

Matematika II/2

Szerző(k):

Lukács Antal

- -

Tartalom

2.2. Differenciálegyenletek

2.2.1. A differenciálegyenletek fogalma, osztályozása, a megoldás fajtái	1
2.2.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek	15
2.2.3. Szétválasztható változójú differenciálegyenletre visszavezethető differenciálegyenletek	34
2.2.4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek	48
2.2.5. Elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenletek	62
2.2.6. Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek	81
2.2.7. Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek	91
2.2.8. Rezonancia	104
2.2.9. Modulzáró ellenőrző kérdések	118

Tanulási cél: A differenciálegyenletekkel kapcsolatos alapfogalmak megismerése, explicit egyenletek megoldása.

Tananyag:

Tankönyv: Horváth Zoltán: Bevezetés a differenciálegyenletek megoldásába

Fejezet: 1. és 2.1.

Elméleti összefoglaló:

Differenciálegyenletnek nevezzük az olyan egyenleteket, melyekben az ismeretlen egy függvény, s az egyenletben ezen ismeretlen függvény valamelyik deriváltja, vagy deriváltjai is szerepelnek.

Ha az ismeretlen függvény egyváltozós, akkor a differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük. (Ha az ismeretlen függvény többváltozós, akkor parciális differenciálegyenletről beszélünk.) Mi csak közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

A differenciálegyenletben előforduló legmagasabbrendű derivált rendszámát a differenciálegyenlet rendjének nevezzük.

Lineárisnak nevezzük azokat a differenciálegyenleteket, melyekben az ismeretlen függvény és deriváltjai csak első hatványon fordulnak elő, s szorzatok sem szerepel. Ellenkező esetben nemlineáris differenciálegyenletről beszélünk.

Ha a differenciálegyenletben az ismeretlen függvényt és deriváltjait tartalmazó tagokban az együtthatók (szorzók) konstansok, akkor állandó együtthatós differenciálegyenletről beszélünk. Ellenkező esetben a differenciálegyenlet nem állandó együtthatós, s ilyenkor függvényegyütthatósnak is nevezik.

Ha a differenciálegyenletben nincs olyan tag, mely állandó, vagy amelyben nem szerepel az ismeretlen függvény és egyik deriváltja sem, akkor a differenciálegyenletet homogénnek mondjuk, ellenkező esetben pedig inhomogénnek.

Egy differenciálegyenletnek akkor megoldása egy függvény, ha deriváltjaival együtt kielégíti az adott egyenletet.

Egy differenciálegyenlet általános megoldásának nevezzük azt a paraméter(eke)t tartalmazó

függvényt, melyben a paraméter(ek) megengedett megválasztásai esetén mindig a differenciálegyenlet megoldását kapjuk, és a paraméter(ek) megfelelő választásával az összes reguláris (majdnem az összes) megoldás előáll. (A differenciálegyenletek úgynevezett szinguláris megoldásai nem állíthatók elő az általános megoldásból, de ezek a megoldások az alkalmazásokban nem fontosak.)

Egy n -ed rendű közönséges differenciálegyenlet általános megoldása pontosan n darab, egymástól független paramétert tartalmaz.

Egy n -ed rendű közönséges differenciálegyenlet partikuláris megoldásainak nevezzük azokat a függvényeket, melyek n -nél kevesebb paramétert tartalmaznak. Az elsőrendű differenciálegyenletek partikuláris megoldásai tehát nem tartalmaznak paramétert.

Kezdeti érték feladatról akkor beszélünk, ha az n -ed rendű differenciálegyenlet megoldását olyan feltétellel keressük, hogy egy bizonyos helyen adott az ismeretlen függvény és deriváltjainak értéke, kivéve az n -edik deriváltat. Ilyenkor az általános megoldásban szereplő paraméterek értékét a plussz feltételekből meg lehet általában határozni, s egyértelmű megoldást kapunk, mely a differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldása. (Nem minden kezdeti érték feladatot lehet azonban megoldani. A megoldhatóság feltételeinek vizsgálatával mi nem foglalkozunk, ahogyan a megoldás egyértelműségével sem.)

Ha a differenciálegyenlet $y' = f(x)$ alakú, vagy ilyen alakra hozható, akkor explicit alakú, elsőrendű differenciálegyenletről beszélünk. Az ilyen differenciálegyenletek általános megoldása integrálással megkapható:

$$y(x) = \int y'(x) dx = \int f(x) + c = F(x) + c$$

Kidolgozott feladatok:

1. feladat Vizsgáljuk meg az alábbi differenciálegyenletek rendjét, és döntsük el, lineárisak vagy sem!

$$(1) y' + xy^2 = x^3$$

$$(2) 3y' - 4y'' = 2xy$$

$$(3) y' + \sqrt{x} \cdot y = x^2$$

$$(4) y'' + 5y' + x \cdot \sqrt{y} = x^2$$

$$(5) \sqrt{x} + y \cdot y' = y''' - (y'')^2$$

Megoldás: A rend eldöntéséhez azt kell megnéznünk, melyik az ismeretlen függvény egyenletben szereplő legmagasabbrendű deriváltja. A linearitásnál azt vizsgáljuk, hogy az ismeretlen függvény csak első hatványon szerepel-e, s nem fordul-e elő az ismeretlen függvény és valamelyik deriváltjának, vagy két deriváltnak a szorzata.

Az (1) differenciálegyenlet elsőrendű, hiszen benne az ismeretlen y függvény első deriváltja szerepel csak. Ez az ismeretlen függvény az x független változó függvénye, és a derivált is x szerinti deriváltat jelent. Jelölésben: $y = y(x)$, és $y' = \frac{dy}{dx}$.

A linearitás eldöntéséhez vizsgáljuk meg az egyenletben szereplő tagokat. (A tagok az egyenlet olyan részei, melyeket $+$, $-$ vagy $=$ választ el egymástól.) Ebben az egyenletben három tag szerepel: y' , $x \cdot y^2$, x^3 . Ezek közül a másodikban az ismeretlen függvény négyzete áll, azaz ez a tag nem elsőfokú, s így az egyenlet nemlineáris.

A (2) egyenletben szerepel y'' is, ezért ez az egyenlet másodrendű. Ebben az egyenletben is három tag van: $3y'$, $4y''$, $2xy$. Ezekben az ismeretlen függvény és deriváltjai csak első hatványon állnak, tehát ez az egyenlet lineáris.

A (3) egyenletben az ismeretlen függvénynek csak első deriváltja szerepel, ezért elsőrendű. A benne szereplő tagok: y' , $\sqrt{x} \cdot y$, x^2 . Ezekben y és y' csak első hatványon fordul elő, így ez az egyenlet is lineáris. (Az egyenletben x -nek szerepel gyöke és négyzete is, de ez a linearitás szempontjából nem érdekes, hiszen x nem az ismeretlen függvény, hanem a változó.)

A (4) egyenlet másodrendű, mert az egyenletben előfordul y'' is. A következő tagok szerepelnek benne: y'' , $x \cdot \sqrt{y}$, x^2 . A második tagban lévő $\sqrt{y}$ miatt az egyenlet nemlineáris, hiszen itt az ismeretlen függvénynek nem az első hatványa áll.

Az (5) egyenlet harmadrendű, mert az ismeretlen függvény harmadik deriváltja is szerepel. Négy tag van az egyenletben, ezek: $\sqrt{x}$, $y \cdot y'$, y''' , $(y'')^2$. Az utolsóban a második derivált négyzete áll, ami nem elsőfokú, s így az egyenlet nemlineáris. De az egyenlet a második tag miatt sem lineáris, mert ebben az ismeretlen függvény és deriváltjának szorzata áll. Ha az ismeretlen függvényt valamelyik deriváltjával szorozzuk, akkor már nemlineáris az egyenlet, s akkor sem, ha két derivált szorzata szerepel.

2. feladat Döntsük el az alábbi differenciálegyenletekről, hogy melyik homogén, s melyik inhomogén!

$$(1) y' - xy = \sqrt{x}$$

$$(2) y' + 5\sqrt{y} = 1$$

$$(3) 4y'' + 2y' = 5y$$

$$(4) y'' - x \cdot \sqrt{y} + x = y'$$

$$(5) y^2 - y'' = y'$$

Megoldás: Most azt kell vizsgálnunk, van-e az egyenletben olyan tag, mely konstans, vagy amelyben nem szerepel sem az ismeretlen függvény, sem annak valamelyik deriváltja.

Az (1) egyenletben szereplő tagok: y' , xy , $\sqrt{x}$. Ezek közül az utolsóban csak x fordul elő, azaz ez az egyenlet inhomogén.

A (2) egyenletben a következő tagokat tartalmazza: y' , $5\sqrt{y}$, 1 . Megint az utolsó miatt lesz inhomogén az egyenlet, hiszen ez a tag konstans.

A (3) egyenletben is három tag van: $4y''$, $2y'$, $5y$. Ezek mindegyikében előfordul vagy az ismeretlen függvény (y), vagy annak valamelyik deriváltja (y' , y''). Ez az egyenlet tehát homogén.

A (4) egyenlet négy tagot tartalmaz, ezek: y'' , $x \cdot \sqrt{y}$, x , y' . A harmadikban csak a változó áll, ezért ezen tag miatt az egyenlet inhomogén.

Nézzük végül az (5) egyenletet. Ebben a következő tagok állnak: y^2 , y'' , y' . Ezek mindegyike tartalmazza vagy az ismeretlen függvényt, vagy annak deriváltját, így az egyenlet homogén.

Megjegyzés: A homogenitás eldöntése formálisan csak abból áll, hogy megnézzük, szerepel-e a tagok mindegyikében y , y' , y'' . . . legalább egyike. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az ismeretlen függvényt nem csak y -nal jelölhetjük, s a változó sem mindig x . Ilyenkor értelemszerűen járunk el, az aktuális jelölések tartalmára figyelve, hogy mi a változó, s mi az ismeretlen függvény. (Az ismeretlen függvénynek mindig szerepel valamelyik deriváltja, a változónak pedig nem, ezért egyértelmű, mi változó, s mi az ismeretlen.)

Az egyenleteket általában úgy rendezzük, hogy az ismeretlen függvényt és deriváltjait tartalmazó tagokat az egyenlet bal oldalára írjuk, s amelyekben nem szerepel sem a függvény sem a deriváltja azokat a jobb oldalra. Ilyenkor ha a jobb oldalon zérus van, akkor az egyenlet homogén.

3. feladat Az alábbi differenciálegyenletek közül melyek állandó együtthatósak, s melyek nem?

$$(1) y' + \sqrt{x} \cdot y = 2$$

$$(2) y' + \sqrt{2} \cdot y = x$$

$$(3) y'' + 5y' = e^x$$

$$(4) y'' - 3y' = xy$$

$$(5) y'' + x \cdot e^x - y' + \frac{y}{x} = 0$$

Megoldás: Most csak annyit kell vizsgálnunk, hogy az egyenletben szereplő tagokban az ismeretlen függvény illetve deriváltjai csak konstansokkal vannak szorozva vagy sem.

Az (1) egyenleten belül, a $\sqrt{x} \cdot y$ tagban az ismeretlen y függvény együtthatója a $\sqrt{x}$ függvény, tehát nem egy konstans, s így ez az egyenlet nem állandó együtthatós.

A (2) egyenlet azonban állandó együtthatós, hiszen itt az első tagban y' együtthatója 1 , a

másodikban pedig y együtthatója $\sqrt{2}$, s ezek konstansok.

Ugyanez mondható el a (3) egyenletről is. Az első tagban y'' együtthatója 1, a másodikban y' együtthatója 5. Ezek konstansok, az egyenlet állandó együtthatós.

A (4) egyenlet viszont nem állandó együtthatós, mert a jobb oldalon álló xy tagban az ismeretlen függvény együtthatója x , és ez nem állandó.

Az (5) egyenlet sem állandó együtthatós, mert ebben az $\frac{y}{x}$ tagban az y együtthatója az $\frac{1}{x}$ függvény.

Megjegyzés: A későbbiekben, a lineáris differenciálegyenletek megoldása során válik majd fontossá, hogy egy differenciálegyenlet állandó együtthatós vagy sem, mert az állandó együtthatós egyenletek általában egyszerűbben oldhatók meg, mint a függvényegyütthatósak.

4. feladat Behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy az $y' + \frac{y}{3x} = 1$ differenciálegyenletnek

megoldása az $y = \frac{3x}{4} + \frac{c}{\sqrt[3]{x}}$, $c \in \mathbb{R}$ függvény! Milyen megoldása ez az egyenletnek,

általános vagy partikuláris? Ha általános megoldás, akkor adjuk meg az $y(1) = 2$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást!

Megoldás: A behelyettesítéshez elő kell állítanunk a függvény deriváltját.

$$y' = \left(\frac{3x}{4} + \frac{c}{\sqrt[3]{x}} \right)' = \left(\frac{3x}{4} + c x^{-\frac{1}{3}} \right)' = \frac{3}{4} + c \left(-\frac{1}{3} \right) x^{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} - \frac{c}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{3}{4} - \frac{c}{3x\sqrt[3]{x}}$$

Helyettesítsünk az egyenlet bal oldalán y' és y helyére, és végezzük el a műveleteket.

$$y' + \frac{y}{3x} = \left(\frac{3}{4} - \frac{c}{3x\sqrt[3]{x}} \right) + \frac{\frac{3x}{4} + \frac{c}{\sqrt[3]{x}}}{3x} = \frac{3}{4} - \frac{c}{3x\sqrt[3]{x}} + \frac{\frac{3x}{4}}{3x} + \frac{\frac{c}{\sqrt[3]{x}}}{3x} = \frac{3}{4} - \frac{c}{3x\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{4} + \frac{c}{3x\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

A műveletek elvégzése után pontosan az egyenlet jobb oldalát kaptuk, azaz a függvény valóban megoldása az egyenletnek.

Mivel a függvény tartalmaz egy szabadon választható paramétert, s a differenciálegyenlet elsőrendű, ezért ez általános megoldás, hiszen az általános megoldás tartalmaz pontosan annyi paramétert, amennyi a differenciálegyenlet rendje. Ha a C paraméternek valamilyen konkrét értéket adunk, akkor kapunk egy partikuláris megoldást.

A kezdeti feltételünk azt jelenti, hogy ha a megoldásban x helyére 1 -et helyettesítünk, akkor a függvény értéke 2 lesz. Helyettesítsük be ezeket az értékeket a megoldásban x és y helyére. Így egyenletet kapunk a paraméterre, s C értéke ebből az egyenletből meghatározható.

$$2 = \frac{3 \cdot 1}{4} + \frac{c}{\sqrt[3]{1}} \Rightarrow 2 = \frac{3}{4} + c \Rightarrow c = \frac{5}{4}$$

Írjuk be ezt a megoldásba, s megkapjuk a keresett partikuláris megoldást. (Jelöljük ezt y_0 -al.)

$$y_0 = \frac{3x}{4} + \frac{\frac{5}{4}}{\sqrt[3]{x}}$$

Ez a függvény tehát megoldása a differenciálegyenletnek, és eleget tesz a kezdeti feltételnek is.

