Tanulási cél: A határozatlan integrál fogalmának megismerése, alapintegrálokra visszavezethető integrálási feladatok megoldása.

Tananyag:

Tankönyv: Molnár Béláné: Egyváltozos valós függvények integrálszámítása

Fejezet: 1.1.-1.2.

Elméleti összefoglaló:

A $F(x)$ függvényt az $f(x)$ függvény primitív függvényének nevezzük, ha $F'(x) = f(x)$.

Az $f(x)$ függvény határozatlan integráljának nevezzük és $\int f(x)\,dx$-szel jelöljük primitív függvényeinek összességét. Azaz $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, ahol $F'(x) = f(x)$ és $c \in R$.

$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$, ahol $k \in R$, azaz integrálásnál a konstans szorzó változatlan marad.

$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$, azaz függvények összegét tagonként lehet integrálni.

Hasonlóan igaz függvények különbségére, hogy

$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx.$$

Bár itt nem soroljuk fel őket, de feltétlenül ismerni kell az úgynevezett alapintegrálokat, tankönyv 1.2. fejezet.

Ezen kívül használni fogunk néhány azonosságot a trigonometrikus és hiperbolikus függvényekre.

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x, \qquad 1 = \mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x,$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x, \qquad \mathrm{sh}\, 2x = 2\mathrm{sh}\, x \cdot \mathrm{ch}\, x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad \mathrm{ch}\, 2x = \mathrm{sh}^2\, x + \mathrm{ch}^2\, x.$$

Ezek közül a trigonometrikusok középiskolából ismertek, a hiperbolikusok pedig a függvények definíciójából behelyettesítéssel levezethetők.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat Legyen $f(x) = 3x^2 + \sin x - \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2\, x}$. Integráljuk a függvényt!

Megoldás: Mivel függvények összegéről és különbségéről van szó, tagonként integrálhatunk.

$$\int (3x^2 + \sin x - \frac{1}{\mathrm{sh}^2\, x})dx = \int 3x^2 dx + \int \sin x dx - \int \frac{1}{\mathrm{sh}^2\, x} dx$$

Az első tagban szereplő konstans szorzó kiemelhető.

$$3\int x^2 dx + \int \sin x dx - \int \frac{1}{\mathrm{sh}^2\, x} dx$$

Már csak alapintegrálok szerepelnek, melyeket egyszerűen behelyettesítünk. Az első részben egy hatványfüggvényt kell integrálnunk, ekkor az $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$ alapintegrál szerint eggyel megnöveljük a kitevőt, s az új kitevővel osztunk.

$$3\left(\frac{x^3}{3}\right) + (-\cos x) - (-\mathrm{cth}\, x) + c = x^3 - \cos x + \mathrm{cth}\, x + c$$

A megoldás helyességét deriválással ellenőrizhetjük. Ha az eredményt deriváljuk, visszakapjuk $f(x)$-et.

2. feladat Integráljuk az $f(x) = \sqrt[5]{x \cdot \sqrt{x}}$ függvényt!

Megoldás: Először alakítsuk át a függvényt! A gyököket írjuk inkább hatványként.

$$f(x) = \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Végezzük el a zárójelen belül a szorzást!

$$f(x) = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Mivel egy hatványt hatványozunk, a kitevők szorzódnak.

$$f(x) = x^{\frac{3}{10}}$$

Ezután már csak egyetlen hatványt kell integrálnunk. Ekkor az integrálás során, mint az előző feladatban, az $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$ alapintegrál szerint a kitevőt eggyel megnöveljük, s az új kitevővel pedig osztanunk kell.

$$\int f(x)\,dx = \int x^{\frac{3}{10}} dx = \frac{x^{\frac{13}{10}}}{\frac{13}{10}} + c = \frac{10}{13} x^{\frac{13}{10}} + c$$

Ez nem csak ilyen alakban írható, hanem a törtkitevős hatvány gyökös kifejezéssé alkítható. Ekkor eredményünk a következő:

$$\int f(x)\,dx = \frac{10}{13} \sqrt[10]{x^{13}} + c$$

Megjegyzés: Az integrálási feladatok általában azért tűnnek nehezebbeknek, mert az integrálás előtt sokszor át kell alakítani a függvényeket, hogy az integrálás elvégezhető legyen. Az alapintegrálok biztos ismerete azért is szükséges, mert előre kell látni, hogy milyenné célszerű alakítani a függvényt.

3. feladat Integráljuk az $f(x) = \sqrt[3]{x}(x^2 - 3x)$ függvényt!

Megoldás: Függvények szorzatát kell integrálnunk, amire nincsen általánosan integrálási szabály. Próbáljuk meg ezért úgy átalakítani a függvényt, hogy eltűnjön a szorzás. Írjuk át a köbgyököt törtkitevős hatvánnyá, és bontsuk fel a zárójelet.

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x) = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^2 - 3x^{\frac{1}{3}} \cdot x$$

Mindkét tagban azonos alapú hatványok szorzata szerepel, melyeket egyetlen hatványként is írhatunk. (A kitevők összeadódnak.)

$$f(x) = x^{\frac{7}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}}$$

Sikerült elérnünk, hogy már nem szerepel függvények szorzata, hanem csak különbsége, melyet külön-külön integrálhatunk.

$$\int (x^{\frac{7}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}})dx = \int x^{\frac{7}{3}} dx - \int x^{\frac{4}{3}} dx$$

A második részben az integrálás és a 3-mal szorzás sorrendje felcserélhető, amit szemléletesen úgy mondhatunk, hogy a 3-as szorzó az integrál elé kiemelhető.

$$\int x^{\frac{7}{3}} dx - 3 \int x^{\frac{4}{3}} dx$$

Mindkét esetben hatványfüggvényt kell integrálnunk, azaz a kitevőt eggyel megnöveljük, s az új kitevővel osztunk. Eredményünk a következő:

$$\frac{x^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} - 3\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + c = \frac{3}{10} x^{\frac{10}{3}} - \frac{9}{7} x^{\frac{7}{3}} + c$$

Ugyanez más alakban:

$$\frac{3}{10} \sqrt[3]{x^{10}} - \frac{9}{7} \sqrt[3]{x^7} + c$$

4. feladat Legyen $f(x) = \frac{2x^3 + 5x}{\sqrt{x}}$. Mi a függvény határozatlan integrálja?

valamelyike. Ekkor általában kétszer kell alkalmazni a módszert, s a visszamaradó integrál az eredeti integrál valamilyen számszorosa lesz. Az így kapott egyenletet ezután rendezni kell az integrálra. A módszer első alkalmazásánál mindegy melyik tényezőt választjuk $f\,(x)$-nek és melyiket $g'\,(x)$-nek, a másodiknál azonban ugyanúgy kell választanunk, mint az elsőnél. Az ilyen típusú szorzatok nem mindegyikénél muszáj alkalmazni ezt a módszert. Szerepelt már például a $\sin\ x \cdot \cos\ x$ függvény, melyet más módszerrel egyszerűbben tudtunk integrálni.

A módszer alaklmazható egyéb esetekben is, de azok nem ennyire jól körülhatárolhatóak.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat $\int (3x-4)\cdot\sin\ x dx =$

Megoldás: Az integrandus az első típusba tartozik, éljünk tehát az $f\,(x) = 3x-4$, és $g'\,(x) = \sin\ x$ elnevezésekkel. A módszer alkalmazásához meg kell határoznunk az $f\,(x)$ függvény deriváltját.

$$f'\,(x) = (3x-4)' = 3$$

Szükségünk van még a $g\,(x)$ függvényre is, melyet a $g'\,(x)$ integrálásával kapunk.

$$g\,(x) = \int g'\,(x)\,dx = \int \sin\ x dx = -\cos\ x + c$$

Mivel most elegendő egyetlen olyan függvényt találnunk, melynek deriváltja $g'\,(x)$, ezért az integrációs konstanst elhagyhatjuk, azaz elegendő $g\,(x) = -\cos\ x$-et írnunk. Ezután helyettesítsünk be a szabályba.

$$\int (3x-4)\cdot\sin\ x dx = (3x-4)\cdot(-\cos\ x) - \int 3\cdot(-\cos\ x) dx =$$

A még meghatározandó integrálból -3 kiemelhető az integrál elé, majd az integrálás elvégezhető.

