

SZÁMÍTÓGÉPES ESZKÖZÖK DINAMIKUS MODELLEK VIZSGÁLATÁRA

4. hét - Közöséges differenciálegyenletek

Bánhelyi Balázs

Szegedi Tudományegyetem

2012

- ▶ A differenciálegyenletek olyan egyenletek, melyekben az ismeretlen egy függvény és az egyenletben az ismeretlen függvény deriváltja is előfordul. Például ha $y = y(x)$ az ismeretlen függvény, akkor

- ▶ $y' = y$
- ▶ $y' = -y$
- ▶ $y'' = y$

függvényegyenletek differenciálegyenletek.

- ▶ Az $y' = y$ differenciálegyenletet megoldani annyit jelent, mint megtalálni az összes olyan függvényt, amely egyenlő az ő derivált függvényével. Könnyű látni, hogy minden $c \in \mathbb{R}$ -re az $y = ce^x$ alakú függvényre igaz, hogy az ő deriváltjaik saját magukkal megegyeznek, tehát az összes $y = ce^x$ alakú függvény az $y' = y$ differenciálegyenlet megoldása.

- ▶ Az $y'' = -y$ egyenletet illetően, mind az $y(x) = \cos(x)$, mind pedig az $y(x) = \sin(x)$ függvényekre igaz, hogy az ő második deriváltjuk saját maguk negatívjával egyezik meg, vagyis, hogy a $\cos(x)$ és $\sin(x)$ függvények az $y'' = -y$ egyenlet megoldását képezik. Azt nagyon könnyű látni, hogy ezek tetszőleges lineáris kombinációja szintén megoldást ad. Tehát tetszőlegesen választott $a, b \in \mathbb{R}$ számokra az $y(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$ az $y'' = -y$ diff.egyenlet megoldását adja.
- ▶ Hasonlóan kapjuk, hogy az $y'' = y$ egyenlet minden megoldása $y = a \operatorname{ch}(x) + b \operatorname{sh}(x)$.

- ▶ Az $y'(t) = F(t, y(t))$ alakú differenciálegyenletek elsőrendű differenciálegyenletek.
- ▶ Az $y' = f(x)g(y)$ alakú elsőrendű közönséges differenciálegyenletek szétválasztható változójú differenciálegyenletek.
- ▶ Az $y' + p(x)y = q(x)$ alakú diff.egyenleteket elsőrendű lineáris diff.egyenleteknek hívjuk.
- ▶ Az autonóm egyenletek általános alakja $y' = f(y)$.

- Legyen $f(x)$ egy folytonos függvény valamely I_1 és $g(y)$ egy folytonos függvény valamely I_2 intervallumon, továbbá $g(y) = 0$, ha $y \in I_2$. Ekkor az

$$y' = f(x)g(y)$$

alakú elsőrendű közönséges differenciálegyenleteket szétválasztható változójú differenciálegyenleteknek hívjuk. Legyen $h(y) = \frac{1}{g(y)}$. Tehát $h(y)y' = f(x)$. Ekkor a helyettesítéses integrálás szabálya szerint és $\frac{dy}{dx} = y'$ alapján:

$$\int h(y)dy = \int f(x)dx + C$$

- A normális növekedés egyenlete: legyen $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $a \in \mathbb{R}$

$$y' = ky \text{ és } y(0) = a.$$

Ez nagyon fontos egyenlet, mert sokszor előfordul a gyakorlatban, ezért a megoldását fejből kell tudni.

Nyilvánvalóan szétválasztható változójú diff.egyenlet.

$y' = \frac{dy}{dx}$ -et írva: $\frac{dy}{dx} = ky$. Az y -os és x -es tagokat

külön oldalra rendezve: $\frac{1}{k} \frac{dy}{y} = dx$. Mindkét oldalt

integrálva: $\ln|y| = kx + C$, amiből az $y' = ky$ általános megoldása $y = e^C e^{kx}$. Használva, hogy

$a = y(0) = e^C e^0$, ebből a Cauchy feladat megoldása:

$$y = a e^{kx}.$$

Példa II.