Megjegyzés: Az $y(1) = 2$ kezdeti feltételt másképpen is megadhattuk volna. Sokszor úgy fogalmazzuk meg az ilyen feladatot, hogy keressük a differenciálegyenlet azon megoldását, melynek grafikonja áthalad a $P_0(1, 2)$ ponton, vagy egyszerűen csak megadjuk a pontot. Ez ugyanazt jelenti, mint az első felírási forma, hiszen itt is egy összetartozó (x, y) értékpárt adunk meg, csak itt egy pont koordinátáiként.

5. feladat Igazoljuk behelyettesítéssel, hogy az $y' + 4y^2 = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása $y = \frac{1}{4x + c}$. Határozzuk meg az $y(-1) = \frac{1}{2}$ kezdeti feltételt kielégítő

partikuláris megoldást!

Megoldás: A megadott függvényben egy darab szabadon választható paraméter szerepel, s mivel a differenciálegyenlet elsőrendű, ezért ha a függvény megoldás, akkor a differenciálegyenlet általános megoldása. A behelyettesítéshez vegyük a függvény deriváltját.

$$y' = \left(\frac{1}{4x+c} \right)' = ((4x+c)^{-1})' = -1(4x+c)^{-2} \cdot 4 = \frac{-4}{(4x+c)^2}$$

Helyettesítsünk az egyenlet bal oldalán y és y' helyére, s végezzük el a kijelölt műveleteket.

$$y' + 4y^2 = \frac{-4}{(4x+c)^2} + 4 \left(\frac{1}{4x+c} \right)^2 = \frac{-4}{(4x+c)^2} + \frac{4}{(4x+c)^2} = 0$$

Az egyenlet jobb oldalát kaptuk, tehát a függvény valóban megoldás.

Helyettesítsük be a kezdeti feltételben megadott értékeket x , y helyére.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4 \cdot (-1) + c} \Rightarrow c - 4 = 2 \Rightarrow c = 6$$

A paraméterre kapott értéket írjuk be az általános megoldásba, s megkapjuk a kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást.

$$y_0 = \frac{1}{4x+6}$$

6. feladat Ellenőrizzük behelyettesítéssel, hogy az $y'' + y' - 6y = 0$

differenciálegyenletnek az általános megoldása $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$! Határozzuk meg az

$y(0) = 8$ és $y'(0) = 1$ kezdeti feltételeknek eleget tevő partikuláris megoldást!

Megoldás: Mivel most másodrendű a differenciálegyenlet, ezért az általános megoldásnak két, egymástól függetlenül választható paramétert kell tartalmaznia. A megadott függvényben szerepel is két paraméter, c_1 és c_2 , tehát ha a függvény megoldása a differenciálegyenletnek, akkor ez az általános megoldása. Az ellenőrzéshez most elő kell állítanunk az első és a második deriváltat is.

$$y' = (c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x})' = c_1 e^{2x} \cdot 2 + c_2 e^{-3x} \cdot (-3) = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$$

$$y'' = (y')' = (2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x})' = 2c_1 e^{2x} \cdot 2 - 3c_2 e^{-3x} \cdot (-3) = 4c_1 e^{2x} + 9c_2 e^{-3x}$$

Helyettesítsünk a differenciálegyenlet bal oldalában y'' , y' és y helyére, s végezzük el a műveleteket.

$$\begin{aligned} y'' + y' - 6y &= (4c_1e^{2x} + 9c_2e^{-3x}) + (2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x}) - 6(c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}) = \\ &= 4c_1e^{2x} + 9c_2e^{-3x} + 2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x} - 6c_1e^{2x} - 6c_2e^{-3x} = (4+2-6)c_1e^{2x} + (9-3-6)c_2e^{-3x} = 0 \end{aligned}$$

Pontosan az egyenlet jobb oldalát kaptuk, a függvény valóban megoldása az egyenletnek.

Vegyük ezután a kezdeti feltételeket, s helyettesítsük be a megadott x , y , y' értékeket.

$$8 = c_1e^{2 \cdot 0} + c_2e^{-3 \cdot 0} \Rightarrow 8 = c_1 + c_2$$

$$1 = 2c_1e^{2 \cdot 0} - 3c_2e^{-3 \cdot 0} \Rightarrow 1 = 2c_1 - 3c_2$$

Egy egyenletrendszert kaptunk a két paraméterre, s ebből értékük meghatározható. Adjuk hozzá például az első egyenlet háromszorosához a második egyenletet, s $25 = 5c_1$ -et kapunk, amiből $c_1 = 5$. Ezután a másik ismeretlenre $c_2 = 3$ adódik.

Az egyenletrendszer megoldását írjuk be az általános megoldásba, s így kapjuk a kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldást.

$$y_0 = 5e^{2x} + 3e^{-3x}$$

7. feladat Mi az általános megoldása az $y' = \operatorname{sh} x$ differenciálegyenletnek? Határozzuk meg az $y(0) = 5$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást!

Megoldás: A differenciálegyenlet explicit alakú, hiszen $y' = f(x)$ típusú, s most $f(x) = \operatorname{sh} x$. Az egyenlet mindkét oldalát integrálva, megkapjuk az általános megoldást.

$$\int y' dx = \int \operatorname{sh} x dx \Rightarrow y = \operatorname{ch} x + c$$

Helyettesítsük be a kezdeti feltételben megadott $x = 0$, $y = 5$ értékpárt, s számoljuk ki a paraméter értékét.

$$5 = \operatorname{ch} 0 + c \Rightarrow 5 = 1 + c \Rightarrow c = 4$$

Helyettesítsük ezt az általános megoldásba, s a keresett partikuláris megoldást kapjuk.

$$y_0 = \operatorname{ch} x + 4$$

Megjegyzés: Mint látható, a határozatlan integrálásnál megjelenő integrációs konstans lesz az általános megoldásban a szabadon választható paraméter. A differenciálegyenletek megoldása során általában a későbbiekben is integrálnunk kell majd, s az integrációs konstans lesz a megoldásban a paraméter. Ha a differenciálegyenlet magasabbrendű, akkor többször is kell integrálni s így a megoldásban több paraméter is szerepel.

8. feladat Határozzuk meg az $y' = \frac{1}{3x-2}$ differenciálegyenlet általános megoldását, s

keressük meg az $y(1) = 7$ kezdeti feltételnek eleget tevő partikuláris megoldást!

Megoldás: A differenciálegyenlet explicit alakú, általános megoldása integrálással kapható meg.

(Figyeljünk az integrálás során a lineáris belső függvényre!)

$$y(x) = \int y'(x) dx = \int \frac{1}{3x-2} dx = \frac{\ln|3x-2|}{3} + c$$

Rendoznünk sem kell a megoldáson, az integrálás eredménye megadja, a differenciálegyenlet általános megoldását, azaz

$$y = \frac{\ln|3x-2|}{3} + c.$$

Helyettesítsük be a kezdeti feltételben megadott értékpárt.

$$7 = \frac{\ln|3 \cdot 1 - 2|}{3} + c \Rightarrow 7 = \frac{\ln 1}{3} + c \Rightarrow c = 7$$

Ezt beírva az általános megoldásba, a megadott kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást kapjuk.

$$y_0 = \frac{\ln|3x - 2|}{3} + 7$$

9. feladat Egy függőlegesen rezgőmozgást végző test sebességét a

$$v(t) = 40 \sin 2t \left(\frac{cm}{s} \right) \text{ függvény írja le az időben. Határozzuk meg a test}$$

elmozdulás-idő függvényét, ha tudjuk, hogy az időmérés kezdetén az $s(0) = 30 \text{ (cm)}$ magasságban volt!

Megoldás: Fizikából ismert, hogy a sebesség-idő függvény az elmozdulás idő függvény deriváltja, azaz $v(t) = s'(t)$. (Fizikusok az idő szerinti deriválást általában ponttal jelölik, tehát ők $v(t) = \dot{s}(t)$ alakban írják ugyanezt.) Ebből az $s'(t) = 40 \sin 2t$ explicit alakú differenciálegyenlethez jutunk, melynek általános megoldását egyszerű integrálással kapjuk.

$$s(t) = \int s'(t) dt = \int 40 \sin 2t dt = 40 \int \sin 2t dt = 40 \frac{-\cos 2t}{2} + c = c - 20 \cos 2t \text{ (cm)}$$

Most a kezdeti feltételt az adja, hogy tudjuk a test helyét egy megadott időpontban. Az általános megoldásba tehát a $t = 0$ és $s = 30$ értékeket kell behelyettesítenünk a megoldásban szereplő paraméter értékének meghatározásához.

$$30 = c - 20 \cos(2 \cdot 0) \Rightarrow 30 = c - 20 \Rightarrow c = 50$$

Ezt írjuk be az általános megoldásba, s megkapjuk a kezdeti feltételnek is eleget tevő partikuláris megoldást.

$$s_0(t) = 50 - 20 \cos 2t \text{ (cm)}$$

Ez a függvény írja le a test elmozdulását az idő függvényében.

Megjegyzés: A differenciálegyenletekkel különböző fizikai, kémiai, stb. folyamatokat modellezünk. Ha időben lejátszódó folyamatról van szó, akkor a kezdeti feltételt mindig abból kapjuk, hogy ismerjük a keresett fizikai, kémiai, stb. mennyiség értékét egy bizonyos időpillanatban. (Itt persze a keresett mennyiség azt jelenti, hogy a fizikai, kémiai, stb. mennyiséget időben leíró függvényt keressük, s nem egy konkrét számértéket.)

Ellenőrző kérdések:



1. kérdés: Az alábbi differenciálegyenletek közül melyik lineáris?

(1) $y' - x^2 = y$ **(2)** $y' - y^2 = x$

- ☐ (1) lineáris, (2) nem
- ☐ (2) lineáris, (1) nem
- ☐ mindkettő lineáris
- ☐ egyik sem lineáris



2. kérdés: Az alábbi differenciálegyenletek közül melyik homogén, s melyik inhomogén?

(1) $y'' + xy' = 5 + y$ **(2)** $y'' + x + y = 5y$

- ☐ (1) homogén, (2) inhomogén
- ☐ (1) inhomogén, (2) homogén
- ☐ mindkettő homogén
- ☐ mindkettő inhomogén



3. kérdés: Melyik függvény megoldása az $y' + 3y = 2$ differenciálegyenletnek?

- ☐ $y = 2 + ce^{3x}$
- ☐ $y = \frac{2}{3} + ce^{3x}$
- ☐ $y = 2 + ce^{-3x}$
- ☐ $y = \frac{2}{3} + ce^{-3x}$



4. kérdés: Mi az $y' - 2y = 4\cos 2x$ differenciálegyenlet általános megoldása (y), és az $y(0) = 7$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás (y_0)?

- ☐ $y = \sin 2x - \cos 2x + ce^{2x}, \quad y_0 = \sin 2x - \cos 2x + 6e^{2x}$
- ☐ $y = \sin 2x - \cos 2x + ce^{2x}, \quad y_0 = \sin 2x - \cos 2x + 8e^{2x}$
- ☐ $y = \cos 2x - \sin 2x + ce^{2x}, \quad y_0 = \cos 2x - \sin 2x + 6e^{2x}$
- ☐ $y = \cos 2x - \sin 2x + ce^{2x}, \quad y_0 = \cos 2x - \sin 2x + 8e^{2x}$



5. kérdés: Mi az $y' = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}$ differenciálegyenlet általános megoldása?



$$y = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(2x-1)^2} + c$$



$$y = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2x-1} + c$$



$$y = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(2x-1)^2} + c$$



$$y = \frac{3}{4} \sqrt[3]{2x-1} + c$$



6. kérdés: Melyik függvény az $y' = \cos \frac{x}{2}$ differenciálegyenlet, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása?



$$y = -2\sin \frac{x}{2} + 1$$



$$y = -2\sin \frac{x}{2} - 1$$



$$y = 2\sin \frac{x}{2} + 1$$



$$y = 2\sin \frac{x}{2} - 1$$

Tanulási cél: A szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldási módszerének megismerése, és alkalmazása feladatokban.

Tananyag:

Tankönyv: Horváth Zoltán: Bevezetés a differenciálegyenletek megoldásába

Fejezet: 2.2.

Elméleti összefoglaló:

Egy elsőrendű differenciálegyenlet szétválasztható változójú, ha $y' = g(x) h(y)$ alakú, vagy algebrai átalakításokkal ilyen alakra hozható. Ezen általános alak azt jelenti, hogy az ismeretlen függvény deriváltja egy olyan szorzattal egyenlő, melynek egyik tényezője csak x -től, a másik pedig csak y -től függ. A megoldás során a deriváltat jobb tört alakban írni, azaz áttérni az $y' = \frac{dy}{dx}$ jelölésre. Egyenletünk alakja ekkor: $\frac{dy}{dx} = g(x) h(y)$.

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $h(y)$ -nal. Ezt csak akkor tehetjük meg, ha $h(y) \neq 0$, ezért külön meg kell vizsgálni, mit mondhatunk a $h(y) = 0$ esetben. Amennyiben például az y_1 zérushelye a h függvénynek, azaz $h(y_1) = 0$, akkor az $y(x) = y_1$ konstans függvény megoldása lesz a differenciálegyenletnek. Ilyen esetben az egyenlet mindkét oldala zérus, hiszen a bal oldalon egy konstans függvény deriváltja áll, ami zérus, a jobb oldalon pedig a szorzat második tényezője zérus.

Foglalkozunk innentől a $h(y) \neq 0$ esettel, ekkor az osztást elvégezhetjük, s a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x).$$

Integráljuk mindkét oldalt x szerint.

$$\int \frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int g(x) dx$$

A bal oldalon a helyettesítési integrálás alapképlete szerint áttérünk y szerinti integrálásra, formálisan dx -szel egyszerűsítünk.

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

A törtes jelölés előnyeit még jobban kihasználhatjuk, ha az integrálás előtt az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk dx -szel, s így az egyenlet bal oldala csak az y -t, jobb oldala pedig csak az x -et tartalmazza. Erre mondjuk, hogy szétválasztjuk a változókat.

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

Ezután mindkét oldalt integráljuk. (Most azonban a bal oldalon y szerinti integrál van.)

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

Így ugyanazt kapjuk, mint az előző esetben. A feladatok megoldása során ezt az írásmódot fogjuk használni, mert ez egyszerűbb.

Az integrálás után próbáljuk meg kifejezni az egyenletből y -t. Ha sikerül, akkor a megoldás felírható explicit alakban, egyébként csak implicit egyenlettel adható meg a megoldás.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat Döntsük el a következő differenciálegyenletekről, hogy szétválasztható változójúak-e, s ha igen, válasszuk szét a változókat!

$$(1) y' - x^3 y = 0$$

$$(2) y' - x^3 + y = 0$$

$$(3) y' - 10^{2x+y} = 0$$

$$(4) y' - \ln x \cdot \ln y = 0$$

$$(5) y' - \ln(xy) = 0$$

Megoldás: Ha egy elsőrendű differenciálegyenletről el kell döntenünk, hogy változói

szétválaszthatók-e, akkor az ismeretlen függvény deriváltjára rendezzük az egyenletet, a másik oldalt pedig megpróbáljuk kéttényezős szorzattá bontani úgy, hogy az egyik tényezőben csak az egyik, a másikban csak a másik változó szerepeljen. Ha ez megvalósítható, akkor az egyenlet szétválasztható változójú, ellenkező esetben nem.