$$-(3x-4)\cdot\cos\ x + 3\int \cos\ x dx = (4-3x)\cdot\cos\ x + 3\sin\ x + c$$

2. feladat $\int (2x+7)\cdot 5^x dx =$

Megoldás: Az integrandus az első típusba tartozik. Legyen $f\,(x) = 2x+7$ és $g'\,(x) = 5^x$. Határozzuk meg $f\,(x)$ deriváltját és $g\,(x)$ függvényt.

$$f'\,(x) = (2x+7)' = 2$$

$$g\,(x) = \int g'\,(x)\,dx = \int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln\ 5}$$

Helyettesítsünk be a szabályba.

$$\int (2x+7)\cdot 5^x dx = (2x+7)\cdot\frac{5^x}{\ln\ 5} - \int 2\cdot\frac{5^x}{\ln\ 5} dx =$$

A még megmaradt integrálból emeljük ki a konstansokat, majd integráljunk.

$$(2x+7)\cdot\frac{5^x}{\ln\ 5} - \frac{2}{\ln\ 5}\int 5^x dx = (2x+7)\cdot\frac{5^x}{\ln\ 5} - \frac{2}{\ln\ 5}\cdot\frac{5^x}{\ln\ 5} + c = \frac{5^x}{\ln\ 5}\left(2x+7-\frac{2}{\ln\ 5}\right) + c$$

3. feladat $\int (4x^2-6x+5)\cdot\text{ch}\ x dx =$

Megoldás: Az integrálandó függvény most is az első típusba tartozik, így az $f\,(x) = 4x^2-6x+5$ és $g'\,(x) = \text{ch}\ x$ szereposztás a jó.

$$f'\,(x) = (4x^2-6x+5)' = 8x-6$$

$$g\,(x) = \int g'\,(x)\,dx = \int \text{ch}\ x dx = \text{sh}\ x$$

$$\int (4x^2-6x+5)\cdot\text{ch}\ x dx = (4x^2-6x+5)\cdot\text{sh}\ x - \int (8x-6)\cdot\text{sh}\ x dx =$$

5. kérdés: $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+8}dx =$

- $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+8)+c$
- $\ln(e^{2x}+8)+c$
- $2\ln(e^{2x}+8)+c$
- $\frac{1}{e^{2x}}\ln(e^{2x}+8)+c$

6. kérdés: $\int \frac{x^2 \cdot \text{ch } x^3}{\text{sh } x^3}dx =$

- $\frac{1}{3}\ln|\text{sh } x^3|+c$
- $\ln|\text{sh } x^3|+c$
- $\frac{1}{3}\ln|\text{ch } x^3|+c$
- $\ln|\text{ch } x^3|+c$

Tanulási cél: A parciális integrálás módszerének elsajátítása, és alkalmazása feladatok megoldásában.

Tananyag:

Tankönyv: Molnár Béláné: Egyváltozós valós függvények integrálszámítása

Fejezet: 1.3.1.

Elméleti összefoglaló:

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények differenciálhatóak, valamint az $f'(x) \cdot g(x)$ függvény integrálható, akkor az $f(x) \cdot g'(x)$ függvény is integrálható és

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

A módszer alkalmazásának három legfőbb esete:

1. Az integrandus olyan szorzat, melynek egyik tényezője polinom, a másik pedig az a^x, e^x, $\sin\ x$, $\cos\ x$, $\text{sh}\ x$, $\text{ch}\ x$ függvények valamelyike. Ilyenkor a polinomot célszerű $f(x)$-nek, s a másik tényezőt pedig $g'(x)$-nek választani. A módszer alkalmazásával azt érjük el, hogy a még meghatározandó integrálban eggyel alacsonyabb fokszámú polinom szerepel. Ha a módszert annyiszor alkalmazzuk, amennyi a polinom fokszáma, akkor eltűnik a polinom, s helyén már csak konstans marad, s a még hátralevő integrálban már nem szorzatfüggvényt kell integrálnunk.

2. Az integrandus olyan szorzat, melynek egyik tényezője polinom, a másik pedig a $\log_a x$, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\text{arctg}\ x$, $\text{arcctg}\ x$, $\text{arsh}\ x$, $\text{arch}\ x$, $\text{arth}\ x$, $\text{arcth}\ x$ függvények valamelyike. Ilyenkor a polinomot $g'(x)$-nek, a másik tényezőt pedig $f(x)$-nek célszerű választani. A módszert egyszer alkalmazzuk, s a visszamaradó integrált valamilyen más módszerrel határozzuk meg. Gyakran $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ vagy $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú integrál alakuk ki.

Bár a módszer alapvetően szorzatfüggvények esetén használatos, de itt előfordulhat az is, hogy a polinom egyszerűen 1. Nem igazi szorzatot akarunk tehát integrálni, hanem a $\log_a x, \ldots \text{arcth}\ x$ függvények valamelyikét.

3. Az integrandus olyan szorzat, melynek mindkét tényezője az $a^x, \ldots \text{ch}\ x$ függvények

Miután felírtuk a résztörtek paraméteres alakját, a számlálókban levő valós számokat úgy határozzuk meg, hogy közös nevezőre hozzuk őket. A közös nevező mindig az eredeti tört nevezője, ebből következően a közös nevezőre hozás utáni számláló és az eredeti tört számlálója egyenlő. Mivel mindkét számláló polinom, csak úgy lehetnek egyenlőek, ha a megfelelő fokszámú tagok együtthatói külön-külön is egyenlőek. Így egy egyenletrendszert kapunk, melynek megoldásával kapjuk a résztörtekben szereplő számokat.

Miután egy racionális törtfüggvényt felbontottunk résztörtekre, azokat külön-külön integráljuk. A kapott résztörtek integrálási szempontból három típusba sorolhatók.

$$(1.)\ \frac{A}{x-a}, \qquad (2.)\ \frac{A}{(x-a)^n}, \qquad (3.)\ \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$$

(A harmadik típusú törtek nevezője nem bontható szorzattá.)

Az első két típus integrálása a következő:

$$(1.)\ \int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{1}{x-a}dx = A\cdot\ln|x-a|+c$$

$$(2.)\ \int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}dx = A\cdot\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+c = \frac{A}{(1-n)\cdot(x-a)^{n-1}}+c$$

A harmadik típusú törtek integrálását majd konkrét feladatokban mutatjuk be.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat $\int \frac{3x^3+4x^2+x+6}{x+2}dx =$

Megoldás: Először vizsgáljuk meg, hogy a tört valódi vagy sem. Mivel a számláló harmadfokú, a nevező pedig csak elsőfokú, ezért ez nemvalódi tört. Polinomosztással fel kell bontanunk egy polinom és egy valódi tört össszegére. Ehhez a törtet ezután célszerűbb a következőképpen írni:

$$(3x^3+4x^2+x+6):(x+2)=\cdot$$

Tekintsük az osztandó legmagasabb fokszámú tagját, ez $3x^3$, és az osztó legmagasabb fokú tagját, ez x. Vegyük ezeknek a hányadosát, ez $3x^2$, mely a hányados első tagja lesz. Írjuk le ezt az egyenlőségjel után, majd az osztót szorozzuk meg vele, és az eredményt írjuk le az osztandó alá. Vonjuk ki a szorzás eredményét az osztandóból.

$$\begin{array}{l}(3x^3+4x^2+x+6):(x+2)=3x^2\\ \underline{3x^3+6x^2}\\ \quad -2x^2+x+6\end{array}$$

A kivonás után olyan polinomot kapunk, melynek fokszáma legalább eggyel kevesebb, mint amennyi az osztandó fokszáma volt. Az eljárás következő lépésében ezzel a polinommal hajtjuk végre ugyanazt, mint az előbb az osztandóval. Tehát most a $-2x^2$-et osztjuk az x-szel, s kapjuk a hányados következő tagját, a $-2x$-et. Ezzel szorozzuk az osztót, s a szorzás eredményét kivonjuk, mint az előbb.

$$\begin{array}{l}(3x^3+4x^2+x+6):(x+2)=3x^2-2x\\ \underline{3x^3+6x^2}\\ \quad -2x^2+x+6\\ \quad \underline{-2x^2-4x}\\ \qquad 5x+6\end{array}$$

