

SZÁMÍTÓGÉPES ESZKÖZÖK DINAMIKUS MODELLEK VIZSGÁLATÁRA

2. hét - Bevezető a deriválás és integrálás fogalmába.

Bánhelyi Balázs

Szegedi Tudományegyetem

2012

- ▶ A differenciálhányados bevezetése után a következő problémával találtuk magunkat szembe: Adott egy f függvény, keressük meg (egy intervallumon) a deriváltfüggvényét. Fordítsuk most meg a feladatot. Legyen adott most f és keressük azt az F függvényt, melyre $F'(x) = f(x)$. Ezt az F függvényt f primitív függvényének vagy határozatlan integráljának nevezzük. Jelölés: $F(x) = \int f(x)dx$.
- ▶ Nem minden függvénynek létezik primitív függvénye, továbbá egyes függvények (pl. e^{-x^2}) primitív függvényei nem mindig fejezhetők ki elemi függvények segítségével. Általában az elemi függvényekkel kifejezhető primitív függvények meghatározása sem mechanikus feladat.
- ▶ Ha f -nek F és G is primitív függvénye, akkor $G(x) = F(x) + C$.

- ▶ Legegyszerűbb szabályainkat a differenciálási szabályok megfordításával kapjuk.
- ▶ Hatványfüggvények integrálása. Mivel $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$, ezért

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

- ▶ Példa $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$,
 $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \sqrt{x}$

- ▶ Ha f -nek és g -nek létezik a határozatlan integrálja továbbá $c \in \mathbb{R}$, akkor a következő baloldali integrálok léteznek és

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$$

$$\int [f + g](x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

- ▶ Példa

$$\begin{aligned}\int 3x^2 + 2x dx &= \int 3x^2 dx + \int 2x dx = \\ &= 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx = 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 = x^3 + x^2\end{aligned}$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x)$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

stb.

- Mivel $[fg]'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, ezért

$$\int f(x)'g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

- Példa

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)dx &= \int \sin(x) \sin(x)dx = \\ &= -\sin(x) \cos(x) - \int -\cos(x) \cos(x)dx = \\ &= -\sin(x) \cos(x) + \int 1 - \sin^2(x)dx \Rightarrow \int \sin^2(x)dx = \frac{x - \sin(x) \cos(x)}{2}\end{aligned}$$

- ▶ Egy feladatra több megoldás is létezhet és sokszor célszerű integrandusunkat átalakítani, mielőtt integrálni kezdenénk, így pl. egy másik lehetőség az előző integrálás meghatározására a "linearizálás":

$$\int \sin^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$$

- ▶ Ha f egy primitív függvénye F , akkor $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))$, amit formálisan úgy alkalmazhatunk, hogy $g(x)$ helyébe egy új változót, mondjuk y -t helyettesítünk, $g'(x)dx$ helyébe pedig dy -t, azaz:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy = F(y)$$

- ▶ Példa

$$\begin{aligned}\int \sin^3(x)dx &= \int \sin^2(x) \sin(x)dx \\ &= - \int (1 - \cos^2(x))(-\sin(x))dx = \\ &= - \int 1 - y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 - y = \frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x)\end{aligned}$$

Határozott integrál fogalma

- Tekintsük az $[a, b]$ -n értelmezett $f(x)$ függvényt, és bontsuk fel az $[a, b]$ -t n részintervallumra. Az $f(x)$ függvényt Riemann-integrálhatónak mondjuk, ha létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty; \max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

határérték, ahol Δx_i jelenti az $[a, b]$ i -edik részintervallum hosszát, az $f(\xi_i)$ pedig az i -edik részintervallum tetszőleges pontjához tartozó függvényértékeket. Ha létezik ez a határérték, akkor ezt az $f(x)$ függvény $[a, b]$ -n vett határozott integráljának nevezzük és jelölése:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

- ▶ A határok felcserélésére az integrál előjelet vált.
- ▶ Ha $f(x)$ integrálható $[a, b]$ -n és $c \in [a, b]$, akkor az $[a, c]$ és $[c, b]$ részintervallumokon vett integrálok összege megadja a teljes intervallumra vonatkozó integrált.
- ▶ A határozott integrál és a konstanssal szorzás sorrendje felcserélhető.
- ▶ Függvények összegének határozott integrálja azonos a határozott integrálok összegével.
- ▶ Newton-Leibniz formula: Ha F az f egy primitív függvénye, akkor $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Határozott integrál alkalmazásai I.

- ▶ Területszámítás: Határozzuk meg egy f függvény grafikonja alatti területet, azaz egy kicsit pontosabban: határozzuk meg az $y = 0$, $x = a$, $x = b$ egyenletű egyenesek és a nemnegatív f függvény grafikonja által határolt síktartomány (görbevonallú trapéz) területét.
- ▶ Megoldás: Ha f integrálható $[a, b]$ -n, akkor
$$T = \int_a^b f(x) dx.$$
- ▶ Példa: Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ képlettel adott függvény grafikonja alatti területet, ha $a = 0$ és $b = 1$.
- ▶ Megoldás: $T = \int_a^b f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$
- ▶ Megjegyzés: Ha az előző problémafelvetésben az f -re vonatkozó nemnegativitási feltételt elhagyjuk, akkor a határozott integrál értéke előjeles területet ad, vagyis pl. $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0$, jöllehet a keletkező síktartomány területe nyilván nem 0, hanem 4.

- ▶ Forgástest térfogata: Határozzuk meg a folytonos $f(x)$ függvény grafikonjának $[a, b]$ intervallumhoz tartozó részének x -tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogatát.
- ▶ Megoldás: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

- ▶ Síkgörbe ívhossza: Határozzuk meg a folytonosan differenciálható $f(x)$ függvény $[a, b]$ intervallumhoz tartozó görbedarabjának ívhosszát.
- ▶ Megoldás: $S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

- ▶ Forgástest palástjának felszíne: Határozzuk meg a folytonosan differenciálható $f(x)$ függvény $[a, b]$ intervallumhoz tartozó részének x -tengely körüli megforgatásával kapott forgástest palástjának felszínének nagyságát.
- ▶ Megoldás: $F = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

- ▶ Munka: Határozzuk meg, ha egy test egyenes vonalú pályán mozog, és a mozgása során a pályával párhuzamos, helytől függő erő hat rá, akkor mekkora ezen erő munkája, miközben a test az a helyzetből a b helyzetbe kerül.
- ▶ Megoldás: $W = \int_a^b F(x)dx$.

- ▶ Gáz tágulási munka: Határozzuk meg, miközben egy gáz térfogata V_1 -ről V_2 -re változik, mekkora munkát végez.
- ▶ Megoldás: $W = \int_{V_1}^{V_2} P(V)dV$, ahol a $P(V)$ függvény a nyomást adja meg a térfogat függvényében.