Rendezzük tehát az (1) egyenletet y' -ra.

$$y' = x^3 y$$

A jobboldalon pontosan olyan szorzat áll, melynek egyik tényezőjében csak x , a másikban pedig csak y szerepel, tehát a változók szétválaszthatók. Írjuk a deriváltat tört alakban, majd osszuk y -nal és szorozzunk formálisan dx -szel.

$$\frac{dy}{dx} = x^3 y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} dy = x^3 dx$$

Tekintsük ezután a (2) egyenletet, s rendezzük ezt is a deriváltra.

$$y' = x^3 - y$$

Az egyenlet jobb oldalán nem szorzat áll, és nem is lehet szorzattá bontani. Ez az egyenlet nem szétválasztható változójú.

Próbálkozzunk a (3) egyenlettel. Itt is a rendezéssel kezdjük.

$$y' = 10^{2x+y}$$

Bár a jobb oldalon nem szorzat áll, de felbontható szorzattá.

$$y' = 10^{2x} \cdot 10^y$$

Ebben az egyenletben tehát szétválaszthatók a változók. Írjuk a deriváltat törtként, osszuk 10^y -nal és szorozzunk formálisan dx -szel.

$$\frac{dy}{dx} = 10^{2x} \cdot 10^y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{10^y} dy = 10^{2x} dx \quad \Rightarrow \quad 10^{-y} dy = 10^{2x} dx$$

Következik a (4) egyenlet, s először most is rendezünk.

$$y' = \ln x \cdot \ln y$$

A jobb oldalon álló szorzat olyan, amelyet szerettünk volna, a változók szétválaszthatók. Ehhez térjünk át a derivált másik alakjára, majd osszuk $\ln y$ -nal és szorozzunk formálisan dx -szel.

$$\frac{dy}{dx} = \ln x \cdot \ln y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\ln y} dy = \ln x dx$$

Már csak az (5) egyenlet van hátra, rendezzük ezt is a deriváltra.

$$y' = \ln(xy)$$

A jobb oldalon nem szorzat áll, s bár írható más formában, hiszen $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, de így sem kapunk megfelelő típusú szorzatot. Ez az egyenlet tehát nem szétválasztható változójú.

Megjegyzés: A szétválasztás után dx és dy mindig formális szorzók, s nem törtek nevezőiben állnak.

2. feladat Határozzuk meg az $y' = y^2 \cdot \sqrt{x}$ differenciálegyenlet általános megoldását, s keressük meg az $y(1) = -1$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást!

Megoldás: A differenciálegyenlet alakján látható, hogy szétválasztható változójú. Térjünk át az

$$y' = \frac{dy}{dx} \text{ jelölésre, így az egyenlet: } \frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \sqrt{x}.$$

Osszuk mindkét oldalt y^2 -tel. Mivel $y^2 = 0$ ha $y = 0$, ezért az $y(x) = 0$ konstans függvény megoldása az egyenletnek. A kezdeti feltételnek viszont nem tesz eleget ez a megoldás. Ezután feltesszük, hogy $y \neq 0$, s elvégezzük az osztást, valamint dx -szel formálisan szorzunk.

$$\frac{1}{y^2} dy = \sqrt{x} dx \quad \text{azaz} \quad y^{-2} dy = x^{\frac{1}{2}} dx$$

Sikerült szétválasztani a változókat, mindkét oldalon integrálunk.

$$\int y^{-2} dy = \int x^{\frac{1}{2}} dx \Rightarrow \frac{y^{-1}}{-1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \quad \text{más alakban} \quad -\frac{1}{y} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$$

Integrációs konstans elég csak egyik oldalra írni, mert ha mindkét oldalon kiírjuk, akkor egy oldalra rendezhetők, és különbségük is egy szabadon választható konstans lesz. A konstans célszerű a változót tartalmazó oldalra írni.

Rendezzük az egyenletet az ismeretlen függvényre, azaz vegyük mindkét oldal reciprokát, s szorozzunk -1 -gyel.

$$y = \frac{-1}{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c}$$

Ez tehát a differenciálegyenlet általános megoldása. Helyettesítsük be ebbe a kezdeti feltételben megadott adatokat.

$$-1 = \frac{-1}{\frac{2}{3} \cdot 1 \sqrt{1} + c} \Rightarrow \frac{2}{3} + c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

Innen a kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$y = \frac{-1}{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{3}} = \frac{-3}{2x\sqrt{x} + 1}.$$

Megjegyzés: A differenciálegyenlet általános megoldásából a paraméter semmilyen választásával nem kapható meg az $y(x) = 0$ megoldás.

3. feladat Oldjuk meg az $y' = \frac{2y}{x}$, $y(1) = 3$ kezdeti érték feladatot!

Megoldás: Írjuk a deriváltat a törtes jelöléssel, ekkor az egyenlet: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$, vagy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y, \text{ melyen látszik, az egyenlet szétválasztható változójú.}$$

A szétválasztáshoz azonban osztanunk kell y -nal. Ebből az $y(x) = 0$ konstans függvény megoldása az egyenletnek. A kezdeti feltételt ez a megoldás nem elégíti ki. Innentől feltesszük, hogy $y \neq 0$. Az osztással párhuzamosan formálisan szorzunk dx -szel.

$$\frac{1}{y} dy = \frac{2}{x} dx$$

Integráljunk mindkét oldalon.

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x} dx \Rightarrow \ln |y| = 2 \ln |x| + c$$

Fejezzük ki ebből y -t. Ehhez célszerű az integrációs konstans másképp írni, kerüljön C helyére $\ln c_1$. Ezt nyugodtan megtehetjük, hiszen a logaritmus függvény minden értéket felvesz. Az új konstans természetesen csak pozitív értékeket vehet fel. A jobb oldalon ezután tudunk alakítani.

$$\ln |y| = 2 \ln |x| + \ln c_1 = \ln x^2 + \ln c_1 = \ln c_1 x^2$$

A logaritmus mindkét oldalon elhagyható.

$$|y| = c_1 x^2$$

Ha a konstans helyére egy új konstans írunk, mely felvehet negatív értékeket is, akkor a bal oldalon elhagyhatjuk az abszolút értéket.

$$y = c_2 x^2$$

Ezzel megkaptuk a differenciálegyenlet általános megoldását. A későbbiekben a konstans változásait az átalakítások során nem fogjuk feltüntetni, mert nincsen rá szükség, a megoldás leírását pedig megnehezíti. A megoldás most is egyszerűen $y = cx^2$ alakban írható.

Helyettesítsük be a kezdeti feltétel adatait, s fejezzük ki a paramétert.

$$3 = c \cdot 1^2 \Rightarrow c = 3$$

A kezdeti érték feladat megoldása: $y_0 = 3x^2$.

Megjegyzés: Ennél a differenciálegyenletnél $c = 0$ választással megkapjuk az általános megoldásból az $y(x) = 0$ konstans megoldást.

4. feladat Oldjuk meg az $y' = xy$, $y(0) = 2$ kezdeti érték feladatot!

Megoldás: Az egyenlet alakjából nyilvánvaló, hogy szétválasztható változójú.

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{y} = xy$$

Ismét y -nal kell osztanunk a változók szétválasztása közben, tehát az $y(x) = 0$ konstans függvény megoldása az egyenletnek, a kezdeti érték feladatnak azonban nem. Ezután feltesszük, hogy $y \neq 0$.

$$\frac{1}{y} dy = x dx$$

Integráljunk mindkét oldalon.

$$\ln |y| = x^2 + c$$

A logaritmust most nem tudjuk úgy elhagyni, mint az előző feladatban, mert a jobb oldalon nincs logaritmus. Vegyük mindkét oldalon az exponenciális függvényt, azaz e -t felemeljük a két oldalra álló kifejezésre.

$$e^{\ln |y|} = e^{x^2+c} \Rightarrow y = e^{x^2+c}$$

Az abszolút értéket elhagytuk, mert az exponenciális függvény nem vesz fel negatív értéket. A differenciálegyenlet általános megoldása tulajdonképpen megvan, de ezen még célszerű alakítani.

$$y = e^{x^2+c} = e^{x^2} \cdot e^c$$

Itt e^c is egy konstans, tehát helyére a korábbi megállapodás szerint egyszerűen C írható, s így az általános megoldás: $y = ce^{x^2}$.

Amikor a konstans egy kitevő egyik tagja, akkor ilyen módon mindig alakíthatjuk a megoldást, s a konstansból szorzó lesz.

Helyettesítsük be a kezdeti feltételt, s határozzuk meg a paramétert.

$$2 = ce^{0^2} \Rightarrow c = 2$$

A kezdeti érték feladat megoldása tehát: $y_0 = 2e^{x^2}$.

5. feladat Határozzuk meg az $y' = e^{x-y}$, $y(0) = \ln 2$ kezdeti érték feladat megoldását!

Megoldás: Az egyenlet jobb oldalán nem szorzat áll, de felírható hányadosként. Egyben térjünk át a deriváltban a törtes írásmódra.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \frac{1}{e^y}$$

Ez az alak már egyértelműen mutatja, az egyenlet szétválasztható változójú.

A változók szétválasztásához szorozzunk e^y -nal és formálisan dx -szel.

$$e^y dy = e^x dx$$

Integráljunk mindkét oldalon.

$$\int e^y dy = \int e^x dx \Rightarrow e^y = e^x + c$$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát.

$$y = \ln(e^x + c)$$

Ezzel megkaptuk a differenciálegyenlet általános megoldását.

Helyettesítsük be a kezdeti feltételt.

$$\ln 2 = \ln(e^0 + c) = \ln(1 + c)$$

Hagyjuk el a logaritmusokat.

$$2 = 1 + c \Rightarrow c = 1$$

A kezdeti érték feladat megoldása tehát: $y_0 = \ln(e^x + 1)$.

6. feladat Mi az általános megoldása a $3xy^2y' - 2y^3 = 5xy^3 + xy'$ differenciálegyenletnek?

Megoldás: Az egyenlet ezen alakjából nem egyértelmű, szétválaszthatók-e a változók. Ennek eldöntéséhez célszerű y' -ra rendezni az egyenletet, s a jobb oldalt szorzattá alakítani.

$$3xy^2y' - xy' = 5xy^3 + 2y^3 \Rightarrow (3xy^2 - x)y' = (5x + 2)y^3$$

$$y' = \frac{(5x + 2)y^3}{3xy^2 - x} \Rightarrow y' = \frac{(5x + 2)}{x} \frac{y^3}{3y^2 - 1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(5x + 2)}{x} \frac{y^3}{3y^2 - 1}$$

Ezen alakból már egyértelműen látható, hogy a változók szétválaszthatók. Az ehhez szükséges lépések: szorzás $3y^2 - 1$ -gyel, osztás y^3 -bel, formális szorzás dx -szel. Mivel $y^3 = 0$, ha $y = 0$, ezért az $y(x) = 0$ konstans függvény megoldása az egyenletnek. Ezután feltesszük, hogy $y \neq 0$.

$$\frac{3y^2 - 1}{y^3} dy = \frac{5x + 2}{x} dx$$

Integrálás előtt mindegyik oldalon célszerű felbontani a törtet két törtre, s ahol lehet egyszerűsíteni.

$$\left(\frac{3y^2}{y^3} - \frac{1}{y^3}\right)dy = d\left(\frac{5x}{x} + \frac{2}{x}\right)x \Rightarrow \left(\frac{3}{y} - \frac{1}{y^3}\right)dy = \left(5 + \frac{2}{x}\right)dx$$

$\frac{1}{y^3}$ helyett írjunk inkább y^{-3} -t, s integrálhatunk.

$$\int (\frac{3}{y} - y^{-3}) dy = \int (5 + \frac{2}{x}) dx \Rightarrow 3 \ln |y| - \frac{y^{-2}}{-2} = 5x + 2 \ln |x| + c \Rightarrow 3 \ln |y| + \frac{1}{2y^2} = 5x + 2 \ln |x| + c$$

Ebből az egyenletből nem fejezhető ki y , így a megoldás csak ezen implicit egyenlettel adható meg.

Megjegyzés: Az implicit megoldásokat sokszor a konstansra rendezik, mert bizonyos esetekben így látható, hogy milyen görbék a megoldások. Ebben a feladatban az átrendezéssel nem kapunk új információt.

7. feladat Oldjuk meg az $(1 + x^3)y' - 2x^2y = 0$, $y(0) = 4$ kezdeti érték feladatot!

Megoldás: Először döntsük el most is, szétválaszthatók-e a változók. Rendezzük y' -ra az egyenletet.

$$(1 + x^3)y' = 2x^2y \Rightarrow y' = \frac{2x^2}{1 + x^3}y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{1 + x^3}y$$

Így már látszik, hogy ez az egyenlet is szétválasztható változójú. Mivel osztanunk kell y -nal, ezért az $y(x) = 0$ konstans függvény megoldása az egyenletnek, a kezdeti érték feladatnak azonban nem. Feltesszük, $y \neq 0$, s szétválasztjuk a változókat.

$$\frac{1}{y} dy = \frac{2x^2}{1 + x^3} dx$$

Integráljunk mindkét oldalon. A jobb oldalon kiemeléssel $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú integrál alakítható ki.

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2x^2}{1 + x^3} dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \frac{2}{3} \int \frac{3x^2}{1 + x^3} dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \frac{2}{3} \int \frac{(1 + x^3)'}{1 + x^3} dx \Rightarrow$$

$$\ln |y| = \frac{2}{3} \ln |1 + x^3| + c$$

Mivel mindkét oldalon logaritmus áll, célszerű C helyére $\ln C$ -t írni, s a jobb oldalon egyetlen logaritmust kialakítani.

$$\ln |y| = \ln |1 + x^3|^{\frac{2}{3}} + \ln C \Rightarrow \ln |y| = \ln C \sqrt[3]{(1 + x^3)^2}$$

Mivel mindegyik oldalon egyetlen logaritmus van, elhagyhatjuk a logaritmusokat, s megkapjuk az általános megoldás explicit alakját.

$$y = C \sqrt[3]{(1 + x^3)^2}$$

Helyettesítsük be a kezdeti feltételt.

$$4 = C \sqrt[3]{(1 + 0^3)^2} \Rightarrow C = 4$$

A kezdeti érték feladat megoldás tehát: $y_0 = 4 \sqrt[3]{(1 + x^3)^2}$.

8. feladat Keressük meg, az $yy' \sin x - (1 - y^2) \cos x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ kezdeti érték feladat megoldását!

Megoldás: Rendezzük az egyenletet először az ismeretlen függvény deriváltjára.

$$yy' \sin x = (1 - y^2) \cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1 - y^2}{y}$$

Ez az alak mutatja, a változókat szét lehet választani. Mivel osztani kell $1 - y^2$ -tel, ami akkor zérus, ha $y = \pm 1$, ezért az $y(x) = 1$ és $y(x) = -1$ konstans függvények megoldásai az egyenletnek. Egyik sem tesz azonban eleget a kezdeti feltételnek. Feltesszük, $1 - y^2 \neq 0$, s szétválasztjuk a változókat.

$$\frac{y}{1 - y^2} dy = \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

Nem lett volna muszáj az egyenletet y' -ra rendezni. Most például a rendezés során osztottunk y -nal, majd a szétválasztásnál szoroztunk vele. Ezt a két lépést kihagyhattuk volna.