A kivonás eredményével ismételjük meg újra az eljárást egészen addig, amíg nem kapunk az osztónál alacsonyabb fokszámú polinomot. Most $5x$-et kell osztanunk x-szel, s így a hányados következő tagja 5 lesz. Ismét szorozzuk az osztót, majd hajtsuk végre a kivonást.

$$\begin{array}{l}(3x^3+4x^2+x+6):(x+2)=3x^2-2x+5\\ \underline{3x^3+6x^2}\\ \quad -2x^2+x+6\\ \quad \underline{-2x^2-4x}\\ \qquad 5x+6\\ \qquad \underline{5x+10}\\ \qquad\quad -4\end{array}$$

Az osztás itt végetért. Hányadosként kaptunk egy polinomot, ez $3x^2-2x+5$, s a maradék -4. Az eredeti tört a következőképpen írható:

$$\frac{3x^3+4x^2+x+6}{x+2} = 3x^2-2x+5+\frac{-4}{x+2}$$

Térjünk vissza ezután az integráláshoz.

$$\int \frac{3x^3+4x^2+x+6}{x+2}dx = \int (3x^2-2x+5+\frac{-4}{x+2})dx = 3\int x^2dx - 2\int xdx + 5\int 1dx - 4\int \frac{1}{x+2}dx =$$

Az első három rész alapintegrál, a negyedik pedig olyan összetett függvény, amelynek belső függvénye lineáris. Végrehajtva az integrálást a következő eredményt kapjuk:

$$\frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x - 4\ln|x+2| + c = x^3 - x^2 + 5x - 4\ln|x+2| + c$$

2. feladat $\int \frac{2x^3-3x-7}{x^2+2x+2}dx =$

Megoldás: Az integrandus most sem valódi tört, hiszen a számláló harmadfokú, a nevező pedig csak másodfokú. Hajtsuk végre most is a polinomosztást, de ezt már nem írjuk ki lépésenként.

$$(2x^3 - 3x - 7) : (x^2 + 2x + 2) = 2x - 4$$

$$\begin{array}{l} \underline{2x^3+4x^2+4x} \\ \quad -4x^2-7x-7 \\ \quad \underline{-4x^2-8x-8} \\ \qquad\qquad x+1 \end{array}$$

A hányados tehát $2x-4$, a mardék pedig $x+1$ lett, melyet még osztanunk kell az eredeti tört nevezőjével. A felbontott alakot írjuk egyből az integrálba.

$$\int \frac{2x^3-3x-7}{x^2+2x+2}dx = \int (2x - 4 + \frac{x+1}{x^2+2x+2})dx =$$

Mivel olyan törtünk maradt, melynek nevezője másodfokú, meg kell vizsgálnunk, hogy van-e valós gyöke a nevezőnek, mert ha igen, akkor szorzattá lehet alakítani, s az egész törtet pedig résztörtek összegére lehet bontani. Írjuk fel a nevezőben levő polinom diszkriminánsát.

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$$

A diszkrimináns negatív, tehát a nevezőnek nincs valós gyöke, a tört nem bontható fel résztörtekre.
Észrevehető, hogy a számláló éppen fele a nevező deriváltjának. Célszerű ezért a számlálót

szorozni 2-vel, s a tört elé pedig egy $\frac{1}{2}$-et írni, mert így $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú integrált kapunk.

$$\int \frac{2x^3-3x-7}{x^2+2x+2}dx = \int (2x-4+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+2})dx = \int (2x-4+\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2})dx =$$

Hajtsuk végre az integrálást, eredményül a következőt kapjuk:

$$\frac{2x^2}{2} - 4x + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + c = x^2 - 4x + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + c$$

Megjegyzés: Mivel az x^2+2x+2 kifejezés csak pozitív értékeket vesz fel, az abszolút érték elhagyható.

3. feladat $\int \frac{5x-6}{x^2-3x}dx =$

Megoldás: Az integrandus most valódi tört, a számláló elsőfokú, a nevező pedig másodfokú. A nevező kiemeléssel szorzattá alakítható, tehát a tört felbontható résztörtekre. Első lépésként írjuk fel a nevezőt szorzat alakban.

$$x^2 - 3x = x(x-3)$$

Mivel két elsőfokú tényezőnk van, két olyan résztörtet kell felírnunk, melyek számlálója konstans, a nevezőkben pedig a két tényező áll.

$$\frac{5x-6}{x(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3}$$

A számlálókban álló A és B számok meghatározásához, hozzuk közös nevezőre a két törtet.

$$\frac{5x-6}{x(x-3)} = \frac{A(x-3)+Bx}{x(x-3)} = \frac{(A+B)x-3A}{x(x-3)}$$

Mivel a nevezők megegyeznek, ezért a számlálóknak is egyenlőeknek kell lenniük. Ez csak úgy lehetséges, ha a megfelelő fokszámú tagok együtthatói megegyeznek. Így egy

Tanulási cél: A helyettesítéssel történő integrálás módszerének elsajátítása, és alkalmazása feladatokban.

Tananyag:

Tankönyv: Molnár Béláné: Egyváltozós valós függvények integrálszámítása

Fejezet: 1.3.2. 1.4.2.1. 1.4.2.2.

Elméleti összefoglaló:

Ha az $f(x)$ egy primitív függvénye $F(x)$, akkor

$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$. Ennek helyességét deriválással könnyen ellenőrizhetjük. Azaz tudjuk integrálni az olyan szorzatokat, melyeknek egyik tényezője egy összetett függvény, integrálható külső függvénnyel, a másik tényezője pedig az összetett függvény belső függvényének deriváltja, vagy annak számszorosa. A feladatok megoldását áttekinthetőbbé tehetjük, ha a következő leírási móddal élünk. Legyen $t = g(x)$. Deriváljuk mindkét oldalt, és t-nek x szerint deriváltját jelöljük $\frac{dt}{dx}$-szel. Kapjuk: $\frac{dt}{dx} = g'(x)$, melyből $g'(x)\,dx = dt$. Írjuk be ezeket az integrandusba.

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + c = F(g(x)) + c$$

Azaz a $g(x)$ függvényt egy új változóval helyettesítjük, s a kapott függvényt ezen új változó szerint integráljuk. Az eredményben vissza kell helyettesíteni az új változó helyére a függvényt, melyet helyettesítettünk.

A feladatok megoldása során gyakran nem a $t = g(x)$ egyenlőség két oldalát deriváljuk x szerint, hanem ezt rendezzük x-re, és kapjuk, hogy $x = g^{-1}(t)$, ahol g^{-1} a g függvény inverze, s ezt deriváljuk t szerint. Ennek eredménye $\frac{dx}{dt} = \left(g^{-1}(x)\right)'$ lesz, melyből $dx = \left(g^{-1}(x)\right)'dt$. A helyettesítés során mindenképpen azt kell elérnünk, hogy a régi változót teljesen kiküszöböljük, és csak az új változó maradjon az integrandusban. Szeretnénk hangsúlyozni, hogy a régi és az új változó differenciálja, dx és dt, általában nem egyenlő. A köztük fennálló kapcsolatot, a helyettesítést leíró egyenlet deriválásával kapjuk.

Bizonyos esetekben nem az x változó egy függvényét célszerű egy új változóval helyettesíteni, hanem az x helyére az új változó valamilyen függvényét írni, azaz a régi változót helyettesítjük egy függvénnyel. Ilyenkor $x = g(t)$. Ezt deriváljuk t szerint, és $\frac{dx}{dt} = g'(t)$-t kapunk, melyből $dx = g'(t)\,dt$.

Beírva az integrandusba: $\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$.

Ezután elvégezzük az integrálást, majd visszahelyettesítünk.

A helyettesítés bármelyik módját használjuk, a helyettesítéssel nem magát az integrálást végezzük el. Ilyenkor az integrandust alakítjuk át, s célunk egy könnyebben integrálható függvényt kapni, mint amilyen az eredeti volt. Az integrálási lépés majd ezután következik.