- $y'y^2 = 1$. Ez a diff.egyenlet szétválasztható változójú, mivel a fenti $f(x) = 1$ és $g(y) = \frac{1}{y^2}$ választással $y' = f(x)g(y)$. Az $y' = \frac{dy}{dx}$ -et írva és a dx -szel formálisan átszorozva kapjuk, hogy:

$$y^2 dy = dx.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\int y^2 dy = \int dx.$$

Amiből $\frac{y^3}{3} = x + C$ adódik. Innen $y = \sqrt[3]{3x + C}$ (mivel C tetszőleges konstans, nem kell 3-mal megszorozni, mert $3C$ ugyanúgy mindentől független konstans, mint C).

Elsőrendű lineáris diff.egyenletek megoldása I.

Az

$$y' + p(x)y = q(x)$$

alakú diff.egyenleteket elsőrendű lineáris diff.egyenleteknek hívjuk. Itt feltételezzük, hogy a $p(x)$ és a $q(x)$ függvények folytonosak. (Vagyis a megoldásokat olyan intervallumon keressük, ahol a $p(x)$ és a $q(x)$ függvények folytonosak.) A fenti egyenletek megoldását a következő példán szemléltetjük:

$$xy' + 3y = x^2, x > 0$$

Ahhoz, hogy az egyenletet a fenti alakúra hozzuk, el kell osztanunk x -szel mind a két oldalt. Ezért, a megoldásokat olyan intervallumokon kereshetjük, amelyek a 0-át nem tartalmazzák. Tegyük fel tehát, hogy mostantól $x > 0$ és osszunk el x -szel. Kapjuk, hogy

$$y' + \frac{3}{x}y = x.$$

Elsőrendű lineáris diff.egyenletek megoldása II.

Ekkor az eredeti egyenlet jelöléseivel: $p(x) = \frac{3}{x}$; $q(x) = x$. A megoldás két lépésből áll. Először megoldjuk az

$$Y' + \frac{3Y}{x} = 0$$

homogén diff.egyenletet. Majd ennek az általános megoldásában előforduló C konstans helyére egy olyan $C(x)$ függvényt írunk, hogy ezzel a feladat megoldását kapjuk. Így módon a feladat egy partikuláris megoldásához jutunk. Az általános megoldását úgy kapjuk, hogy

$$y_{i,\text{ált}} = Y_{h,\text{ált}} + y_{i,p}$$

vagyis a feladat inhomogén egyenlet általános megoldása ($y_{i,\text{ált}}$) egyenlő a homogén általános megoldása ($Y_{h,\text{ált}}$) plusz az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása ($y_{i,p}$).

Elsőrendű lineáris diff.egyenletek megoldása II.

1. lépés: A homogén rész az $Y' + 3Y/x = 0$ diff.egyenlet, amely szétválasztható változójú és megoldása:

$$Y_{h,ált} = C/x^3.$$

2. lépés: Most keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását, $y_{i,p}$ -t. Ehhez szeretnénk meghatározni egy olyan $C(x)$ függvényt, amelyre $y = C(x)/x^3$ megoldása az eredeti egyenletnek. Mivel $y' = -3Cx^{-4} + C'x^{-3}$, ezt behelyettesítve kapjuk, hogy

$$C'x^{-3} - 3Cx^{-4} + 3x^{-1}Cx^{-3} = x.$$

Innen: $C(x) = x^5/5$ (itt nem kell feltüntetni az integrálból adódó konstans, mert csak egy partikuláris megoldást keresünk). Tehát

$$y_{i,p} = C(x)x^{-3} = x^5/5x^{-3} = x^2/5.$$

Így az általános megoldása:

$$y_{i,ált} = Y_{h,ált} + y_{i,p} = Cx^{-3} + \frac{x^2}{5}.$$

Elsőrendű lineáris diff.egyenletek megoldása (Megjegyzés)

A megoldásnak ezt a módszerét konstans variációs módszernek nevezzük, mert az $y_{i,p}$ -t úgy határoztuk meg, hogy a homogén egyenlet általános megoldásában előforduló C konstans helyettesítettük egy $C(x)$ függvénnyel.