Ezután jöhet az integrálás. Most a jobb oldalon $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú integrál van, a bal oldalon pedig

kiemeléssel alakítható ki ilyen integrandus.

$$\int \frac{y}{1-y^2} dy = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{-2y}{1-y^2} dy = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{(1-y^2)'}{1-y^2} dy = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

Mivel az integrálás után logaritmusokat kapunk, célszerű megint C helyett $\ln c$ -t írni, s a jobb oldalon egyetlen logaritmust kialakítani. Szorozzuk meg közben mindkét oldalt -2 -vel, így könnyebb lesz a rendezés. A konstans szoroznunk nem kell, hiszen számszorosa is konstansok.

$$-\frac{1}{2} \ln|1-y^2| = \ln|\sin x| + c \Rightarrow \ln|1-y^2| = -2\ln|\sin x| + \ln c \Rightarrow \ln|1-y^2| = \ln \frac{c}{\sin^2 x}$$

A logaritmusok elhagyhatók, s az abszolút érték is, mert beépül a konstansba.

$$1 - y^2 = \frac{c}{\sin^2 x} \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{c}{\sin^2 x} \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - \frac{c}{\sin^2 x}}$$

Az általános megoldás ezzel megvan, de ha belegondulunk, nincs értelme a konstans elé előjelet írni, hiszen $-C$ is csak egy konstans. Az általános megoldás tehát a következő alakban is írható:

$$y = \pm \sqrt{1 + \frac{c}{\sin^2 x}}.$$

Helyettesítsük be a kezdeti feltételben megadott értékpárt. Mivel a megadott függvényérték pozitív, az $y = \sqrt{1 + \frac{c}{\sin^2 x}}$ megoldásba helyettesítünk.

$$2 = \sqrt{1 + \frac{c}{\sin^2 \frac{\pi}{2}}} \Rightarrow 2 = \sqrt{1 + c} \Rightarrow 4 = 1 + c \Rightarrow c = 3$$

A kezdeti feltételt tehát a következő függvény elégíti ki:

$$y_0 = \sqrt{1 + \frac{3}{\sin^2 x}}.$$

9. feladat Teánkba 10 g cukrot szórunk, és állandó keveréssel biztosítjuk az egyenletes oldódást. Megfigyelésünk szerint a cukor fele 15 s alatt oldódik fel. Mennyi cukor lesz oldatlan állapotban 40 s -mal azután, hogy a teába szórtuk a cukrot? Az oldódás sebessége arányos a még fel nem oldott cukor mennyiségével.

Megoldás: Először meg kell határoznunk a jelenséget leíró differenciálegyenletet. Legyen a feloldatlan cukor tömege m , mely az idő függvénye, azaz $m = m(t)$. Ekkor az oldódás sebessége ennek az idő szerinti deriváltja lesz, mert ez fejezi ki, hogy milyen gyorsan változik a cukor mennyisége. Mivel ez arányos a cukor tömegével, a $\frac{dm}{dt} = -km$

differenciálegyenletet kapjuk. Itt a k arányossági tényező mutatja, mennyire gyors az oldódás. Azért célszerű az egyenletbe a mínusz előjelet beírni, mert így kifejezzük, hogy a cukor mennyisége csökken az időben. (Ha nem írunk előjelet az egyenletbe, akkor az arányossági tényező lesz negatív.)

Kezdeti feltételünk is van, hiszen ismerjük a cukor kezdeti mennyiségét, azaz $m(0) = 10$.

Van azonban még egy feltételünk, mert a szövegben az is szerepel, hogy a cukor fele oldódik fel 15 s alatt, tehát $m(15) = 5$. Majd a későbbiekben meglátjuk, mire jó ez a plussz információ.

Egyelőre határozzuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását. Ehhez válasszuk szét a változókat. Mivel osztanunk kell m -mel, az $m(t) = 0$ konstans függvény megoldása az egyenletnek, de ez a kezdeti feltételnek nem tesz eleget. Feltesszük ezután, hogy $m \neq 0$.

$$\frac{1}{m} dm = -k dt$$

Integráljuk mindkét oldalt.

$$\int \frac{1}{m} dm = - \int k dt \quad \Rightarrow \quad \ln |m| = -kt + c$$

Emeljük fel e -t a bal illetve jobb oldalon álló kifejezésre.

$$e^{\ln|m|} = e^{-kt+c} \Rightarrow |m| = e^{-kt+c} \Rightarrow |m| = e^{-kt} e^c$$

Most e^c helyére írhatunk egyszerűen C -t, s ebbe a konstansba az abszolút érték is beépíthető.

$$m = ce^{-kt}$$

Megkaptuk az általános megoldást, behelyettesíthetjük a kezdeti feltételt.

$$10 = ce^{-k \cdot 0} \Rightarrow c = 10$$

A kezdeti feltételnek tehát az $m_0 = 10e^{-kt}$ függvény felel meg. Sajnos ebben nem ismerjük a k arányossági tényezőt. Használjuk ki, hogy van egy plussz feltételünk, s helyettesítsük be az abban megadott értékeket.

$$5 = 10e^{-15k} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-15k} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -15k \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-15} = \frac{-\ln 2}{-15} = \frac{\ln 2}{15}$$

Ezután: $m_0 = 10e^{-\frac{\ln 2}{15}t}$.

Ennek a függvénynek kell kiszámolnunk az értékét $t = 40$ esetén.

$$m_0(40) = 10e^{-\frac{\ln 2}{15}40} = 10e^{-\frac{8}{3}\ln 2} = 10 \cdot 2^{-\frac{8}{3}} \approx 1.57$$

A teában tehát 40 s elteltével 1.57 g oldatlan cukor lesz.

10. feladat Melyek azok a görbék, amelyeknek bármely pontjában az érintő meredeksége egyenlő a pont ordinátájának (y) reciprokéval? Ezen görbék közül, melyik halad át a $P_0(1, 2)$ ponton?

Megoldás: A görbékre kirótt feltételt fogalmazzuk meg differenciálegyenletben. Mivel a görbék érintőjének meredeksége minden pontban egyenlő a derivált pontbeli értékével, ezért az

$$y' = \frac{1}{y}$$

differenciálegyenletet kapjuk. Kezdeti feltételünk is van: $y(1) = 2$.

Válasszuk szét a változókat.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \Rightarrow ydy = dx$$

Integráljunk mindkét oldalon, s rendezzük az eredményt az ismeretlenre.

$$\int ydy = \int dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = x + c \Rightarrow y^2 = 2x + c \Rightarrow y = \pm\sqrt{2x + c}$$

A görbék tehát parabolák, melyeknek tengelye az x -tengellyel párhuzamos.

Helyettesítsük be a kezdeti feltételt. Mivel a megadott y érték pozitív, az $y = \sqrt{2x + c}$ függvénybe helyettesítünk.

$$2 = \sqrt{2 \cdot 1 + c} \Rightarrow c = 2$$

A keresett görbe tehát: $y_0 = \sqrt{2x + 2}$.

Ellenőrző kérdések:



1. kérdés: Az alábbi két differenciálegyenlet közül melyik szétválasztható változójú és melyik nem?

$$(1) y' - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \quad (2) y' - \frac{1}{xy} = 0$$

- ☐ (1) szétválasztható változójú (2) nem
- ☐ (2) szétválasztható változójú (1) nem
- ☐ mindkettő szétválasztható változójú
- ☐ egyik sem szétválasztható változójú



2. kérdés: A következő differenciálegyenletek közül, melyik szétválasztható változójú?

(1) $y' + (xy)^2 = 0$ (2) $y' + (x + y)^2 = 0$

- ☐ (1) szétválasztható változójú (2) nem
- ☐ (2) szétválasztható változójú (1) nem
- ☐ mindegyik szétválasztható változójú
- ☐ egyik sem szétválasztható változójú



3. kérdés: Tekintsük az $(y^3 - 1)x + y^2(x^2 + 1)y' = 0$ differenciálegyenletet. Mi az egyenlet alakja a változók szétválasztása után?

- ☐ $\frac{y}{1 - y^3} dy = \frac{x}{x^2 + 1} dx$
- ☐ $\frac{y}{y^3 - 1} dy = \frac{x}{x^2 + 1} dx$
- ☐ $\frac{1 - y^3}{y dy} = \frac{x^2 + 1}{x dx}$
- ☐ $\frac{y^3 - 1}{y dy} = \frac{x^2 + 1}{x dx}$



4. kérdés: Mi az $y' + \frac{y}{x} = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = x + c$
- ☐ $y = c - x$
- ☐ $y = cx$
- ☐ $y = \frac{c}{x}$



5. kérdés: Az $y' = y \cos x$ differenciálegyenletnek melyik nem az általános megoldása az alábbi függvények közül?

- ☐ $y = e^{\sin x - c}$
- ☐ $y = c + e^{\sin x}$
- ☐ $y = ce^{\sin x}$
- ☐ $y = \frac{e^{\sin x}}{c}$



6. kérdés: Mi az $y' + y \operatorname{tg} x = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = c \sin x$
- ☐ $y = \frac{c}{\sin x}$
- ☐ $y = c \cos x$
- ☐ $y = \frac{c}{\cos x}$



7. kérdés: Mi a megoldása az $y' = 3x^2y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$ kezdeti érték feladatnak?



$$y = \frac{1}{x^3 + 2}$$



$$y = \frac{1}{x^3 - 2}$$



$$y = \frac{1}{2 - x^3}$$



$$y = \frac{-1}{x^3 + 2}$$



8. kérdés: Mi a megoldása az $y' + \frac{2xy \ln y}{x^2 + 1} = 0$, $y(0) = e^2$ kezdeti érték feladatnak?



$$y = e^{x^2+2}$$



$$y = e^{\left(\frac{1}{x^2+1}+1\right)}$$



$$y = e^{2(x^2+1)}$$



$$y = e^{\frac{2}{x^2+1}}$$



9. kérdés: Melyek azok a görbék, amelyeknek bármely pontjában az érintő meredeksége egyenlő a pont ordinátájával?

- ☐ parabolák, melyeknek tengelye az y -tengellyel párhuzamos
- ☐ hiperbolák
- ☐ exponenciális görbék
- ☐ logaritmus görbék

Tanulási cél: Megismerni és alkalmazni olyan helyettesítési eljárást a differenciálegyenletek két típusának esetében, mellyel azok szétválasztható változójú egyenletre vezethetők vissza.

Tananyag:

Tankönyv: Horváth Zoltán: Bevezetés a differenciálegyenletek megoldásába

Fejezet: 2.3.

Elméleti összefoglaló:

1. Az $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ típusú differenciálegyenletek

(Ezeket a differenciálegyenleteket változóikban homogénnek, vagy homogén foksámúnak is nevezik. Ne keverjük ezt össze, 2.2.1. leckében már említett homogén differenciálegyenlettel.)

Ha egy differenciálegyenlet $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ alakú, vagy ilyen alakra hozható, akkor az $u = \frac{y}{x}$

helyettesítéssel visszavezethető szétválasztható változójú differenciálegyenletre. Az új ismeretlen (u) ugyanúgy az x változó függvénye, amint a régi ismeretlen (y) .

Fejezzük ki az $u = \frac{y}{x}$ egyenletből y -t, majd deriváljuk mindkét oldalt x szerint. (A jobb

oldalon szorzatot deriválunk.)

$$y = ux \quad \Rightarrow \quad y' = u'x + u$$

Írjuk be ezt a differenciálegyenlet bal oldalába, a jobb oldalon pedig az f függvény változója lesz u az $\frac{y}{x}$ helyett.

$$u'x + u = f(u)$$

Ennek az egyenletnek szétválaszthatók a változói. Rendezzük ugyanis az egyenletet u' -ra, és írjuk a deriváltat törtként. Ezután osztással és formális szorzással szétválaszthatók a változók.

$$u' = \frac{f(u) - u}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f(u) - u} du = \frac{1}{x} dx$$

Az integrálás után vissza kell helyettesítenünk, és rendezni az ismeretlenre, ha ez lehetséges.

2. Az $y' = f(ax + by + c)$ típusú differenciálegyenletek

(Szavakban úgy fogalmazhatjuk ezt meg, hogy az ismeretlen függvény deriváltja olyan összetett függvénnyel egyenlő, melynek belső függvénye egy x -ben és y -ban lineáris függvény.)

Ha egy differenciálegyenlet $y' = f(ax + by + c)$ alakú, vagy ilyen alakra hozható, akkor az $u = ax + by + c$ helyettesítéssel vezethető vissza szétválasztható változójú differenciálegyenletre. A régi, y ismeretlent felváltó új, u ismeretlen is az x változó függvénye, azaz $u = u(x)$. A helyettesítés végrehajtásához ki kell fejeznünk y' -t u és x segítségével. Ehhez deriváljuk az $u = ax + by + c$ egyenlet mindkét oldalát x szerint, s a kapott egyenletet rendezzük y' -ra.

$$u' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{u' - a}{b}$$

Írjuk ezt a differenciálegyenlet bal oldalára, a jobb oldalon pedig az f függvény változójának helyére u kerül.

$$\frac{u' - a}{b} = f(u)$$

Ez az egyenlet már szétválasztható változójú. Rendezzük u' -ra, térjünk át a törtes jelölésre, majd a jobb oldalon álló egész kifejezéssel osszunk, dx -szel pedig formálisan szorozzunk.

$$u' = bf(u) + a \Rightarrow \frac{du}{dx} = bf(u) + a \Rightarrow \frac{1}{bf(u) + a} du = dx$$

A változók szétválasztása sikerült, ezután integrálnunk kell, majd visszahelyettesíteni, és ha lehet, kifejezni az ismeretlent.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat Határozzuk meg az $xy' = x + 2y$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát x -szel.

$$y' = 1 + 2\frac{y}{x}$$

Az egyenlet ezzel $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ alakú lett, alkalmazzuk tehát az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítést. Mivel

$y' = u'x + u$, ezért a következő egyenletet kapjuk:

$$u'x + u = 1 + 2u.$$

Válasszuk szét a változókat.

$$\frac{du}{dx}x + u = 1 + 2u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}x = 1 + u \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+u}du = \frac{1}{x}dx$$

Integráljunk mindkét oldalon. Mivel logaritmusokat kapunk, C helyett $\ln C$ -t írunk, és a jobb oldalon egyetlen logaritmust alakítunk ki.

$$\int \frac{1}{1+u}du = \int \frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \ln|1+u| = \ln|x| + c \quad \Rightarrow \quad \ln|1+u| = \ln|cx|$$

Elhagyhatjuk a logaritmusokat, s az abszolút érték is beépül a konstansba.

$$1 + u = cx$$

Helyettesítsünk vissza, s fejezzük ki az ismeretlent.

$$1 + \frac{y}{x} = cx \quad \Rightarrow \quad y = cx^2 - x$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát: $y = cx^2 - x$.

2. feladat Mi az általános megoldása az $y' + \frac{2x+y}{x+2y} = 0$ differenciálegyenletnek?