A helyettesítést nagyon gyakran célszerű alkalmaznunk a következő esetekben:

1. Ha az integrandus valamelyik része összetett függvény. Ilyenkor a belső függvényt tekinthetjük új változónak, s a helyettesítés után már nem lesz összetett függvény.
2. Ha az integrandus olyan tört, melyben $\sqrt{x},\quad \sqrt[n]{x},\quad e^x$ vagy a^x szerepel. Ilyenkor a gyökös kifejezést vagy az exponenciálist tekintjük az új változónak, s a helyettesítés után általában racionális törtfüggvényt kapunk.
3. Ha az integrandusban négyzetgyök alatt másodfokú kifejezés szerepel, de az integrandus nem a gyökös kifejezés reciproka. Ilyenkor olyan helyettesítést hajtunk végre, hogy a gyök alatt teljes négyzet alakuljon ki, s ezáltal eltűnjön a gyök. Sokszor az $x = \sin t,\quad x = \mathrm{sh}\ t$ vagy $x = \mathrm{ch}\ t$ helyettesítés vezet célhoz.

A 2.1.2., 2.1.3. és 2.1.4. leckékben tárgyalt integrálási módszerek a helyettesítéses integrálás speciális esetei, de gyakori előfordulásuk miatt célszerű őket külön kezelni.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx =$

Megoldás: Az integrandus számlálójában szerepel egy összetett függvény, érdemes megpróbálnunk helyettesíteni ennek belső függvényét egy új változóval.

$t = \sqrt{x}$

Rendezzük ezt x -re.

$x = t^2$

Deriváljuk méndkét oldalt t szerint.

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad \Rightarrow \quad dx = 2tdt$$

Helyettesítsük be ezeket az integrandusba, egyszerűsítsünk, végezzük el az integrálást, és helyettesítsünk vissza.

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\sin\ t}{t}2tdt = 2\int \sin\ tdt = -2\cos\ t + c = -2\cos\sqrt{x} + c$$

2. feladat $\int \frac{x}{\cos^2 x^2}dx =$

Megoldás: Az integranduson belül most is látható egy összetett függvény, próbálkozhatunk a belső függvény helyettesítésével.

$t = x^2$

Fejezzük ki x -et.

$x = \sqrt{t}$

Deriváljunk t szerint.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$

Végezzük el a helyettesítést az integrandusban, majd egyszerűsítsünk, hajtsuk végre az

integrálást, és helyettesítsünk vissza.

$$\int \frac{x}{\cos^2 x^2}dx = \int \frac{\sqrt{t}}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\ t + c = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\ x^2 + c$$

3. feladat $\int \frac{1}{x + x\ln^2 x}dx =$

Megoldás: Ebben a feladatban is találhatunk egy összetett függvényt, a $\ln^2 x$ -et, célszerű ennek belső függvényét az új változónak tekinteni.

$t = \ln\ x$

Átrendezve x -re.

$x = e^t$

Hajtsuk végre a t szerinti deriválást.

$$\frac{dx}{dt} = e^t \quad \Rightarrow \quad dx = e^t dt$$

Írjuk be ezeket az integrandusba, utána egyszerűsítsünk, integráljunk, s térjünk vissza a régi változóra.

$$\int \frac{1}{x + x\ln^2 x}dx = \int \frac{1}{e^t + e^t \cdot t^2}e^t dt = \int \frac{1}{1+t^2}dt = \mathrm{arctg}\ t + c = \mathrm{arctg}\,(\ln\ x) + c$$

4. feladat $\int e^x \cdot \cos\ e^x dx =$

Megoldás: A $\cos\ e^x$ egy összetett függvény az integranduson belül, ennek belső függvényét tekinthetjük az új változónak. Utána hajtsuk végre ugyanazokat a lépéseket, mint az előző feladatokban.

$$t = e^x \quad \Rightarrow \quad x = \ln\ t$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$,

2. Ha $f(x)$ integrálható $[a,\ b]$-n és c az $[a,\ b]$ belső pontja, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$,

azaz részintervallumokon vett integrálok összege megadja a teljes intervallumra vonatkozó integrált. A tétel akkor is igaz, ha c az $[a,\ b]$-n kívül helyezkedik el, és $f(x)$ integrálható az $[a,\ c]$ és $[c,\ b]$ intervallumokon.

3. A határozott integrál és a konstanssal szorzás sorrendje felcserélhető, azaz

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$.

4. Függvények összegének határozott integrálja azonos a határozott integrálok összegével.

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

A Newton-Leibniz formula:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$,

ahol $F(x)$ az $f(x)$ egy tetszőleges primitív függvénye, s $[F(x)]_a^b$ azt jelenti, hogy $F(x)$ b helyen vett helyettesítési értékéből ki kell vonni az a helyen vett helyettesítési értékét. A számolás szempontjából ez a tétel a legfontosabb, hiszen ez mondja ki, hogy a

határozott integrálás két lépésből áll. Elsőként keresünk egy primitív függvényt, ami tulajdonképpen határozatlan integrálást jelent. Ezután behelyettesítjük a primitív függvénybe az integrálási határokat, és vesszük a helyettesítési értékek különbségét.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat $\int_0^1 x^3 dx =$

Megoldás: A függvény folytonos az integrálási intervallumon, tehát létezik a keresett integrál. (A későbbiekben ezt nem fogjuk minden esetben megjegyezni.) Alkalmazzuk a Newton-Leibniz formulát. Ehhez először keresünk egy primitív függvényt.

$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$, tehát $F(x) = \frac{x^4}{4}$ megfelelő. Helyettesítsük ezt be.

$$\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$$

Megjegyzés: A feladatok megoldását kétféle módon szokták leírni. Az egyikben külön végzik el a határozatlan integrálást, majd behelyettesítenek a Newton-Leibniz formulába, mint ahogyan ezt mi is tettük. Akkor célszerű így eljárni, ha a határozatlan integrálás nem egyszerű, hanem több lépésben is kell alakítani az integranduson. Ha a határozatlan integrálás egyszerű, mint ebben a feladatban is, akkor felesleges ezt külön leírni, ezt rögtön a határok feltüntetésével végezhetjük.

2. feladat $\int_1^4 x\sqrt{x}dx =$

Megoldás: Írjuk fel az integrandust egyetlen hatványként, így rögtön meghatározhatunk egy primitív függvényt, melybe behelyettesíthetjük az integrálási határokat.

$$\int_1^4 x\sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{\frac{3}{2}}dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right]_1^4 = \frac{2}{5}\sqrt{4^5} - \frac{2}{5}\sqrt{1^5} = \frac{2}{5}(2^5 - 1) = \frac{62}{5}$$

3. feladat $\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx =$

Megoldás: Járjunk el ugyanúgy, mint az előző feladatban, csak most reciprokot kell felírnunk hatványként.

$$\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int_1^8 x^{-\frac{1}{3}}dx = \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_1^8 = \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_1^8 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{8^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{1^2} = \frac{3}{2}(4-1) = \frac{9}{2} = 4.5$$

Megjegyzés: Ha a primitív függvényben szerepel valamilyen konstans szorzó, mint jelen esetben $\frac{2}{5}$, akkor a behelyettesítés során ezt rögtön kiemelhetjük, nem kell külön kiírni mindkét alkalommal. A későbbiekben így fogunk eljárni a megoldások során.

4. feladat $\int_2^4 \frac{5}{2x-3}dx =$

Megoldás: Az integrandus most nem alakítható alapintegrállá, de felismerhető, hogy olyan összetett függvény, melynek belső függvénye lineáris. Ez még jobban látszik, ha a számlálóból az 5-öt kiemeljük az integrál elé. A külső függvény a reciprok, azaz $f(x) = \frac{1}{x}$, a belső pedig a $g(x) = 2x - 3$. Alkalmazzuk a megfelelő integrálási módszert, tehát integráljuk a külső függvényt, megtartva a belsőt, és osszunk a belső függvényből x együtthatójával. A primitív függvény meghatározása után végezzük el a behelyettesítést.

$$\int_2^4 \frac{5}{2x-3}dx = 5\int_2^4 \frac{1}{2x-3}dx = 5\left[\frac{\ln|2x-3|}{2}\right]_2^4 = \frac{5}{2}(\ln 5 - \ln 1) \approx \frac{5}{2}(1.61-0) = 4.025$$

5. feladat $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx =$

Megoldás: Az integrandus típusa ugyanolyan mint az előző feladatban, összetett függvény lineáris belső függvénnyel. A külső függvény az $f(x) = \cos x$, a belső pedig

$g(x) = 3x$, s hajtsuk végre ugyanazokat a lépéseket, mint az előbb.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx = \left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

6. feladat $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx =$

Megoldás: Hajtsuk végre az integranduson a következő átalakításokat.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx =$$

Így már felismerhető, hogy a függvény $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ típusú, hiszen $(\mathrm{tg}\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Ezt felhasználva végezzük el a függvény integrálását, majd a behelyettesítést.