- ▶ Ha egy elsőrendű egyenletet nem is tudunk megoldani, akkor is lehet esélyünk annak a nagyon fontos kérdésnek az eldöntésére, hogy létezik-e és ha igen, akkor egyértelmű-e a megoldás. Ha az előbbire a válasz igen, akkor van egzisztencia, ha ezen felül a második kérdésre is pozitív a válasz, akkor teljesül az unicitás.

- **TÉTEL:** Ha a $p(t)$ és $q(t)$ függvények folytonosak az $I = (\alpha, \beta)$ nyílt intervallumon és $t_0 \in I$, akkor a

$$y' + p(t)y = q(t), y(t_0) = y_0$$

kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű az I intervallumon. Azaz létezik **EGYETLEN** olyan $y(t)$ függvény, amely a kezdeti érték problémájának megoldása és amely minden $t \in I$ -re értelmezett.

- ▶ Találjunk olyan intervallumot, amelyen

$$ty' + 2y = 4t^2, y(1) = 2$$

kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű.

- ▶ Mindkét oldalt t -vel leosztva kapjuk az $y' + \frac{2}{t}y = 4t$ egyenletet. Tehát $p(t) = 2/t$ és $q(t) = 4t$. Vagyis $q(t)$ értelmezett és folytonos minden $t \in R$ -re, de $p(t)$ a $t = 0$ -ban nincs értelmezve. Tehát vagy azt kell feltennünk, hogy $t > 0$ vagy azt, hogy $t < 0$. Figyelembe véve a kezdeti feltételt a $t > 0$ rész a releváns. Ezután használva a Tételt kapjuk, hogy a kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű a $0 < t < \infty$ intervallumon.

- **TÉTEL:** Tegyük fel, hogy mind az F , mind a $\partial F / \partial y$ folytonos függvények egy olyan $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$ téglalapon, amely tartalmazza a (t_0, y_0) pontot. Akkor van olyan $(t_0 - h, t_0 + h) \subset (\alpha, \beta)$ intervallum, amelyben a következő kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű:

$$y' = F(t, y), y(t_0) = y_0.$$

- ▶ Találjunk olyan intervallumot, amelyen

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}, y(0) = -1.$$

kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű.

- ▶ Vegyük észre, hogy

$$F(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \text{ és } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)^2}$$

értelmezett és folytonos mindenütt, kivéve az $y \equiv 1$ horizontális egyenes pontjait. A $(0, -1)$ pont körül nyilván rajzolható olyan téglalap, ami nem metszi az $y \equiv 1$ egyenest. Ezért a Tétel értelmében a kezdeti érték problémának a megoldása létezik és egyértelmű VALAMELY olyan intervallumon, amely a 0-át tartalmazza. Az azonban, hogy akármilyen hosszú olyan téglalapot rajzolhatunk a $(0, -1)$ pont körül, amely nem metszi az $y \equiv 1$ horizontális egyenest NEM jelenti azt, hogy a megoldás létezik minden x -re!

Példa (folyt.)

Valójában a szétválasztható változójú differenciálegyenletet megoldva kapjuk, hogy a kezdeti érték probléma megoldása:

$$y(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} = 1 - \sqrt{(x+2)(x^2+2)}.$$

Könnyen látható, hogy ez a kifejezés csak $x > -2$ esetén ad megoldást ($x = -2$ -ben $y(-2) = 1$, és ez nem lehetséges mert, akkor az egyenletben 0-val kellene osztani és $x < -2$ -re a gyök alatti kifejezés negatív).

- ▶ Vizsgáljuk a következő kezdeti érték problémát a megoldás létezése és egyértelmősége szempontjából!

$$y' = y^2, y(0) = 1.$$

- ▶ A Tétel feltételei teljesülnek, ezért **LÉTEZIK** a $t = 0$ körül olyan intervallum, amelyben a megoldás létezik és egyértelmű. Sőt erre az ártatlan kinézetű egyenletre tekintve az ember azt gondolná, hogy a megoldás talán az egész számegyenesen létezik. Azonban, ha megoldjuk a szétválasztható változójú egyenletet látjuk, hogy a Cauchy-feladat megoldása:

$$y = \frac{1}{1 - t},$$

ami nem értelmezett $t = 1$ -ben tehát a megoldás csak a $(-\infty, 1)$ nyílt intervallumon létezhet. Erre a jelenségre az egyenletünk alakja nem figyelmeztet!!!