Megoldás: Rendezzük az egyenletet az ismeretlen függvény deriváltjára, s a jobb oldalon egyszerűsítsünk x -szel.

$$y' = -\frac{2x+y}{x+2y} \Rightarrow y' = -\frac{2+\frac{y}{x}}{1+2\frac{y}{x}}$$

Az egyenleten így már látszik, hogy változóiban homogén, ugyanúgy célszerű helyettesíteni, mint az előző feladatban.

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u'x + u, \text{ amiből az egyenlet: } u'x + u = -\frac{2+u}{1+2u}.$$

Rendezzük az egyenletet u' -ra.

$$u'x = -\frac{2+u}{1+2u} - u \Rightarrow u'x = -\frac{2+u+u(1+2u)}{1+2u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{2u^2+2u+2}{x(1+2u)} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{-2}{x} \frac{u^2+u+1}{2u+1}$$

Válasszuk szét a változókat, s utána integrálhatunk.

$$\frac{2u+1}{u^2+u+1} du = -\frac{2}{x} dx \Rightarrow \int \frac{2u+1}{u^2+u+1} du = -\int \frac{2}{x} dx$$

A bal oldalon a számlálóban felismerhető a nevező deriváltja.

$$\int \frac{(u^2+u+1)'}{u^2+u+1} du = -\int \frac{2}{x} dx \Rightarrow \ln(u^2+u+1) = -2\ln|x| + c$$

(Az u^2+u+1 kifejezés minden u -ra pozitív, ezért az abszolút értékre nincs szükség.)

Az előzőekben megismert módon, a konstans helyett konstans logaritmusát írjuk, és egyetlen logaritmust alakítunk ki, majd a logaritmusokat elhagyjuk.

$$\ln(u^2+u+1) = -2\ln|x| + \ln c \Rightarrow \ln(u^2+u+1) = \ln \frac{c}{x^2} \Rightarrow u^2+u+1 = \frac{c}{x^2}$$

Térjünk vissza az eredeti ismeretlenre.

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1 = \frac{c}{x^2} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1 = \frac{c}{x^2}$$

Célszerű mindkét oldalt x^2 -tel szorozni, mert akkor eltűnnek a törtek.

A megoldás így a következő alakot ölti: $y^2 + yx + x^2 = c$.

3. feladat Oldjuk meg az $y' = \frac{y \sin \frac{y}{x} - x}{x \sin \frac{y}{x}}$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Egyszerűsítsük a jobb oldalon álló törtet x -szel.

$$y' = \frac{\frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} - 1}{\sin \frac{y}{x}}$$

Ebből az alakból már egyértelmű, hogy az egyenlet változóiban homogén.

$$\text{Legyen } u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u'x + u, \text{ az egyenlet pedig: } u'x + u = \frac{u \sin u - 1}{\sin u}$$

.

A jobb oldali törtet bontsuk két törtre, és egyszerűsítsük az elsőt, majd rendezzük az egyenletet u' -ra.

$$u'x + u = \frac{u \sin u}{\sin u} - \frac{1}{\sin u} \Rightarrow u'x + u = u - \frac{1}{\sin u} \Rightarrow u'x = -\frac{1}{\sin u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x \sin u}$$

Válasszuk szét a változókat, és integráljunk. Az eredményt szorozzuk -1 -gyel.

Természetesen a konstans szorozni felesleges.

$$\sin u du = -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \sin u du = -\int \frac{1}{x} dx \Rightarrow -\cos u = -\ln |x| + c \Rightarrow \cos u = \ln |x| + c$$

Bár a bal oldalon nincsen logaritmus, a konstans helyett írhatunk most konstans logaritmusát, s egyetlen logaritmust alakíthatunk ki. Így kicsit tömörebben írható a megoldás, s az abszolút érték is beépíthető a konstansba. Ezután vegyük mindkét oldal arccos-át, s így a bal oldalon eltűnik a cos.

$$\cos u = \ln |x| + \ln c \Rightarrow \cos u = \ln cx \Rightarrow u = \arccos(\ln cx)$$

Helyettesítsük vissza a régi ismeretlent, s rendezés után megkapjuk a megoldást.

$$\frac{y}{x} = \arccos(\ln cx) \Rightarrow y = x \cdot \arccos(\ln cx)$$

4. feladat Keressük meg az $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Osszuk az egyenlet mindkét oldalát x -szel.

$$y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}$$

Így látható, ugyanaz a helyettesítés célszerű, mint az előző feladatokban.

Ha $u = \frac{y}{x}$, akkor $y' = u'x + u$, és az egyenlet: $u'x + u = u - e^u$.

Rendezzünk az ismeretlen deriváltjára.

$$u'x + u = u - e^u \Rightarrow u'x = -e^u \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}e^u$$

A változók szétválasztása után integráljunk. A bal oldalon figyeljünk, összetett függvényt integrálnak lineáris belső függvénnyel.

$$\frac{1}{e^u} du = -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \frac{1}{e^u} du = -\int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int e^{-u} du = -\int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{e^{-u}}{-1} = -\ln|x| + c$$

Szorozzunk -1 -gyel, majd a jobb oldalon alakítsunk ki egyetlen logaritmust, a már megszokott módon.

$$e^{-u} = \ln|x| + c \Rightarrow e^{-u} = \ln|x| + \ln c \Rightarrow e^{-u} = \ln cx$$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát, majd szorozzunk -1 -gyel.

$$-u = \ln |\ln cx| \Rightarrow u = -\ln |\ln cx|$$

Térjünk vissza a régi ismeretlenre, s x -szel szorozva megkapjuk a megoldást.

$$\frac{y}{x} = -\ln |\ln cx| \Rightarrow y = -x \ln |\ln cx|$$

5. feladat Oldjuk meg az $y' = (4x + y)^2$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Most azt vehetjük észre, hogy a jobb oldalon a $4x + y$ lineáris kifejezésnek áll egy függvénye, így ennek a helyettesítésével érdemes próbálkozni.

Legyen $u = 4x + y$.

Deriváljuk mindkét oldalt, s rendezzünk y' -ra.

$$u' = 4 + y' \Rightarrow y' = u' - 4$$

Írjuk ezt az egyenlet bal oldalára, a jobb oldalon pedig $4x + y$ helyére kerül u .

$$u' - 4 = u^2$$

Rendezzünk a deriváltra, és válasszuk szét a változókat. Most az egész jobb oldali kifejezéssel kell osztani.

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 4 \Rightarrow \frac{1}{u^2 + 4} du = dx$$

$$\text{Mindkét oldalon integrálva: } \int \frac{1}{u^2 + 4} du = \int dx$$

A jobb oldalon könnyű dolgunk van, hiszen $\int dx = x + c$, a másik integrálás azonban

kicsit nehezebb, ezt részletezzük külön.

$$\int \frac{1}{u^2 + 4} du = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\frac{u^2}{4} + 1} du = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)^2 + 1} du = \frac{1}{4} \frac{\operatorname{arctg} \frac{u}{2}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} + c$$

Tegyük egyenlővé a két eredményt, a konstans elég az egyik oldalon kiírni. Rögtön szorozhatunk 2 -vel.

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} = x + c \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{u}{2} = 2x + c$$

Vegyük mindegyik oldal tangensét, így eltűnik az arctg.

$$\frac{u}{2} = \operatorname{tg}(2x + c) \Rightarrow u = 2 \operatorname{tg}(2x + c)$$

Helyettesítsük vissza a régi ismeretlent, és rendezés után megkapjuk a megoldást.

$$4x + y = 2 \operatorname{tg}(2x + c) \Rightarrow y = 2 \operatorname{tg}(2x + c) - 4x$$

6. feladat Határozzuk meg az $y' = 1 - e^{y-x}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: A jobb oldalon most az $y - x$ lineáris kifejezést fedezhetjük fel, ezt célszerű helyettesíteni.

$$\text{Legyen } u = y - x \Rightarrow u' = y' - 1 \Rightarrow y' = u' + 1, \text{ s így az egyenlet: } u' + 1 = 1 - e^u.$$

Rendezzünk, és válasszuk szét a változókat.

$$u' + 1 = 1 - e^u \Rightarrow \frac{du}{dx} = -e^u \Rightarrow \frac{1}{e^u} du = -dx \Rightarrow e^{-u} du = -dx$$

Integráljunk mindkét oldalon, s szorozzunk -1 -gyel.

$$\int e^{-u} du = - \int dx \Rightarrow \frac{e^{-u}}{-1} = -x + c \Rightarrow e^{-u} = x + c$$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát, majd szorozzunk újra -1 -gyel.

$$-u = \ln|c + x| \Rightarrow u = -\ln|c + x|$$

Térjünk vissza az eredeti ismeretlenre, s egy átrendezés után megkapjuk a megoldást.

$$y - x = -\ln|x + c| \Rightarrow y = x - \ln|x + c|$$

7. feladat Mi az általános megoldása az $y' = \frac{1}{x+y} - 1$ differenciálegyenletnek?

Megoldás: Ezen differenciálegyenlet jobb oldalán az $x + y$ lineáris kifejezés fordul elő, ezt érdemes helyettesíteni.

Ha $u = x + y$, akkor $u' = 1 + y' \Rightarrow y' = u' - 1$, az egyenlet pedig:

$$u' - 1 = \frac{1}{u} - 1$$

Adjunk mindkét oldalhoz 1-et, majd válasszuk szét a változókat.

$$u' = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \Rightarrow u du = dx$$

Integráljunk, és fejezzük ki u -t.

$$\int u du = \int dx \Rightarrow \frac{u^2}{2} = x + c \Rightarrow u^2 = 2x + c \Rightarrow u = \pm \sqrt{2x + c}$$

Helyettesítsünk vissza, s fejezzük ki az ismeretlent.

$$x + y = \pm \sqrt{2x + c} \Rightarrow y = -x \pm \sqrt{2x + c}$$

8. feladat Oldjuk meg az $y' = 2\sqrt{y - 3x + 4} + 3$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Most az $y - 3x + 4$ lineáris kifejezést fedezhetjük fel az egyenletben, ezt fogjuk helyettesíteni.

Legyen $u = y - 3x + 4 \Rightarrow u' = y' - 3 \Rightarrow y' = u' + 3$, s így az

egyenlet $u' + 3 = 3 + 2\sqrt{u}$.

Vonjunk ki mindkét oldalból 3-at, s válasszuk szét a változókat.

$$u' = 2\sqrt{u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2\sqrt{u} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2dx \Rightarrow u^{-\frac{1}{2}} du = 2dx$$

Az integrálás után fejezzük ki u -t.

$$\int u^{-\frac{1}{2}} du = 2 \int dx \Rightarrow \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x + c \Rightarrow 2\sqrt{u} = 2x + c \Rightarrow \sqrt{u} = x + c \Rightarrow u = (x + c)^2$$

Visszatérünk az eredeti ismeretlenre, s kifejezzük az egyenletből.

$$y - 3x + 4 = (x + c)^2 \Rightarrow y = 3x - 4 + (x + c)^2$$

Megjegyzés: Ebben a leckében mindig a differenciálegyenlet általános megoldását kerestük, ezért a változók szétválasztásánál, nem foglalkoztunk azzal, hogy az osztás miatt kapunk-e konstans megoldás(oka)t, mert ezek csak partikuláris megoldások.

Természetesen az ilyen típusú differenciálegyenletek esetén is lehet kezdeti feltétel. Ilyenkor ugyanúgy járunk el, mint az előző leckékben, tehát a kezdeti feltételben szereplő értékeket behelyettesítjük az általános megoldásba, s meghatározzuk a konstans értékét.

Ellenőrző kérdések:





1. kérdés: Melyik függvény az $xy' = x + y$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = x \ln cx$
- ☐ $y = -x \ln cx$
- ☐ $y = x \ln \frac{c}{x}$
- ☐ $y = -x \ln \frac{c}{x}$



2. kérdés: Az alábbi implicit alakban adott függvények közül melyik az $y' = \frac{x + y}{y - x}$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y^2 + 2xy - x^2 = c$
- ☐ $x^2 + 2xy - y^2 = c$
- ☐ $y^2 - 2xy - x^2 = c$
- ☐ $x^2 - 2xy - y^2 = c$



3. kérdés: Mi az általános megoldása az $y' = \frac{x + y \cos \frac{y}{x}}{x \cos \frac{y}{x}}$

differenciálegyenletnek?

- ☐ $y = x \arcsin(\ln cx)$
- ☐ $y = -x \arcsin(\ln cx)$
- ☐ $y = x \arcsin\left(\ln \frac{c}{x}\right)$
- ☐ $y = -x \arcsin\left(\ln \frac{c}{x}\right)$



4. kérdés: Melyik függvény az $xy' = y + xe^{-\frac{y}{x}}$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = x \ln |\ln cx|$
- ☐ $y = -x \ln |\ln cx|$
- ☐ $y = x \ln \left| \ln \frac{c}{x} \right|$
- ☐ $y = -x \ln \left| \ln \frac{c}{x} \right|$



5. kérdés: Mi az általános megoldása az $y' = (x + y)^2$ differenciálegyenletnek?

- ☐ $y = \operatorname{tg}(x + c) + x$
- ☐ $y = \operatorname{tg}(x + c) - x$
- ☐ $y = \operatorname{tg}(c - x) + x$
- ☐ $y = \operatorname{tg}(c - x) - x$



6. kérdés: Mi az $y' = e^{x+y} - 1$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = x - \ln(c + x)$
- ☐ $y = x - \ln(c - x)$
- ☐ $y = -x - \ln(c + x)$
- ☐ $y = -x - \ln(c - x)$



7. kérdés: Melyik függvény az általános megoldása, az $y' = \frac{1}{x - y} + 1$ differenciálegyenletnek?

- ☐ $y = x + \sqrt{c + 2x}$
- ☐ $y = x + \sqrt{c - 2x}$
- ☐ $y = -x + \sqrt{c + 2x}$
- ☐ $y = -x + \sqrt{c - 2x}$



8. kérdés: Mi az általános megoldása az $y' = \sqrt{2x - y + 3} + 2$ differenciálegyenletnek?

☐ $y = 2x + 3 + \left(c + \frac{x}{2}\right)^2$

☐ $y = 2x + 3 + \left(c - \frac{x}{2}\right)^2$

☐ $y = 2x + 3 - \left(c + \frac{x}{2}\right)^2$

☐ $y = 2x + 3 - \left(c - \frac{x}{2}\right)^2$

Tanulási cél: Az elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldási módszerének megismerése, és alkalmazása feladatokban.

Tananyag:

Tankönyv: Horváth Zoltán: Bevezetés a differenciálegyenletek megoldásába

Fejezet: 2.4.

Elméleti összefoglaló:

Az $y' + a(x)y = b(x)$ alakú differenciálegyenleteket, elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük. (Az ilyen egyenletek lineárisak, mert y' és y csak első hatványon szerepelnek.)

Ha $b(x) = 0$ konstans függvény, akkor az egyenlet homogén, egyébként inhomogén.