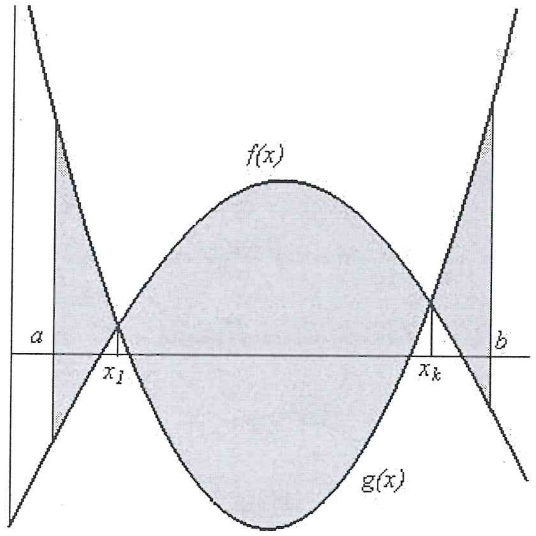
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x \cdot (\mathrm{tg}\ x)' dx = \left[\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}(\mathrm{tg}^3\frac{\pi}{4} - \mathrm{tg}^3 0) = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

7. feladat $\int_1^e \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx =$

Megoldás: Írjuk a $\sqrt[3]{}$-öt hatványként, s ismét $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ típust ismerhetünk fel az integrandusban.

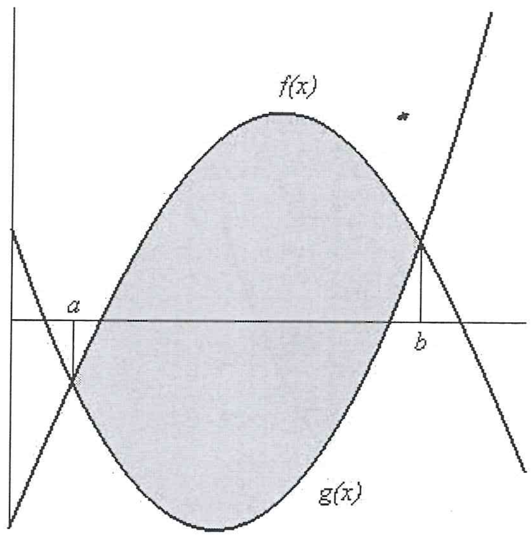
$$\int_1^e \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx = \int_1^e (\ln x)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x}dx = \int_1^e (\ln x)^{\frac{1}{3}} \cdot (\ln x)' dx =$$

Határozzuk meg a primitív függvényt, s helyettesítsünk be a Newton-Leibniz formulába.



Lényegében ugyanígy kapjuk meg az $f(x)$ és $g(x)$ folytonos függvények görbéi által közrezárt terület nagyságát is, csak ekkor az intervallum két végpontja a grafikonok metszéspontjainak helye. Ilyenkor egyenlővé tesszük a két függvényt, s megoldjuk az így kapott egyenletet. Az így kapott a és b lesz az integrálás két határa. Tehát a két függvény grafikonja által közrezárt terület:

$$T = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \right|.$$



A görbék közti területek számolása során az abszolút érték elhagyható, ha a felül haladó függvényből vonjuk ki az alul haladót. Annak eldöntéséhez, hogy melyik függvény grafikonja halad alul és melyik felül, célszerű ábrát készíteni.

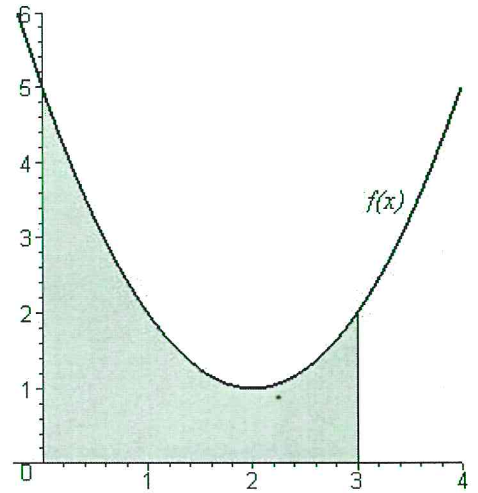
Több függvény grafikonja által határolt síkrész területének meghatározására, csak bonyolultan lehetne általános szabályt adni. Ilyenkor ábrát kell készíteni, és a síkrészt felbontani olyan részekre, melyeknél függvénygörbe alatti, vagy két függvénygörbe közötti területet kell meghatározni.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat Határozzuk meg az $f(x) = x^2 - 4x + 5$ függvény grafikonja és x -tengely közötti síkrész területét a $[0,\ 3]$ intevallumon!

Megoldás: Vizsgáljuk meg, vált-e előjelet a függvény a $(0,\ 3)$ intervallumban. Ehhez oldjuk meg az $f(x) = x^2 - 4x + 5 = 0$ egyenletet. Mivel azonban ennek a másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa, $D = (-4)^2 - 4{\cdot}5 = -4 < 0$, ezért nincsen valós gyök, azaz a függvény sehol sem vált előjelet. Így a keresett terület egyetlen integrállal kiszámolható.

$$T = \left|\int_0^3 (x^2 - 4x + 5)dx\right| = \left|[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x]_0^3\right| = |(\frac{3^3}{3} - 2\cdot 3^2 + 5\cdot 3) - (\frac{0^3}{3} - 2\cdot 0 + 5\cdot 0)| = 6$$



Megjegyzés: Az abszolút értéket elhagyhattuk volna, hiszen a függvény grafikonja egy zérushely nélküli konvex parabola, tehát a függvény mindenütt pozitív. Ha pedig egy mindenütt pozitív függvényt integrálunk, akkor az integrál nem lehet negatív.

2. feladat Számoljuk ki az $f(x) = \mathrm{tg}\ x$ függvény grafikonja és az x-tengely közötti területet a $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ intervallumon!

Megoldás: Nézzük meg, vált-e előjelet a függvény az adott intervallumban, tehát oldjuk meg a $\mathrm{tg}\ x = 0$ egyenletet. Ennek megoldása $x = k\cdot\pi, \quad k \in Z$, és ezen megoldások közül az $x = 0$ az adott intervallum belsejében van. A függvény itt az előjelét is megváltoztatja, hiszen a $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ intervallumon negatív a függvény, a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon pedig pozitív.

A területet tehát két integrállal kell meghatároznunk. Először az intervallum alsó végpontjától integrálunk a zérushelyig, másodszor pedig a zérushelytől az intervallum felső végpontjáig.

$$T = \left|\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \mathrm{tg}\ x dx\right| + \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\ x dx\right|$$

Mivel az integrandus nem alapintegrál, végezzük el külön a határozatlan integrálást.

$$\int \mathrm{tg}\ x dx = \int \frac{\sin\ x}{\cos\ x} dx = -\int \frac{-\sin\ x}{\cos\ x} dx = -\int \frac{(\cos\ x)'}{\cos\ x} dx = -\ln|\cos\ x| + c$$

Írjuk be a primitív függvényt, és helyettesítsünk a Newton-Leibniz formulába.

$$T = \left|[-\ln|\cos\ x|]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\right| + \left|[-\ln|\cos\ x|]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| =$$

$$= |-\ln(\cos\ 0) - (-\ln(\cos\ (-\frac{\pi}{4})))| + |-\ln\left(\cos\ \frac{\pi}{4}\right) - (-\ln(\cos\ 0))| =$$

$$= |-\ln\ 1 + \ln\ \frac{\sqrt{2}}{2}| + |-\ln\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\ 1| = 2\left|\ln\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right| \approx 0.69$$

8. kérdés: Mekkora területű véges síkrészt határolnak a következő függvények grafikonjai:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{x^2}{4} + 3, \quad h(x) = -2x$$

?

- $\frac{14}{3}$
- $\frac{16}{3}$
- $\frac{20}{3}$
- 8

Tanulási cél: Megismerni a határozott integrál néhány matematikai, és egy fizikai alkalmazását.

Tananyag:

Tankönyv: Molnár Béláné: Egyváltozós valós függvények integrálszámítása

Fejezet: 3.3.-3.4.

