

1.1. Az $(1 + 1/n)^n$ konvergencia

Tétel: Az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ számsorozat konvergens (határértéke az "e" szám).

A tétel bizonyításához felhasználjuk a következő ismert tételt: egy monoton és korlátos sorozat konvergens.

a) A fenti sorozat **monoton növekvő**.

A bizonyításhoz felhasználjuk a következő azonosságot:

$$(a^{n+1} - b^{n+1}) = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + b^n).$$

Ha $a > b$ és mindkettő pozitív, akkor $a^i > b^i$, illetve $a^{n-i} b^i < a^{n-i} a^i = a^n$, tehát szorzat második tényezőjében minden tagot a^n -nel helyettesítve, ennek értéke növekszik, és $(n+1) \cdot a^n$ lesz.

Belátható tehát, hogy

$$(a^n + a^{n-1}b + \dots + b^n) < (n+1)a^n$$

és $(a^{n+1} - b^{n+1}) < (a - b)(n+1)a^n$.

Válasszuk $a = 1 + \frac{1}{n}$, $b = 1 + \frac{1}{n+1}$ értékeket melyekre teljesül, hogy $a > b > 0$, tehát

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \frac{1}{n(n+1)}(n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Mindkét oldalt osztjuk $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 0$ kifejezéssel:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1}{n}.$$

Mindkét oldalból elvéve $1/n$ -et, majd átrendezve, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1.$$

Innen egyenesen következik, hogy $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Látható tehát, hogy a sorozat monoton növekvő.

b) A második részben bebizonyítjuk, hogy **a sorozat korlátos**.

Egyszerűen belátható, hogy a sorozat alulról korlátos mivel első tagja éppen 2. Azt kell bebizonyítanunk, hogy felülről is korlátos.

Válasszuk a következő értékeket a -ra és b -re:

$$a = 1 + \frac{1}{2n}, \quad b = 1, \quad n \in \mathbb{N}^+ \quad \text{és} \quad a > b > 0.$$

Itt is alkalmazhatjuk az előző részben bebizonyított egyenlőtlenséget:

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n+1} - 1 < \frac{1}{2n}(n+1)\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Mindkét oldalt elosztjuk

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \quad \text{kifejezéssel, tehát}$$

$$1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}.$$

Mindkét oldalból kivonunk $\frac{1}{2^n}$ -et, majd átrendezés után a

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^n} > \frac{1}{2} \text{ egyenlőtlenséget kapjuk. Innen keresztbeszorzással kapjuk, hogy}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^n < 2.$$

Mindkét oldalt négyzetre emeljük:

$$\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2n} < 4.$$

A kapott egyenlőtlenség igaz minden pozitív egészre, tehát $2n$ helyett írhatunk n -et, és így belátható, hogy a sorozat felülről is korlátos, és ez a felső korlát 4 ,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

Bebizonyítottuk tehát, hogy a sorozat konvergens, és határértékére igaz, hogy

$$2 < e < 4.$$

Az Euler-féle szám közelítő értéke $e = 2,718281828$.

Az e számmal a **természetes logaritmus**nál találkoztunk, ez a szám a logaritmus alapja, és jelölése $\ln x$.

1.2. A $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ határértéke 1.

(Rossz, a $1/t$ legyen $e^x - 1$!!!!)

The number e is defined by

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\text{Let } t = e^x - 1.$$

$$1 + \frac{1}{t} = e^x$$

$$x = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

$$\text{When } x \rightarrow +0, t \rightarrow +\infty.$$

$$\text{When } x \rightarrow -0, t \rightarrow -\infty.$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{t \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{\log\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t} = \frac{1}{\log e} = 1$$

1.3. Az e deriváltja

Az exponenciális függvény differenciálható, és $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás: Tekintsünk egy (x_n) sorozatot, $x_n \in D_f \setminus \{a\}$ és $\lim x_n = a$.

Ekkor az e^x függvény differenciasorozata $\frac{e^{x_n} - e^a}{x_n - a} = e^a \frac{e^{x_n - a} - 1}{x_n - a}$.

A $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$ tétel alapján, és $z = x_n - a$ helyettesítéssel látható, hogy

$$(e^x)' = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z - 1} = e^a.$$

2. Abrazoljuk a $\sin x / x$, $\cos x$ es 1-et a 0 környeken MATLAB-ban

3. Deriválási példák

(Lásd doksi!)

4. Függvény analízis

$$x^3 + 2x^2$$