Az $y' + a(x)y = b(x)$, $b(x) \neq 0$ inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenletnek nevezzük az $y'_h + a(x)y_h = 0$ egyenletet. Először ezt a differenciálegyenletet oldjuk meg. Ennek változói szétválaszthatók. Mivel osztunk y_h -val, ezért az $y_h = 0$ konstans függvény megoldás.

$$y'_h + a(x)y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy_h}{dx} = -a(x)y_h \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y_h} dy_h = -a(x) dx$$

Integráljunk mindkét oldalon.

$$\int \frac{1}{y_h} dy_h = \int -a(x) dx \quad \Rightarrow \quad \ln |y_h| = -A(x) + c, \text{ ahol } A(x) \text{ a } a(x)$$

függvény egy primitív függvénye.

Fejezzük ki y_h -t. Ehhez emeljük fel e -t, az egyenlet két oldalán álló kifejezésre.

$$e^{\ln |y_h|} = e^{-A(x)+c} \quad \Rightarrow \quad |y_h| = e^{-A(x)+c} \quad \Rightarrow \quad |y_h| = e^{-A(x)} e^c$$

Itt e^c helyére egyszerűen C kerülhet, s ez az új konstans az abszolút értéket is magában foglalja, valamint $c = 0$ esetben az $y_h = 0$ megoldást is megkapjuk.

Így a homogén egyenlet általános megoldása: $y_h = ce^{-A(x)}$, ahol $A(x)$ a $a(x)$ egy

primitív függvénye.

Lényegében egy képletet kaptunk, amelybe csak be kell helyettesíteni az egyenletben szereplő $a(x)$ függvényt, meghatározni az integrált, s a megoldás felírható. Megjegyzésre azonban nem a képletet javasoljuk, hanem a módszert.

Tegyük fel ezután, hogy az inhomogén egyenlet megoldása hasonlít a hozzá tartozó homogén egyenlet megoldásához, csupán a konstans helyén valamilyen függvény áll, azaz

$y = k(x) e^{-A(x)}$. Ezt a konstans variálásának nevezik. Innentől a $k(x)$ függvény

meghatározása a cél, hiszen ha azt ismerjük, akkor a differenciálegyenlet megoldása is ismert.

Helyettesítsük be az így felírt y függvényt a differenciálegyenletbe. Ehhez deriváljuk a függvényt, mely egy olyan szorzat, amiben a második tényező összetett függvény. Mivel $A(x)$ a $a(x)$ egy primitív függvénye, ezért $A'(x) = a(x)$.

$$y = k(x) e^{-A(x)} \Rightarrow y' = k'(x) e^{-A(x)} + k(x) e^{-A(x)} (-A'(x)) = k'(x) e^{-A(x)} + k(x) e^{-A(x)} (-a(x))$$

$$y' = k'(x) e^{-A(x)} - a(x) k(x) e^{-A(x)}$$

$$y' + a(x) y = b(x) \Rightarrow (k'(x) e^{-A(x)} - a(x) k(x) e^{-A(x)}) + a(x) k(x) e^{-A(x)} = b(x)$$

A bal oldalon levő második és harmadik tag csak előjelében különbözik, így összegük zérus, az egyenlet egyszerűbbé válik. Így az egyenlet csak $k'(x)$ -et tartalmazza, melyre rendezünk, s integrálás után megkapjuk $k(x)$ -et.

$$k'(x) e^{-A(x)} = b(x) \Rightarrow k'(x) = \frac{b(x)}{e^{-A(x)}} = b(x) e^{A(x)} \Rightarrow k(x) = \int b(x) e^{A(x)} dx$$

Ezután felírjuk az inhomogén egyenlet megoldását.

$$y = \left(\int b(x) e^{A(x)} dx \right) e^{-A(x)}, \text{ ahol } A(x) \text{ a } a(x) \text{ egy primitív függvénye.}$$

Ez is olyan képlet, melybe az egyenletben szereplő $a(x)$, $b(x)$ függvényeket behelyettesítve, s kijelölt integrálokat meghatározva, megkapható a megoldás. Ennek a

képletnek a megjegyzését sem javasoljuk, mert itt is a megoldáshoz vezető eljárás a lényeges.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat Határozzuk meg az $y' + 4x^3y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Az egyenlet homogén, így változói szétválaszthatók.

$$y' + 4x^3y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -4x^3y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy = -4x^3dx$$

Az egyenlet mindkét oldalán integrálunk.

$$\int \frac{1}{y}dy = \int -4x^3dx \quad \Rightarrow \quad \ln |y| = -x^4 + c$$

Emeljük fel e -t a két oldalon álló kifejezésre.

$$e^{\ln |y|} = e^{-x^4+c} \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{-x^4}e^c$$

Az e^c helyére egyszerűen egy konstans kerülhet, s ez a konstans már az abszolút értéket is tartalmazza.

A megoldás tehát: $y = ce^{-x^4} = \frac{c}{e^{x^4}}$.

2. feladat Oldjuk meg az $y' - y \cos x = 0$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Ismét homogén egyenletet kell megoldanunk, ezért szétválasztjuk a változókat.

$$y' - y \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y \cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy = \cos x dx$$

Integráljunk az egyenlet két oldalán.

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \cos x dx \quad \Rightarrow \quad \ln |y| = \sin x + c$$

Emeljük fel e -t az egyenlet két oldalán álló kifejezésre.

$$e^{\ln|y|} = e^{\sin x + c} \Rightarrow |y| = e^{\sin x} e^c$$

A konstanssal járjunk el úgy, mint az előző feladatban.

A megoldás így a következő: $y = ce^{\sin x}$.

3. feladat Mi az általános megoldása az $(x^3 + 5)y' - x^2y = 0$ differenciálegyenletnek?

Megoldás: Ez az egyenlet is homogén, így most is a változók szétválasztásával kezdjük a megoldást.

$$(x^3 + 5)y' - x^2y = 0 \Rightarrow (x^3 + 5)\frac{dy}{dx} = x^2y \Rightarrow \frac{1}{y}dy = \frac{x^2}{x^3 + 5}dx$$

Következik az integrálás. A jobb oldalon kiemelés után $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú integrandust kapunk.

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{x^2}{x^3 + 5}dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3 + 5}dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \frac{1}{3} \int \frac{(x^3 + 5)'}{x^3 + 5}dx \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \frac{1}{3}\ln|x^3 + 5| + c$$

Most célszerű a konstans helyére konstans logaritmusát írni, s a jobb oldalon egyetlen logaritmust kialakítani.

$$\ln|y| = \frac{1}{3}\ln|x^3 + 5| + \ln c \Rightarrow \ln|y| = \ln|x^3 + 5|^{\frac{1}{3}} + \ln c \Rightarrow \ln|y| = \ln c\sqrt[3]{x^3 + 5}$$

A logaritmusokat elhagyva kapjuk a megoldást: $y = c\sqrt[3]{x^3 + 5}$.

4. feladat Határozzuk meg az $y' - \frac{3y}{x} = x^3 \cos x$ differenciálegyenlet általános

megoldását!

Megoldás: Ez a differenciálegyenlet inhomogén, ezért először vesszük a hozzá tartozó homogén egyenletet, azaz elhagyjuk az egyenlet jobb oldalán álló tagot, s az így kapott egyenletet a szokott módon megoldjuk.

$$y'_h - \frac{3y_h}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy_h}{dx} = \frac{3y_h}{x} \Rightarrow \frac{1}{y_h} dy_h = \frac{3}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{y_h} dy_h = \int \frac{3}{x} dx \Rightarrow \ln |y_h| = 3 \ln |x| + c \Rightarrow \ln |y_h| = \ln |x^3| + \ln c \Rightarrow \ln |y_h| = \ln cx^3$$

Ebből a homogén egyenlet megoldása: $y_h = cx^3$.

Ezután az inhomogén egyenlet megoldását keressük a konstans variálásával, tehát a homogén egyenlet megoldásában a konstans helyére függvényt írunk. Így tehát $y = k(x)x^3$, s innentől a $k(x)$ függvény meghatározása a cél. Vegyük y deriváltját.

$$y' = (k(x)x^3)' = k'(x)x^3 + k(x)3x^2 = k'(x)x^3 + 3k(x)x^2$$

Helyettesítünk a differenciálegyenletben y' és y helyére.

$$y' - \frac{3y}{x} = x^3 \cos x \Rightarrow (k'(x)x^3 + 3k(x)x^2) - \frac{3k(x)x^3}{x} = x^3 \cos x$$

A bal oldalon egyszerűsítsük a törtet, s vonjunk össze.

$$k'(x)x^3 + 3k(x)x^2 - 3k(x)x^2 = x^3 \cos x \Rightarrow k'(x)x^3 = x^3 \cos x$$

Fejezzük ki $k'(x)$ -et és integráljunk.

$$k'(x) = \cos x \Rightarrow k(x) = \int \cos x dx = \sin x + c$$

Helyettesítsük be ezt y -ba, s megkapjuk a megoldást.

$$y = k(x) x^3 = (\sin x + c)x^3$$

5. feladat Oldjuk meg az $y' + \frac{3y}{x} = 10x$, $y(1) = 4$ kezdeti érték feladatot!

Megoldás: A differenciálegyenlet inhomogén, ezért először vesszük a hozzá tartozó homogén egyenletet, és azt oldjuk meg.

$$y'_h + \frac{3y_h}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy_h}{dx} = -\frac{3y_h}{x} \Rightarrow \frac{1}{y_h} dy_h = -\frac{3}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{y_h} dy_h = \int -\frac{3}{x} dx \Rightarrow \ln |y_h| = -3 \ln |x| + c \Rightarrow \ln |y_h| = \ln c - \ln |x^3| \Rightarrow \ln |y_h| = \ln \frac{c}{x^3}$$

Ebből a homogén egyenlet megoldása: $y_h = \frac{c}{x^3}$.

Keressük ezután az inhomogén egyenlet megoldását a konstans variálásával, tehát írjunk függvényt a konstans helyére, azaz $y = \frac{k(x)}{x^3}$. Vegyük ennek a függvénynek a deriváltját.

$$y' = \left(\frac{k(x)}{x^3} \right)' = \frac{k'(x) x^3 - k(x) 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{k'(x) x^3 - 3k(x) x^2}{x^6} = \frac{k'(x)}{x^3} - \frac{3k(x)}{x^4}$$

Helyettesítünk be y' és y helyére a differenciálegyenletbe.

$$y' + \frac{3y}{x} = 10x \Rightarrow \left(\frac{k'(x)}{x^3} - \frac{3k(x)}{x^4} \right) + \frac{3 \frac{k(x)}{x^3}}{x} = 10x$$

A bal oldalon az emeletes törtet alakítsuk egyszerű törtté, majd vonjunk össze.

$$\frac{k'(x)}{x^3} - \frac{3k(x)}{x^4} + \frac{3k(x)}{x^4} = 10x \Rightarrow \frac{k'(x)}{x^3} = 10x$$

Rendezzünk $k'(x)$ -re, majd integráljunk.

$$k'(x) = 10x^4 \Rightarrow k(x) = \int 10x^4 dx = 10 \frac{x^5}{5} + c = 2x^5 + c$$

Ezt behelyettesítve y -ba, megkapjuk az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y = \frac{k(x)}{x^3} = \frac{2x^5 + c}{x^3} = 2x^2 + \frac{c}{x^3}$$

Írjuk be a függvénybe a kezdeti feltételben megadott értékeket, s fejezzük ki C -t.

$$4 = 2 \cdot 1^2 + \frac{c}{1^3} \Rightarrow c = 2$$

Így a kezdeti érték feladat megoldása:

$$y_0 = 2x^2 + \frac{2}{x^3}.$$

Megjegyzés: Ha összehasonlítjuk az előző feladat homogén egyenletét ennek a feladatnak a homogén egyenletével, akkor látható, hogy csupán egy előjelben térnek el. A megoldás logaritmusa így nem logaritmusok összegével egyenlő, hanem különbségével, s a logaritmusok elhagyása után nem szorzatot, hanem hányadost kapunk. Az előző feladatban a homogén egyenlet megoldása Cx^3 volt, ebben pedig $\frac{C}{x^3}$. Figyeljünk tehát oda nagyon az előjelekre,

mert egy hibás előjel teljesen megváltoztathatja a megoldást.

6. feladat Mi a megoldása az $y' + y \sin x = 3x^2 e^{\cos x}$, $y(0) = 2e$ kezdeti érték feladatnak?

Megoldás: Ez a differenciálegyenlet is inhomogén. Hagyjuk el a jobb oldali tagot, s megkapjuk a homogén egyenletet. Oldjuk meg először ezt.

$$y'_h + y_h \sin x = 0 \Rightarrow \frac{dy_h}{dx} = -y_h \sin x \Rightarrow \frac{1}{y_h} dy_h = -\sin x dx$$

$$\int \frac{1}{y_h} dy_h = \int -\sin x dx \Rightarrow \ln |y_h| = \cos x + c \Rightarrow |y_h| = e^{\cos x + c} = e^{\cos x} e^c$$

Innen a homogén egyenlet megoldása: $y_h = ce^{\cos x}$.

Variáljuk a konstans, tehát keressük az inhomogén egyenlet megoldását $y = k(x) e^{\cos x}$ alakban. Határozzuk meg az így felírt függvény deriváltját.

$$y' = (k(x) e^{\cos x})' = k'(x) e^{\cos x} + k(x) e^{\cos x} (-\sin x) = k'(x) e^{\cos x} - k(x) e^{\cos x} \sin x$$

Helyettesítsünk be a differenciálegyenletben y' és y helyére.

$$y' + y \sin x = 3x^2 e^{\cos x} \Rightarrow (k'(x) e^{\cos x} - k(x) e^{\cos x} \sin x) + k(x) e^{\cos x} \sin x = 3x^2 e^{\cos x}$$

Vonjunk össze a bal oldalon, rendezzünk $k'(x)$ -re, majd integráljunk.

$$k'(x) e^{\cos x} = 3x^2 e^{\cos x} \Rightarrow k'(x) = 3x^2 \Rightarrow k(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + c$$

Ebből felírjuk az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y = k(x) e^{\cos x} = (x^3 + c) e^{\cos x}$$

Helyettesítsük ebbe a kezdeti feltétel adatait.

$$2e = (0^3 + c) e^{\cos 0} \Rightarrow 2e = ce \Rightarrow c = 2$$

A kezdeti érték feladat megoldása tehát: $y_0 = (x^3 + 2) e^{\cos x}$.

7. feladat Határozzuk meg az $y' - \frac{y}{2x} = \sqrt{x^3}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Ismét inhomogén a differenciálegyenlet. Hagyjuk el a jobb oldali tagot, így homogén egyenletet kapunk, melyet megoldunk.

$$y'_h - \frac{y_h}{2x} = 0 \Rightarrow \frac{dy_h}{dx} = \frac{y_h}{2x} \Rightarrow \frac{1}{y_h} dy_h = \frac{1}{2x} dx$$

$$\int \frac{1}{y_h} dy_h = \int \frac{1}{2x} dx \Rightarrow \ln |y_h| = \frac{1}{2} \ln |x| + c \Rightarrow \ln |y_h| = \ln |x|^{\frac{1}{2}} + \ln c \Rightarrow \ln |y_h| = \ln c \sqrt{x}$$

A homogén egyenlet megoldása tehát: $y_h = c\sqrt{x}$.