Elméleti összefoglaló:

1. Forgástest térfogata:

Ha a folytonos $f(x)$ függvény grafikonjának $[a, b]$ intervallumhoz tartozó részét megforgatjuk az x -tengely körül, akkor a keletkező forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

2. Síkgörbe ívhossza:

Az $[a, b]$ intervallumon folytonosan differenciálható $f(x)$ függvény $[a, b]$ intervallumhoz tartozó görbedarabjának ívhossza:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

3. Forgástest palástjának felszíne:

Ha a nemnegatív, folytonosan differenciálható $f(x)$ függvény grafikonjának $[a, b]$ intervallumhoz tartozó részét megforgatjuk az x -tengely körül, akkor a keletkező forgástest palástjának felszíne:

$$F = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

4. Munka:

a. Változó erő munkája:

Ha egy test egyenes vonalú pályán mozog, és mozgása során a pályával párhuzamos, helytől függő erő hat rá, akkor ezen erő munkája miközben a test az a helyzetből a b helyzetbe kerül:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx,$$

ahol az erőt a $F(x)$ függvény írja le, s a test helyét pedig az x adja meg.

b. Gáz tágulási munkája:

Miközben egy gáz térfogata V_1-ről V_2-re változik, munkát végez, mely munka:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV,$$

ahol a $p(V)$ függvény a nyomást adja meg a térfogat függvényében. Ha a gáz kitágul, akkor ez a munka pozitív, a gáz végez munkát a környezetén, míg ha a térfogat csökken, akkor a munka negatív, hiszen a környezet végez a gázon munkát.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat Forgassuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény grafikonjának $[0,\ 8]$ intervallumhoz tartozó részét, s számoljuk ki a keletkező forgástest térfogatát!

Megoldás: A megadott függvényt, és intervallumot be kell helyettesítenünk a forgástest térfogatára vonatkozó képletbe, majd ki kell számolnunk a határozott integrál értékét.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_0^8 (\sqrt[3]{x})^2 dx = \pi \int_0^8 x^{\frac{2}{3}} dx = \pi \left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_0^8 = \frac{3\pi}{5}\left[\sqrt[3]{x^5}\right]_0^8 = \frac{3\pi}{5}(\sqrt[3]{8^5} - \sqrt[3]{0^5}) = \frac{3\pi}{5}(32-0) \approx 60.32$$

Megjegyzés: A határozott integrál alkalmazásainál általában annyi a feladat, hogy be kell helyettesítenünk a feladatban megadott függvényt egy képletbe, s az így kapott integrált ki kell számolnunk. Ha az integrandus egyszerű, mint ebben a feladatban, akkor ez nem okoz gondot. Ha viszont az integrandus bonyolult, akkor különböző integrálási módszereket kell alkalmaznunk.

2. feladat Határozzuk meg azon forgástest térfogatát, melyet az $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x$ függvény $[0,\ 1]$ intervallumhoz tartozó görbedarabjának x-tengely körüli forgatásával kapunk!

Megoldás: Helyettesítsünk be ugyanúgy a térfogat képletébe, mint az előző feladatban.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} \cdot e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 x \cdot (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 x \cdot e^{2x} dx$$

A primitív függvény meghatározásához parciális integrálásra van szükség, célszerű külön elvégezni a határozatlan integrálást. A szereposztásról is döntenünk kell, legyen $f(x) = x$ és $g'(x) = e^{2x}$. Állítsuk elő $f'(x)$-et és $g(x)$-et.

$$f'(x) = x' = 1, \quad g(x) = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2}$$

Helyettesítsünk a szabályba, majd határozzuk meg a visszamaradó integrált is.

$$\int x \cdot e^{2x} dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int 1 \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c$$

Térjünk vissza a térfogathoz.

$$V = \pi\left[x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1 = \pi\left((1 \cdot \frac{e^{2\cdot 1}}{2} - \frac{e^{2\cdot 1}}{4}) - (0 \cdot \frac{e^{2\cdot 0}}{2} - \frac{e^{2\cdot 0}}{4})\right) = \pi\left((\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}) - (0 - \frac{e^0}{4})\right) =$$

$$\pi(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}) \approx 5.02$$

3. feladat Számoljuk ki azon forgástest térfogatát, mely az $f(x) = \operatorname{th} x$ függvény $[0,\ 1]$ intervallumhoz tartozó görbedarabjának x-tengely körüli forgatásával keletkezik!

Megoldás: Helyettesítsük be most is a függvényt és az intervallumot a térfogatképletbe.

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 \mathrm{th}^2 x\,dx$$

Ehhez nagyon hasonló integrandussal még a modul első leckéjének 8. feladatában találkoztunk. Alakítsuk hasonló módon a függvényt, mint abban a feladatban. Írjuk be, hogy $\mathrm{th}\ x=\frac{\mathrm{sh}\ x}{\mathrm{ch}\ x}$.

$$V=\pi\int_0^1\left(\frac{\mathrm{sh}\ x}{\mathrm{ch}\ x}\right)^2 dx=\pi\int_0^1\frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x}dx$$

Használjuk fel az $1=\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x$ azonosságot, melyből $\mathrm{sh}^2 x=\mathrm{ch}^2 x-1$. Helyettesítsük ezt a számlálóba, majd darboljuk fel a törtet két törtre, és egyszerűsítsünk. Ezután már el lehet végezni az integrálást, majd behelyettesíthetjük a határokat.

$$V=\pi\int_0^1\frac{\mathrm{ch}^2 x-1}{\mathrm{ch}^2 x}dx=\pi\int_0^1\left(\frac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x}-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\right)dx=\pi\int_0^1\left(1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\right)dx=\pi[x-\mathrm{th}\ x]_0^1=$$

$$=\pi((1-\mathrm{th}\ 1)-(0-\mathrm{th}\ 0))=\pi(1-\mathrm{th}\ 1)\approx 0.75$$

4. feladat Határozzuk meg az $f(x)=x\cdot\sqrt{x}$ függvény görbéjének ívhosszát a $\left[0,\ \frac{1}{4}\right]$ intervallumon!

Megoldás: Helyettesítsünk a folytonos görbe ívhosszának képletébe. Mivel ebben a függvény deriváltja szerepel, ezért állítsuk elő a deriváltat.

$$f'(x)=(x\cdot\sqrt{x})'=\left(\sqrt{x^3}\right)'=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Most jöhet az ívhossz.

$$S=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}dx=\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\int_0^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}dx=$$

Az integrandus összetett függvény, melynek belső függvénye lineáris. Amint az a modul második leckéjében szerepelt, ilyenkor integráljuk a külső függvényt, s osztunk a belső függvényből x együtthatójával.

$$S=\left[\frac{(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}}\right]_0^{\frac{1}{4}}=\frac{8}{27}\left[\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)}^3\right]_0^{\frac{1}{4}}=\frac{8}{27}\left(\left(\sqrt{(1+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{4})}^3\right)-\left(\sqrt{(1+\frac{9}{4}\cdot 0)}^3\right)\right)=\frac{8}{27}\left(\frac{125}{64}-1\right)=\frac{61}{216}$$

5. feladat Mennyi az ívhossza az $f(x)=x^2-\frac{\ln\ x}{8}$ függvény $[1,\ e]$ intervallumhoz tartozó görbedarabjának?

Megoldás: Vegyük a függvény deriváltját.

$$f'(x)=\left(x^2-\frac{\ln\ x}{8}\right)'=2x-\frac{1}{8x}$$

Helyettesítsük be az ívhossz képletébe, majd a gyök alatt végezzük el a műveleteket.

$$S=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int_1^e\sqrt{1+\left(2x-\frac{1}{8x}\right)^2}dx=\int_1^e\sqrt{1+\left(4x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2}\right)}dx=\int_1^e\sqrt{4x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2}}dx$$

A gyök alatti kifejezésben teljes négyzetet lehet felismerni, s így elünik a négyzetgyök, és a függvényt tudjuk integrálni. Utána már csak a határokat kell behelyettesíteni.

$$S=\int_1^e\sqrt{\left(2x+\frac{1}{8x}\right)^2}dx=\int_1^e\left(2x+\frac{1}{8x}\right)dx=\left[x^2+\frac{\ln\ x}{8}\right]_1^e=$$

$$=\left(e^2+\frac{\ln\ e}{8}\right)-\left(1^2+\frac{\ln\ 1}{8}\right)=e^2+\frac{1}{8}-1=e^2-\frac{7}{8}\approx 6.51$$

Megjegyzés: Amikor görbe ívhosszát kell meghatároznunk, akkor sajnos egy olyan képletbe kell helyettesítenünk, amelyben gyök szerepel. Emiatt az integrálás általában nehéz, hacsak a gyök alatti kifejezés nem elsőfokú, vagy nem ismerünk fel teljes négyzetet. A behelyettesítés után mindig el kell végezni a műveleteket a gyök alatt, és a kapott kifejezést megvizsgálni, nem teljes négyzet-e.