- Tekintsük az

$$y' = F(t, y), y(t_0) = y_0$$

- Az ismertetteken kívül még nagyon sok olyan eset van, amikor a kezdeti érték feladatát meg tudjuk oldani. Azonban olyan esetek is vannak, amikor az egyenlet megoldására semmilyen módszert nem találunk vagy ugyan meg tudjuk oldani az egyenletet, de a megoldást olyan bonyolult képlet adja, ami nem mond semmit. Az egyik dolog, amit ilyen esetben tehetünk, ha megnézzük az íránymezőt.
- Az íránymezőt úgy kapjuk, ha a ty sík nagyon sok (t, y) pontján keresztül megrajzoljuk annak az egyenesnek egy picike darabját, amelynek meredeksége $F(t, y)$. Mivel ez az egyenes a keresett megoldás érintője a t -ben, ezen vonal elemek a keresett megoldások közelítését adják. Annál pontosabb közelítést, minél több ponton keresztül rajzoljuk meg a fenti vonal elemeket.

- ▶ Tekintsük az $y'(y) = e^y$ egyenletet.
- ▶ Matlab kód:

```
f=@(x,t)exp(x);  
[x,t]=meshgrid(0:0.5:10);  
slopes = f(x,t);  
dt=slopes./sqrt(1+slopes.^2);  
dx=sqrt(1-dt.^2);  
quiver(x,t,dx,dt);
```

- ▶ Tisztázzuk először szemléletesen mit jelent a Ljapunov-féle stabilitás. Adott az $x' = f(t, x)$ differenciálegyenlet egy $F(t)$ megoldása. Most vegyük a differenciálegyenlet azon megoldásait, amelyek valamely t időpillanatban az $F(t)$ megoldás egy környezetébe kerülnek. Ha ezek a megoldások megmaradnak $F(t)$ megoldás egy környezetében ahogy előre haladunk az időben, akkor $F(t)$ megoldást Ljapunov értelemben stabilnak mondjuk. Ha ezek a megoldások minden határon túl megközelítik $F(t)$ -t az időben előre haladva, akkor $F(t)$ aszimptotikusan stabil megoldás. Ez azt is jelenti, hogy akárhol kicsit perturbálva $F(t)$ megoldást, áttérve egy, a környezetében futó másik integrálgörbére, $F(t)$ megoldás közelében maradunk.

- ▶ Definíció 1: (Ljapunov stabilitás) Az $x' = f(t, x)$ rendszer $F(t) \equiv 0$, $t \in [a, \infty)$ megoldása Ljapunov-stabil, ha minden $t_0 \in [a, \infty)$ -hoz és ϵ pozitív számhoz található egy $\delta(\epsilon, t_0)$ pozitív szám, melyre ha $\|x(t_0)\| < \delta(\epsilon, t_0)$, akkor minden $t > t_0$ -ra teljesül, hogy $\|x(t)\| < \epsilon$.
- ▶ Definíció 2: (egyenletes Ljapunov stabilitás) Az $x' = f(t, x)$ rendszer $F(t) \equiv 0$, $t \in [a, \infty)$ megoldása egyenletesen Ljapunov-stabil, ha $F(t) \equiv 0$ megoldás Ljapunov-stabil és δ független t_0 -tól.
- ▶ Definíció 3: (aszimptotikus Ljapunov stabilitás) A $x' = f(t, x)$ rendszer $F(t) \equiv 0$, $t \in [a, \infty)$ megoldása aszimptotikusan Ljapunov-stabil, ha minden $t_0 \in [a, \infty)$ -hoz található egy, melyre ha $\|x(t_0)\| < \delta(t_0)$, akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$.