Cseréljük ki a konstans függvényre, s keressük az inhomogén differenciálegyenlet megoldását $y = k(x) \sqrt{x}$ alakban. Deriváljuk ezt a függvényt.

$$y' = (k(x) \sqrt{x})' = k'(x) \sqrt{x} + k(x) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Helyettesítsük ezt be a differenciálegyenletbe y' helyére, y helyére pedig kerüljön $k(x) \sqrt{x}$.

$$y' - \frac{y}{2x} = \sqrt{x^3} \Rightarrow (k'(x) \sqrt{x} + k(x) \frac{1}{2\sqrt{x}}) - \frac{k(x) \sqrt{x}}{2x} = \sqrt{x^3}$$

A bal oldalon az utolsó tagot egyszerűsítsük $\sqrt{x}$ -szel, majd vonjunk össze.

$$k'(x) \sqrt{x} + k(x) \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{k(x)}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x^3} \Rightarrow k'(x) \sqrt{x} = \sqrt{x^3}$$

Fejezzük ki $k'(x)$ -et, s integráljunk.

$$k'(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x^3}{x}} = x \Rightarrow k(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

Ezek után az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = k(x) \sqrt{x} = \left(\frac{x^2}{2} + c\right) \sqrt{x}$$

8. feladat Oldjuk meg az $y' - y \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ kezdeti érték feladatot!

Megoldás: Mivel az egyenlet inhomogén, elhagyjuk a jobb oldali tagot, s az így kapott homogén egyenletet oldjuk meg először.

$$y'_h - y_h \operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow \frac{dy_h}{dx} = y_h \operatorname{ctg} x \Rightarrow \frac{1}{y_h} dy_h = \operatorname{ctg} x dx \Rightarrow \frac{1}{y_h} dy_h = \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\int \frac{1}{y_h} dy_h = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow \int \frac{1}{y_h} dy_h = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx \Rightarrow \ln |y_h| = \ln |\sin x| + c \Rightarrow \ln |y_h| = \ln c \sin x$$

A homogén egyenlet általános megoldása tehát: $y_h = c \sin x$.

Variáljuk ezután a konstans, azaz legyen $y = k(x) \sin x$. Deriváljuk ezt a függvényt.

$$y' = (k(x) \sin x)' = k'(x) \sin x + k(x) \cos x$$

Helyettesítsünk az eredeti differenciálegyenletben az ismeretlen és deriváltjának helyére.

$$y' - y \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x \Rightarrow (k'(x) \sin x + k(x) \cos x) - k(x) \sin x \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x$$

Írjunk a $\operatorname{ctg} x$ helyébe $\frac{\cos x}{\sin x}$ -et, egyszerűsítsünk a bal oldali utolsó tagban, és vonjunk

össze, majd fejezzük ki $k'(x)$ -et.

$$(k'(x) \sin x + k(x) \cos x) - k(x) \sin x \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow k'(x) \sin x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow k'(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

Ezt integrálva megkapjuk $k(x)$ -et.

$$k(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \sin^{-2} x \cos x dx = \int \sin^{-2} x (\sin x)' dx = \frac{\sin^{-1} x}{-1} + c = -\frac{1}{\sin x} + c$$

Az általános megoldás a következő:

$$y = k(x) \sin x = \left(c - \frac{1}{\sin x}\right) \sin x = c \sin x - 1$$

Helyettesítsük be a kezdeti feltételben megadott értékpárt.

$$3 = c \sin \frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow 3 = c - 1 \Rightarrow c = 4$$

Ebből a kezdeti érték feladat megoldása: $y_0 = 4 \sin x - 1$.

Ellenőrző kérdések:



1. kérdés: Mi az általános megoldása az $y' - 3x^2y = 0$ differenciálegyenletnek?

☐ $y = c + e^{x^3}$

☐ $y = c - e^{x^3}$

☐ $y = ce^{x^3}$

☐ $y = \frac{c}{e^{x^3}}$



2. kérdés: Melyik függvény az $y' - y \sin x = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása?

☐ $y = c + e^{\cos x}$

☐ $y = c - e^{\cos x}$

☐ $y = ce^{\cos x}$

☐ $y = \frac{c}{e^{\cos x}}$



3. kérdés: Mi az általános megoldása az $(x^2 + 6)y' + xy = 0$ differenciálegyenletnek?

☐ $y = c\sqrt{x^2 + 6}$

☐ $y = \frac{c}{\sqrt{x^2 + 6}}$

☐ $y = ce^{\sqrt{x^2+6}}$

☐ $y = \frac{c}{e^{\sqrt{x^2+6}}}$



4. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $y' - \frac{2y}{x} = x^2 \sin x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

☐ $y = x^2(c + \cos x)$

☐ $y = x^2(c - \cos x)$

☐ $y = x^2(c + \sin x)$

☐ $y = x^2(c - \sin x)$



5. kérdés: Mi a megoldása az $y' + \frac{2y}{x} = 5x^2$, $y(1) = 6$ kezdeti érték feladatnak?



$$y_0 = \frac{x^5 + 5}{x^2}$$



$$y_0 = \frac{7 - x^5}{x^2}$$



$$y_0 = x^2(5x + 1)$$



$$y_0 = x^2(11 - 5x)$$



6. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik a megoldása az $y' + y \cos x = 2xe^{-\sin x}$, $y(0) = 5$ kezdeti érték feladatnak?



$$y_0 = e^{\sin x} (5 + x^2)$$



$$y_0 = e^{\sin x} (5 - x^2)$$



$$y_0 = e^{-\sin x} (5 + x^2)$$



$$y_0 = e^{-\sin x} (5 - x^2)$$



7. kérdés: Az $y' - \frac{y}{3x} = \sqrt[3]{x^4}$ differenciálegyenletnek mi az általános megoldása?



$$y = \sqrt[3]{x} \left(c + \frac{x^2}{2} \right)$$



$$y = \sqrt[3]{x} \left(c - \frac{x^2}{2} \right)$$



$$y = \frac{\left(c + \frac{x^2}{2} \right)}{\sqrt[3]{x}}$$



$$y = \frac{\left(c - \frac{x^2}{2} \right)}{\sqrt[3]{x}}$$



8. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $y' + y \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x$, $y(0) = 3$ kezdeti érték feladat megoldása?



$$y_0 = 2 \cos x + 1$$



$$y_0 = 4 \cos x - 1$$



$$y_0 = \frac{2}{\cos x} + 1$$



$$y_0 = \frac{4}{\cos x} - 1$$

Tanulási cél: Az elsőrendű lineáris differenciálegyenletek közül az állandó együtthatós egyenletek megoldási módjának megismerése, és alkalmazása feladatokban.

Tananyag:

Tankönyv: Horváth Zoltán: Bevezetés a differenciálegyenletek megoldásába

Fejezet: 2.4.

Elméleti összefoglaló:

Az $y' + ay = b(x)$, $a \in R$ alakú differenciálegyenleteket elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenleteknek nevezzük. Ezek az egyenletek megoldhatók, ez előző leckében ismertetett módszerrel is, de sokszor egyszerűbb úton is meghatározható a megoldás.

Először most is az $y_h + ay_h = 0$ homogén egyenletet oldjuk meg. Belátható, hogy ennek általános megoldása mindig $y_h = ce^{\lambda x}$ alakú. A megoldásban szereplő λ számot a differenciálegyenletbe történő behelyettesítéssel határozzuk meg. Ehhez vegyük az így felírt megoldás deriváltját. (A belső függvény deriváltjával szorozni kell!)

$$y' = (ce^{\lambda x})' = ce^{\lambda x} \cdot \lambda = c\lambda e^{\lambda x}$$

Végezzük el a behelyettesítést.

$$y' + ay = 0 \Rightarrow c\lambda e^{\lambda x} + ace^{\lambda x} = 0 \Rightarrow ce^{\lambda x}(\lambda + a) = 0$$

Mivel $e^{\lambda x} > 0$ minden esetben igaz, az egyenletet eloszthatjuk vele. A konstanssal is oszthatunk, mert a $c = 0$ eset nyilvánvalóan megoldás, s ezután feltehetjük, hogy a konstans nem zérus. Egy elsőfokú egyenletet kapunk, amelyből λ meghatározható.

$$\lambda + a = 0 \Rightarrow \lambda = -a$$

Ezt az elsőfokú egyenletet a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének nevezzük. A feladatok megoldása során nem kell mindig végigjárunk az előző levezetés minden lépését, mert ezt az egyenletet formálisan is felírhatjuk. A differenciálegyenletben y' helyére λ -t írunk, y -t pedig egyszerűen töröljük az egyenletből, csak az együtthatóját tartjuk meg.

Ezután a homogén egyenlet megoldás: $y_h = ce^{\lambda x} = ce^{-ax}$.

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása (y) , a homogén egyenlet általános megoldásának (y_h) , és az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának (y_p) összegeként áll elő, azaz $y = y_h + y_p$.

A cél innentől egy y_p partikuláris megoldás előállítás. Ha az egyenlet jobb oldalán álló $b(x)$ függvény, amit zavaró függvénynek is neveznek, polinom, $e^{\alpha x}$, $\sin \beta x$, $\cos \beta x$, vagy ezek számszorosainak összege, szorzata, akkor y_p -t az ugyanolyan alakú függvények közt keressük, mint $b(x)$, csak a függvénybe határozatlan együtthatókat írunk. Az így felírt függvényt nevezzük próbafüggvénynek. Ezt deriváljuk, s behelyettesítjük a differenciálegyenletbe. Az egyenlet két oldalán szereplő azonos függvények együtthatóit egyenlővé tesszük, s az így kapott egyenletekből meghatározzuk az együtthatók értékét. Ezután a konkrét együtthatókkal felírjuk a megoldást.

A módszer végrehajtása során nagyon fontos a megfelelő próbafüggvény megválasztása. Ezt példákon keresztül mutatjuk be, melyek tartalmazzák a legfontosabb eseteket.

$$b(x) = x^2 + 5 \Rightarrow y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$b(x) = 2x^3 \Rightarrow y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$b(x) = 5e^{4x} \Rightarrow y_p = Ae^{4x}$$

$$b(x) = \sin x \Rightarrow y_p = A \sin x + B \cos x$$

$$b(x) = 4 \cos 3x \Rightarrow y_p = A \sin 3x + B \cos 3x$$

$$b(x) = 4 \sin 2x + \cos x \Rightarrow y_p = A \sin 2x + B \cos 2x$$

$$b(x) = x + e^x \Rightarrow y_p = Ax + B + Ce^x$$

$$b(x) = e^{3x} - \cos x \Rightarrow y_p = Ae^{3x} + B \sin x + C \cos x$$

$$b(x) = e^x - e^{5x} \Rightarrow y_p = Ae^x + Be^{5x}$$

$$b(x) = xe^x \Rightarrow y_p = (Ax + B)e^x$$

$$b(x) = e^{3x} \sin x \Rightarrow y_p = e^{3x}(A \sin x + B \cos x)$$

A példákból látható, hogy polinomok esetén a legmagasabb fokszámú tag, és minden nála alacsonyabb fokszámú tag szerepel a próbafüggvényben, még ha $b(x)$ -ben nem is fordultak elő. Ha $\sin$ vagy $\cos$ függvények legalább egyike szerepel, akkor a próbafüggvénybe mindkettőt be kell írni. Ha $b(x)$ függvények összege, vagy szorzata, akkor a próbafüggvény is a függvényeknek megfelelő próbafüggvények összegeként, vagy szorzataként áll elő. A határozatlan együtthatók elé felesleges mínusz előjelet tenni, az együtthatók tartalmazzák az előjelet.

Ha a $b(x)$ alapján felírt próbafüggvény valamelyik tagjában szereplő függvény azonos a homogén egyenlet megoldásában álló függvénnyel, akkor azt mondjuk, hogy a két függvény rezonanciában áll. Ilyenkor módosítani kell a próbafüggvényt, a rezonanciában álló részt x -szel szorozva kapjuk meg a helyes próbafüggvényt.

Lehet, hogy első olvasásra bonyolultnak tűnik a módszer. Reméljük a kidolgozott feladatok áttekintése után, már ez nem így lesz. A módszer nagy előnye az előző leckében ismertetett eljáráshoz viszonyítva, hogy itt a feladatok megoldása során nem kell integrálni. Nagyon figyelni kell azonban a próbafüggvény helyes felírására, s az egyenletek pontos megoldására. Az elszámolás veszélye mindig fennáll, főleg ha valaki nem rendezetten írja le a számításokat.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat Határozzuk meg az $y' + 2y = 4x$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Először oldjuk meg a homogén egyenletet. Ehhez írjuk fel a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét.

$$\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

A homogén egyenlet megoldása tehát: $y_h = ce^{-2x}$.

Írjuk fel a próbafüggvényt. Mivel a jobb oldalon egy elsőfokú polinom áll, ezért elsőfokú polinom lesz a próbafüggvény is. Bár az egyenlet jobb oldalán nem volt konstans tag, a próbafüggvénybe kell ilyen tagot is írni.

$$y_p = Ax + B$$

Vegyük ennek a deriváltját.

$$y'_p = (Ax + B)' = A$$

Helyettesítsünk a differenciálegyenletben y' és y helyére.

$$y' + 2y = 4x \quad \Rightarrow \quad A + 2(Ax + B) = 4x$$

A bal oldalon bontsuk fel a zárójelet, és a tagokat csoportosítsuk fokszámuk szerint.

$$2Ax + (A + 2B) = 4x$$

Az azonos fokszámú tagok együtthatóinak a két oldalon meg kell egyeznie.

$$4 = 2A \text{ (az elsőfokú tagok egyenlőségéből)}$$

$$A + 2B = 0 \text{ (a konstans tagok egyenlőségéből)}$$

Az első egyenletből $A = 2$, amit a második egyenletbe helyettesítünk, s így kapjuk:

$$B = -1.$$

Az inhomogén egyenletnek tehát egy partikuláris megoldása az $y_p = 2x - 1$ függvény.

Mivel az inhomogén egyenlet általános megoldása, a homogén egyenlet megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának az összege, ezért

$$y = y_h + y_p = ce^{-2x} + 2x - 1.$$

2. feladat Oldjuk meg a $3y' + y = x^2 + 5$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Írjuk fel a karakterisztikus egyenletet, és oldjuk meg.

$$3\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{3}$$

A homogén egyenlet megoldása: $y_h = ce^{-\frac{x}{3}}$.

Írjuk fel a próbafüggvényt. Mivel a jobb oldalon másodfokú polinom áll, a próbafüggvény is másodfokú polinom lesz, azaz $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Deriváljuk ezt a függvényt.

$$y'_p = (Ax^2 + Bx + C)' = 2Ax + B$$

Helyettesítsünk be a differenciálegyenletbe.

$$3y' + y = x^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad 3(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 5$$

Bontsuk fel a zárójeleket, és csoportosítsunk a tagok fokszáma szerint.

$$Ax^2 + (6A + B)x + (3B + C) = x^2 + 5$$

Írjuk fel az azonos fokszámú tagok egyenlőségét.

$$A = 1 \text{ (másodfokú tagok egyenlősége)}$$

$$6A + B = 0 \text{ (elsőfokú tagok egyenlősége)}$$

$$3B + C = 5 \text{ (konstansok egyenlősége)}$$

A második egyenletbe helyettesítjük A -t, kapjuk $B = -6$. Ezt helyettesítjük a harmadik egyenletbe, amiből $C = 23$.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása tehát: $y_p = x^2 - 6x + 23$.