6. feladat Számítsuk ki az $f(x) = \ln(\sin x)$ függvény $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumhoz tartozó görbedarabjának ívhosszát!

Megoldás: Deriváljuk a függvényt.

$$f'(x) = (\ln(\sin x))' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$$

Helyettesítsünk az ívhossz képletébe.

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}\,dx$$

Az integrálást ebben az alakban nem tudjuk elvégezni. Célszerűbb a $\operatorname{ctg} x$ helyett visszatérni $\frac{\cos x}{\sin x}$-re, majd a négyzetreemelés után, közös nevezőre hozni a gyök alatt. Ezután a számlálóban egy nevezetes kifejezést ismerhetünk fel, melynek értéke 1. Így viszont már teljes négyzet áll a gyök alatt, s a gyök kiküszöbölhető. (Abszolút értékre nincsen szükség, mert a függvény az integrálási intervallumon pozitív.)

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx =$$

A gond ezután az, hogy a $\sin x$ a nevezőben szerepel. Használjuk a nevezőben a következő átalakítást. Mivel $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ minden esetben igaz, és $x = 2 \cdot \frac{x}{2}$, ezért $\alpha = \frac{x}{2}$ esetben $\sin x = 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$. Mivel így a nevezőben a félszögek szögfüggvényei jelennek meg, célszerű a számlálóba is ezeket behozni, tehát az 1 helyére a $\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$ kifejezést írni. A törtet ezután célszerű két törtre bontani, s azokat egyszerűsíteni.

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}} + \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right)dx$$

A nevezőkben szereplő 2-es szorzók helyett írjunk inkább a számlálókba $\frac{1}{2}$-eket, valamint az első tört elé és a tört számlálójába negatív előjelet, mert így $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú törteket kapunk. Ezeket már tudjuk integrálni, s átalakítás után be lehet a határokat helyettesíteni.

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\left(\cos\frac{x}{2}\right)'}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)'}{\sin\frac{x}{2}}\right)dx = \left[-\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right) + \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[\ln\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) - \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right) = \ln 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = 0 + \ln\sqrt{3} \approx 0.55$$

7. feladat Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{3x+1}$ függvény $[1, 3]$ intervallumhoz tartozó görbedarabjának x-tengely körüli megforgatásakor keletkező forgástest palástjának felszínét!

Megoldás: Mivel a felszín képletében is szerepel a függvény deriváltja, most is kezdjünk a deriválással.

$$f'(x) = \left(\sqrt{3x+1}\right)' = \left((3x+1)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{(3x+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

Helyettesítsünk be a képletbe.

$$F = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = 2\pi \int_1^3 \sqrt{3x+1} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}\right)^2}\,dx$$

A gyök alatt emeljünk négyzetre, majd hozzunk közös gyök alá, és végezzük el a műveleteket.

$$F = 2\pi \int_1^3 \sqrt{3x+1} \cdot \sqrt{1 + \frac{9}{4(3x+1)}}\,dx = 2\pi \int_1^3 \sqrt{(3x+1)\left(1 + \frac{9}{4(3x+1)}\right)}\,dx = 2\pi \int_1^3 \sqrt{3x+1 + \frac{9(3x+1)}{4(3x+1)}}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_1^3 \sqrt{3x+1+\frac{9}{4}}dx = 2\pi\int_1^3 \sqrt{3x+\frac{13}{4}}dx = 2\pi\int_1^3 (3x+\frac{13}{4})^{\frac{1}{2}}dx$$

Az integrandus olyan összetett függvény, melynek belső függvénye lineáris. Integráljuk a külső függvényt, s ne feledkezzünk meg arról, hogy osztani kell a belső függvényből x együtthatójával.

$$F = 2\pi\left[\frac{(3x+\frac{13}{4})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot 3}\right]_1^3 = \frac{4\pi}{9}\left[\sqrt{(3x+\frac{13}{4})^3}\right]_1^3 = \frac{4\pi}{9}\left(\left(\sqrt{(3\cdot 3+\frac{13}{4})^3}\right) - \left(\sqrt{(3\cdot 1+\frac{13}{4})^3}\right)\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{9}\left(\sqrt{\left(\frac{49}{4}\right)^3} - \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^3}\right) = \frac{4\pi}{9}\left(\left(\sqrt{\frac{49}{4}}\right)^3 - \left(\sqrt{\frac{25}{4}}\right)^3\right) = \frac{4\pi}{9}\left(\left(\frac{7}{2}\right)^3 - \left(\frac{5}{2}\right)^3\right) = \frac{4\pi}{9}\left(\frac{343}{8} - \frac{125}{8}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{9}\cdot\frac{218}{8} \approx 38.05$$

8. feladat Számoljuk ki azon forgástest palástjának felszínét, mely az $f(x) = \frac{x^3}{3}$ függvény $[0,\ 1]$ intervallumhoz tartozó görbedarabjának x -tengely körüli forgatásakor keletkezik!

Megoldás: Deriváljuk a függvényt.

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

Helyettesítsünk a palástfelszín képletébe.

$$F = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = 2\pi\int_0^1 \frac{x^3}{3}\cdot\sqrt{1+(x^2)^2}dx = \frac{2\pi}{3}\int_0^1 x^3\cdot\sqrt{1+x^4}dx =$$

Írjuk a gyököt inkább hatványként, valamint szorozzunk 4 -gyel, s az integrál elé pedig írjunk $\frac{1}{4}$ -et, mert ekkor az integrandus $f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)$ típusú lesz.

$$F = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{4}\int_0^1 4x^3\cdot(1+x^4)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{\pi}{6}\int_0^1 (1+x^4)^{\frac{1}{2}}\cdot(1+x^4)'dx = \frac{\pi}{6}\left[\frac{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{9}\left[\sqrt{(1+x^4)^3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{9}\left(\sqrt{(1+1^4)^3} - \sqrt{(1+0^4)^3}\right) = \frac{\pi}{9}(\sqrt{8}-1) \approx 0.64$$

9. feladat: Mennyi a palástfelszíne annak a forgástestnek, melyet az $f(x) = \text{ch}\ x$ függvény $[0,\ 1]$ intervallumhoz tartozó görbedarabjának x -tengely körüli forgatásával kapunk?

Megoldás: Állítsuk elő a függvény deriváltját.

$$f'(x) = (\text{ch}\ x)' = \text{sh}\ x$$

Helyettesítsünk a palástfelszínt megadó képletbe.

$$F = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = 2\pi\int_0^1 \text{ch}\ x\cdot\sqrt{1+\text{sh}^2 x}dx$$

Mivel $1 = \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x$, ezért $1+\text{sh}^2 x = \text{ch}^2 x$.

$$F = 2\pi\int_0^1 \text{ch}\ x\cdot\sqrt{\text{ch}^2 x}dx = 2\pi\int_0^1 \text{ch}^2 x dx$$

Adjuk össze az $1 = \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x$ és $\text{ch}\ 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x$ azonosságokat, s osszuk 2 -vel. Így kapjuk a $\text{ch}^2 x = \frac{1+\text{ch}\ 2x}{2} =$ azonosságot, melyet írjunk be az integrandusba.

$$F = 2\pi\int_0^1 \frac{1+\text{ch}\ 2x}{2}dx = \pi\int_0^1 (1+\text{ch}\ 2x)dx =$$

A $\text{ch}\ 2x$ integrálásánál ne feledkezzünk meg a lineáris belső függvényről, ami miatt osztani kell 2 -vel.

$$F=\pi[x+\frac{\text{sh }2x}{2}]_0^1=\pi\left((1+\frac{\text{sh }2}{2})-(0+\frac{\text{sh }0}{2})\right)=\pi(1+\frac{\text{sh }2}{2})\approx 8.84$$

10. feladat Mennyi munkát kell végezni ahhoz, hogy egy $m=1\ t$ tömegű űrhajót $h=1000\ km$ magasra juttassunk a Föld felszínétől?

