sin x$                 |                 |
| $\arccos x$               | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |                 |
| $\tan x$                  | $\frac{1}{\cos^2 x}$      |                 |
| $\arctan x$               | $\frac{1}{1+x^2}$         |                 |
| $\cot x$                  | $-\frac{1}{\sin^2 x}$     |                 |
| $\operatorname{arccot} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$        |                 |

# Deriválási szabályok példákkal

## Deriválás

Deriválás fogalma

Függvények deriváltja

Kiegészítések

Teljes  
függvényvizsgálat

$$(cf)' = c(f)'$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

konstans kihozható a deriválás elé

összeg, különbség

deriválása tagonként

szorzat deriválása

hányados deriválása

összetett függvény deriválásakor

az alapderiválást elvégezve

a belső fv. deriváltjával szorzunk

# Többváltozós függvények deriváltjai

## Deriválás

Deriválás fogalma

Függvények deriváltja

Kiegészítések

Teljes  
függvényvizsgálat

Parciális derivált: a függvény többváltozós, és az egyik változója szerint deriválunk (ilyenkor a többi változót paraméterként kezelve végezzük a deriválást).

Jelölés:  $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$

$$\text{Pl.: } \frac{\partial(5x^2+3y^2zx-6y^3+8x-2)}{\partial x} = 10x + 3y^2z + 8$$

## Deriválás

Deriválás fogalma

Függvények deriváltja

Kiegészítések

Teljes  
függvényvizsgálat

- ▶ Az idő szerinti deriválás a fizikában kitüntetett, ponttal jelöljük:  $f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \dot{f}$ .
- ▶ Második derivált:  $f''(t) = \frac{d^2f}{dt^2} = \ddot{f}$

Buliznak a függvények. Megy a nagy duma, hogy ki hogy tart a nullához a végtelenben. Egyszer csak beront valaki:

- Meneküljetek, mert jön a Deriválás!

Mindenki hanyatt-homlok rohan ki a hátsó bejáraton, csak az Exponenciális függvény marad a bárpultnál.

A Deriválás tényleg benyit az ajtón, körbenéz, majd megszólal:

- Hé, te nem félsz tőlem?

- Én? Á, dehogy, én az  $e^x$  függvény vagyok. - Hmmm... - esik gondolkodóba a Deriválás. Majd felcsillan a szeme:

- És ki mondta, hogy  $x$  szerint deriválok?

## Deriválás

Deriválás fogalma

Függvények deriváltja

Kiegészítések

Teljes  
függvényvizsgálat

- ▶ Függvény monotonitása:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \text{monoton nő}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \text{monoton csökken}$$

- ▶ Függvény szélsőértéke (minimum, maximum): elégséges feltételt is nézni kell (a derivált váltson előjelet a vizsgált helyen!) lokális minimum esetén a függvényérték csökkenést követően növekszik, lokális maximum esetén a függvényérték növekedést követően csökken,

$$\text{szükséges feltétel: } f'(x) = 0$$

## Deriválás

Deriválás fogalma

Függvények deriváltja

Kiegészítések

Teljes  
függvényvizsgálat

- ▶ Függvény konvexitása (konvex fv.görbe alulról nézve gömbölyű, a konkáv felülről):

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \text{konvex}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \text{konkáv}$$

- ▶ Függvény inflexiós pontja: elégséges feltételt is nézni kell (a második derivált váltson előjelet a vizsgált helyen!)

$$\text{szükséges feltétel: } f''(x) = 0$$