A Föld sugara: $R=6370\ km$.

A Föld Tömege: $M=6{\cdot}10^{24}\ kg$.

A gravitációs állandó: $k=6.67{\cdot}10^{-11}\ \frac{m^3}{kg{\cdot}s^2}$.

Megoldás: Az űrhajóra a Föld által kifejtett gravitációs erő hat, mely arányos az űrhajó és a Föld tömegével, és fordítva arányos tömegközéppontjaik távolságának négyzetével.

Képletben: $F=k\frac{Mm}{r^2}$.

Mivel a mozgás során változik a két test tömegközéppontjának távolsága, ezért változik az erő is, azaz az erő a távolság függvénye lesz. Matematikában jobban megszokot jelöléssel azt írhatjuk, hogy most $x=r$, és $F(x)=k\frac{Mm}{x^2}$. Az elméleti összefoglalóban szerepelt, hogy változó erő esetén $W=\int_a^b F(x)\,dx$. Ebbe az $F(x)$ függvényt már be tudjuk helyettesíteni, de szükségünk van még az integrálási határokra is. Ezek azt adják meg, hogy a test kezdeti és végső helyzetéhez, az x változó milyen értékei tartoznak. Kezdetben a Föld felszínén van az űrhajó, tehát $a=R$, a végső helyzetben pedig a felszín felett h magasságban lesz, tehát $b=R+h$. Így már felírható a konkrét feladathoz tartozó integrál, s a munka kiszámolható.

$$W=\int_a^b F(x)\,dx=\int_R^{R+h} k\frac{Mm}{x^2}$$

Az integrálban $k,\ M,\ m$ állandó, így ezek kiemelhetők az integrál elé.

$$W=kMm\int_R^{R+h}\frac{1}{x^2}dx=kMm\int_R^{R+h}x^{-2}dx=kMm\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_R^{R+h}=kMm\left[\frac{-1}{x}\right]_R^{R+h}=kMm(\frac{-1}{R+h}-\frac{-1}{R})=$$

$$=kMm(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h})=6.67{\cdot}10^{-11}{\cdot}6{\cdot}10^{24}{\cdot}10^3(\frac{1}{6.37{\cdot}10^6}-\frac{1}{7.37{\cdot}10^6})\approx 8.52{\cdot}10^9\ J=8520\ MJ$$

Megjegyzés: A behelyettesítés során célszerű mindent SI alapegységben helyettesíteni, s így az eredményt is SI alapegységben kapjuk meg. Jelen esetben a km -ről célszerű áttérni m -re, s t -ról kg -ra.

11. feladat Kezdetben $V_1=1\ m^3$ téfogatú és $p_1=10^6\ Pa$ nyomású héliumgáz adiabatikusan tágul $V_2=2\ m^3$ térfogatra. Mennyi munkát végez tágulása során a gáz?

Megoldás: Az adiabatikus folyamatokban $pV^\kappa=$ állandó, ahol $\kappa=\frac{f+2}{f}$. Itt f a gázrészecskék szabadsági fokainak számát jelenti, ami egyatomos gázok esetén 3. Ilyen gáz a hélium is, hiszen nemesgáz. Feladatunkban tehát $\kappa=\frac{5}{3}$.

Ahhoz, hogy a munkát kiszámolhassuk, fel kell írnunk a $p(V)$ függvényt, azaz meg kell adnunk, hogyan változik a nyomás a térfogat függvényében.

Mivel $pV^\kappa=$ állandó $\Rightarrow\ pV^\kappa=p_1V_1^\kappa\ \Rightarrow\ p=\frac{p_1V_1^\kappa}{V^\kappa}$, azaz a keresett függvény $p(V)=\frac{p_1V_1^\kappa}{V^\kappa}$, hiszen ebben csak a térfogat változik. Helyettesítsük ezt be a tágulási munka képletébe.

$$W=\int_{V_1}^{V_2}p(V)\,dV=\int_{V_1}^{V_2}\frac{p_1V_1^\kappa}{V^\kappa}dV$$

Mivel $p_1V_1^\kappa=$ állandó, ezért kiemelhető az integrál elé.

$$W=p_1V_1^\kappa\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V^\kappa}dV=p_1V_1^\kappa\int_{V_1}^{V_2}V^{-\kappa}dV=p_1V_1^\kappa\left[\frac{V^{1-\kappa}}{1-\kappa}\right]_{V_1}^{V_2}=p_1V_1^\kappa(\frac{V_2^{1-\kappa}}{1-\kappa}-\frac{V_1^{1-\kappa}}{1-\kappa})=p_1V_1^\kappa\frac{V_1^{1-\kappa}-V_2^{1-\kappa}}{\kappa-1}=$$

$$= \frac{p_1 V_1^{\kappa} \cdot V_1^{1-\kappa} - p_1 V_1^{\kappa} \cdot V_2^{1-\kappa}}{\kappa - 1} = \frac{p_1 V_1 - p_1 V_1^{\kappa} \cdot V_2^{1-\kappa}}{\kappa - 1}$$

Ebbe már be lehet helyettesíteni a konkrét adatokat.

$$W = \frac{10^6 \cdot 1 - 10^6 \cdot 1^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{1-\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3} - 1} = 10^6 \frac{1 - 2^{-\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \approx 5.55 \cdot 10^5 \ J = 555 \ KJ$$

Megjegyzés: Mivel $pV^{\kappa} =$ állandó, ezért az utolsó összefüggésben $p_1 V_1^{\kappa}$ helyére $p_2 V_2^{\kappa}$ is írható, és így a munka egyszerűbben is kifejezhető.

$$W = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2^{\kappa} \cdot V_2^{1-\kappa}}{\kappa - 1} = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\kappa - 1}$$

Ez a munka legyegyszerűbb kifejezési módja adiabatikus tágulás esetén. Ahhoz azonban, hogy ezt használni tudjuk, szükségünk van p_2-re. Ezt a $p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa}$ egyenletből lehet kiszámolni.

Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: Mekkora az $f(x) = e^x$ függvény $[0,\ 1]$ intervallumhoz tartozó görbedarabjának x-tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest térfogata?

- $\frac{\pi}{2}(e-1)$
- $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$
- $\pi(e-1)$
- $\pi(e^2-1)$

2. kérdés: Mekkora térfogatú test keletkezik az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumhoz tartozó görbedarabjának x-tengely körüli megforgatásakor?

- $\frac{4\pi - \pi^2}{4}$
- $\frac{\pi^2 - 2\pi}{4}$
- $\frac{\pi^2 + 2\pi}{4}$
- $\frac{4\pi + \pi^2}{4}$

3. kérdés: Mennyi az ívhossza az $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ függvény $[0,\ 2]$ intervallumhoz tartozó görbedarabjának?

- 1
- $\frac{\pi}{2}$
- 2
- π

4. kérdés: Milyen hosszú az $f(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{1}{8x}$ függvény grafikonjának $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ intervallumhoz tartozó darabja?

- $\frac{1}{2}$
- $\frac{7}{12}$
- $\frac{17}{24}$
- $\frac{5}{6}$

5. kérdés: Mekkora az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $[0, 2]$ intervallumhoz tartozó görbedarabjának x -tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest palástjának felszíne?

- $\frac{13\pi}{6}$
- $\frac{13\pi}{4}$
- $\frac{13\pi}{3}$
- $\frac{13\pi}{2}$

6. kérdés: Ha az $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ függvény grafikonjának $[0, 3]$ intervallumhoz tartozó darabját megforgatjuk az x -tengely körül, akkor mekkora lesz a keletkező forgástest palástjának felszíne?

- 12π
- 18π
- 27π
- 36π

7. kérdés: Egy $Q_1 = 10^{-5}\ C$ nagyságú, rögzített, pozitív töltéstől $1\ cm$ távolságra $Q_2 = 10^{-6}\ C$ nagyságú, szabad, pozitív töltés található. Mennyi munkát végez a Q_1 töltés körüli elektromos mező a Q_2 töltésen, miközben a két töltés $2\ cm$ -re távolodik el egymástól?
Két pontszerű töltés közötti erő: $F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$, ahol r a két töltés távolsága, és $k = 9 \cdot 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}$.

- $1.35\ J$
- $4.5\ J$
- $13.5\ J$
- $45\ J$