Ezek után az általános megoldás: $y = y_h + y_p = ce^{-\frac{x}{3}} + x^2 - 6x + 23$.

3. feladat Keressük meg az $y' - 4y = 5\cos 3x$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Írjuk fel karakterisztikus egyenletet, aminek megoldás után, a homogén egyenlet általános megoldása is megadható.

$$\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \Rightarrow y_h = ce^{4x}$$

Mivel a zavaró függvény most $5\cos 3x$, a próbafüggvényben $\sin 3x$ és $\cos 3x$ mindegyike szerepel, azaz $y_p = A\sin 3x + B\cos 3x$. Állítsuk elő ennek deriváltját.

$$y' = (A\sin 3x + B\cos 3x)' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x$$

Helyettesítsünk a differenciálegyenletbe.

$$y' - 4y = 5\cos 3x \Rightarrow (3A\cos 3x - 3B\sin 3x) - 4(A\sin 3x + B\cos 3x) = 5\cos 3x$$

Bontsuk fel a zárójeleket, és az azonos függvényt tartalmazó tagokat vonjuk össze, a függvényeket pedig emeljük ki.

$$(-4A - 3B)\sin 3x + (3A - 4B)\cos 3x = 5\cos 3x$$

Írjuk fel az egyenleteket az ugyanolyan függvényt tartalmazó tagok együtthatóinak egyenlőségéből.

$$-4A - 3B = 0 \text{ (sin-os tagok egyenlősége)}$$

$$3A - 4B = 5 \text{ (cos-os tagok egyenlősége)}$$

Adjuk hozzá az első egyenlet háromszorosához a második egyenlet négyszeresét.

$$3(-4A - 3B) + 4(3A - 4B) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 \Rightarrow -25B = 20 \Rightarrow B = -\frac{4}{5}$$

$$A = \frac{3}{5}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása így a következő:

$$y_p = \frac{3}{5} \sin 3x - \frac{4}{5} \cos 3x.$$

Végül az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = y_h + y_p = ce^{4x} + \frac{3}{5} \sin 3x - \frac{4}{5} \cos 3x.$$

4. feladat: Oldjuk meg a $2y' - y = \sin x - 2\cos x$, $y(0) = 4$ kezdeti érték feladatot!

Megoldás: Vesszük most is a karakterisztikus egyenletet, melynek megoldása után felírjuk a homogén egyenlet általános megoldását.

$$2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow y_h = ce^{\frac{x}{2}}$$

A próbafüggvény: $y_p = A \sin x + B \cos x$, aminek deriváltja:

$$y'_p = A \cos x - B \sin x.$$

Helyettesítsük be ezeket a differenciálegyenletbe.

$$\begin{aligned} 2y' - y &= \sin x - 2\cos x \Rightarrow \\ 2(A \cos x - B \sin x) - (A \sin x + B \cos x) &= \sin x - 2\cos x \end{aligned}$$

Vonjuk össze az azonos függvényt tartalmazó tagokat.

$$(-2B - A) \sin x + (2A - B) \cos x = \sin x - 2\cos x$$

Az ugyanolyan függvényt tartalmazó tagok egyenlőségéből a következő egyenleteket kapjuk.

$$-2B - A = 1 \text{ (a sin-os tagok egyenlőségéből)}$$

$$2A - B = -2 \text{ (a cos-os tagok egyenlőségéből)}$$

Adjuk hozzá az első egyenlet kétszereséhez a második egyenletet.

$$2(-2B - A) + (2A - B) = 2 \cdot 1 + (-2) \Rightarrow -5B = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow A = -1$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_p = -1 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x = -\sin x.$$

Az általános megoldás: $y = y_h + y_p = ce^{\frac{x}{2}} - \sin x.$

Helyettesítsük be ide a kezdeti feltételben megadott értékeket.

$$4 = ce^{\frac{0}{2}} - \sin 0 \Rightarrow c = 4$$

A kezdeti érték feladat megoldása így: $y_0 = 4e^{\frac{x}{2}} - \sin x.$

5. feladat Adjunk meg három olyan függvényt, mely megoldása az $y' + y = 12e^{2x}$ differenciálegyenletnek!

Megoldás: Ha meghatározzuk az általános megoldást, akkor abban C helyére bármilyen valós számot írhatunk, mindenképpen megoldást kapunk, így tetszőleges számú megoldást elő tudunk állítani. Először most is a homogén egyenletet oldjuk meg, az előző feladatokban bemutatott módon.

$$\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow y_h = ce^{-x}$$

A próbafüggvény most a következő: $y_p = Ae^{2x}.$

Ennek deriváltja: $y'_p = 2Ae^{2x}$

A próbafüggvényt és deriváltját behelyettesítjük a differenciálegyenletbe.

$$y' + y = 12e^{2x} \Rightarrow 2Ae^{2x} + Ae^{2x} = 12e^{2x} \Rightarrow 3A = 12 \Rightarrow A = 4$$

Mivel csak egyetlen határozatlan együtthatónk volt, most nem kellett egyenletrendszert felírni, az ismeretlen együtthatót innen megkaptuk.

Adjuk meg az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását, majd az általános megoldást.

$$y_p = 4e^{2x} \Rightarrow y = y_h + y_p = ce^{-x} + 4e^{2x}$$

Ezután adjunk a konstansnak három értéket, s így három olyan függvényt kapunk, ami megoldása a differenciálegyenletnek. Legyen ez a három szám: 0, 1, 5. Ekkor a három megoldás a következő:

$$y_1 = 0 \cdot e^{-x} + 4e^{2x} = 4e^{2x}, \quad y_2 = e^{-x} + 4e^{2x}, \quad y_3 = 5e^{-x} + 4e^{2x}.$$

(Ha a konstans zérusnak választjuk, pontosan azt a megoldást kapjuk, amit a próbafüggvénnyel meghatároztunk. Tulajdonképpen elég lett volna két értéket adni a konstansnak, hiszen ezt a megoldást már ismertük az általános megoldás felírásakor.)

6. feladat Határozzuk meg az $5y' - y = e^x + x$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Oldjuk meg először a homogén egyenletet.

$$5\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5} \Rightarrow y_h = ce^{\frac{x}{5}}$$

Az egyenlet jobb oldalán egy exponenciális függvény és egy elsőfokú polinom összege áll, ezért a próbafüggvény is ilyen alakú. Deriváljuk is a függvényt.

$$y_p = Ae^x + Bx + C \Rightarrow y'_p = Ae^x + B$$

Helyettesítsük ezeket a differenciálegyenletbe.

$$5y'_p - y_p = e^x + x \Rightarrow 5(Ae^x + B) - (Ae^x + Bx + C) = e^x + x \Rightarrow 4Ae^x - Bx + (5B - C) = e^x + x$$

Az egyforma függvények együtthatóinak egyeztetéséből a következő egyenletrendszert kapjuk.

$$4A = 1 \text{ (az exponenciális tagok egyelőségéből)}$$

$$-B = 1 \text{ (az elsőfokú tagok egyenlőségéből)}$$

$$5B - C = 0 \text{ (a konstansok egyenlőségéből)}$$

Ennek megoldása: $A = \frac{1}{4}, \quad B = -1, \quad C = -5$.

Ezt felhasználva írjunk fel egy partikuláris megoldást, majd az általános megoldást.

$$y_p = \frac{1}{4}e^x - x - 5 \Rightarrow y = y_h + y_p = ce^{\frac{x}{5}} + \frac{1}{4}e^x - x - 5$$

7. feladat: Oldjuk meg a $2y' - 3y = xe^{3x}$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Határozzuk meg először a homogén egyenlet általános megoldását.

$$2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2} \Rightarrow y_h = ce^{\frac{3}{2}x}$$

Mivel a zavaró függvény most egy exponenciális függvény és egy elsőfokú polinom szorzata, a próbafüggvény is ilyen lesz, azaz $y_p = e^{3x}(Ax + B)$.

Itt szeretnénk kiemelni, hogy amikor a zavaró függvény szorzat, akkor nem szabad szolgai módon mindenhova határozatlan együtthatót írni, ahova a függvényekben külön-külön írunk. Jelen esetben például nem kerül az exponenciális elé is együttható. Ha ugyanis állna ott egy C együttható, akkor a zárójel felbontása után a következőt kapnánk:

$$Ce^{3x}(Ax + B) = CAxe^{3x} + CBe^{3x}.$$

A tagokban levő CA , CB szorzatok helyettesíthetők egy-egy együtthatóval, s így kevesebb ismeretlenünk marad. A próbafüggvényt mindig úgy írjuk fel, hogy az csak annyi határozatlan együtthatót tartalmazzon, ahány tagból áll a próbafüggvény, ha elvégezzük a szorzást.

Ezután vegyük a próbafüggvény deriváltját.

$$y'_p = 3e^{3x}(Ax + B) + e^{3x}A = e^{3x}(3Ax + A + 3B)$$

Helyettesítsünk a differenciálegyenletbe.

$$2y' - 3y = xe^{3x} \Rightarrow$$

$$2(e^{3x}(3Ax + A + 3B)) - 3e^{3x}(Ax + B) = xe^{3x} \Rightarrow 3Axe^{3x} + (2A + 3B)e^{3x} = xe^{3x}$$

Mivel az exponenciális függvény sehol sem zérus, oszthatjuk vele az egyenletet.

$$3Ax + (2A + 3B) = x$$

Ebből az egyenletből a következő egyenletrendszert kapjuk.

$$3A = 1 \text{ (az elsőfokú tagok egyenlőségéből)}$$

$$2A + 3B = 0 \text{ (a konstansok egyenlőségéből)}$$

Ennek megoldása: $A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{2}{9}.$

Ezekből feírjuk először az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását, majd az általános megoldást.

$$y_p = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} \Rightarrow y = y_h + y_p = ce^{\frac{3}{2}x} + \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x}$$

8. feladat Mi az általános megoldása a $4y' + 3y = 13e^x \cos x$ differenciálegyenletnek?

Megoldás: Szokás szerint először a homogén egyenletet oldjuk meg.

$$4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{4} \Rightarrow y_h = ce^{-\frac{3}{4}x}$$

A zavaró függvény szorzat, melynek egyik tényezője exponenciális függvény, a másik pedig cosinus függvény. A próbafüggvényben az ezen függvényekhez tartozó próbafüggvények szorzatának kell állni. Felesleges együtthatót most sem szabad beírni a próbafüggvénybe.

$$y_p = e^x(A \sin x + B \cos x) \Rightarrow y'_p = e^x(A \sin x + B \cos x) + e^x(A \cos x - B \sin x)$$

Helyettesítsük ezeket a $4y' + 3y = 13e^x \cos x$ differenciálegyenletbe.

$$4(e^x(A \sin x + B \cos x) + e^x(A \cos x - B \sin x)) + 3(e^x(A \sin x + B \cos x)) = 13e^x \cos x$$

Osszuk el az egyenletet az exponenciális függvénnyel. Megtehetjük, hiszen sehol sem zérus.

$$4(A \sin x + B \cos x + A \cos x - B \sin x) + 3(A \sin x + B \cos x) = 13 \cos x$$

Bontsuk fel a zárójeleket, és vonjuk össze az egyforma függvényt tartalmazó tagokat.

$$(7A - 4B) \sin x + (4A + 7B) \cos x = 13 \cos x$$

Ebből az egyenletből a következő egyenletrendszer írható fel.

$$7A - 4B = 0 \text{ (a sin-os tagok egyenlőségéből)}$$

$$4A + 7B = 13 \text{ (a cos-os tagok egyenlőségéből)}$$

Az első egyenlet hétszereséhez adjuk hozzá a második egyenlet négyszeresét.

$$7(7A - 4B) + 4(4A + 7B) = 7 \cdot 0 + 4 \cdot 13 \Rightarrow 65A = 52 \Rightarrow A = \frac{52}{65} = \frac{4}{5}$$

Ezt célszerű az első egyenletbe visszahelyettesíteni, s kapjuk: $B = \frac{7}{5}$.

Az együtthatók ismeretében felírjuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását, majd az általános megoldást is.

$$y_p = \frac{4}{5}e^x \sin x + \frac{7}{5}e^x \cos x \Rightarrow y = y_h + y_p = ce^{-\frac{3}{4}x} + \frac{4}{5}e^x \sin x + \frac{7}{5}e^x \cos x$$

9. feladat Adjunk meg három olyan függvényt, mely megoldása az $y' - 7y = 2e^{7x}$

differenciálegyenletnek!

Megoldás: Járjunk el úgy mint az 5. feladat megoldása során, azaz határozzuk meg az

általános megoldást, s abban adjunk a konstansnak különböző értékeket. Kezdjük a homogén egyenlet megoldásával.

$$\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda = 7 \Rightarrow y_h = ce^{7x}$$

A homogén egyenlet megoldásában szereplő függvény most azonos a zavaró függvényben álló függvénnyel, tehát rezonancia van. A próbafüggvénybe tehát nem egyszerűen az exponenciális függvényt kell írunk, hanem azt szoroznunk kell x -szel.

$$y_p = Axe^{7x} \Rightarrow y'_p = Ae^{7x} + 7Axe^{7x}$$

Helyettesítsük ezeket a differenciálegyenletbe.

$$y' - 7y = 2e^{7x} \Rightarrow (Ae^{7x} + 7Axe^{7x}) - 7Axe^{7x} = 2xe^{7x} \Rightarrow Ae^{7x} = 2e^{7x} \Rightarrow A = 2$$

Mivel csak egy határozatlan együtthatónk volt, nem kellett egyenletrendszert felírni.

Az együttható ismeretében megadjuk először a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását, majd általános megoldását.

$$y_p = 2xe^{7x} \Rightarrow y = y_h + y_p = ce^{7x} + 2xe^{7x}$$

A három megoldás közül az egyik lehet az előbbieken meghatározott partikuláris megoldás, a másik kettőt pedig úgy kapjuk, hogy C -nek konkrét értékeket adunk. Legyen ez a két érték például a következő: 1, 4. A három megoldás így a következő:

$$y_1 = y_p = 2xe^{7x}, \quad y_2 = e^{7x} + 2xe^{7x}, \quad y_3 = 4e^{7x} + 2xe^{7x}.$$

10. feladat Oldjuk meg az $y' + 4y = 2e^{2x} - e^{-4x}$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Határozzuk meg a homogén egyenlet megoldását!

$$\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -4 \Rightarrow y_h = ce^{-4x}$$

Mivel a kapott megoldásban szereplő függvény (e^{-4x}) megegyezik a jobb oldal egyik tagjában álló függvénnyel, így rezonancia van. A próbafüggvény felírásakor tehát a rezonanciában álló

részhez tartozó próbafüggvényt meg kell szorozni x -szel. Vigyázzunk, nem az egész próbafüggvényt kell szorozni, csak a rezonanciában álló részhez tartozó függvényt.

$$y_p = Ae^{2x} + Bxe^{-4x} \Rightarrow y'_p = 2Ae^{2x} + Be^{-4x} - 4Bxe^{-4x}$$

Ezeket helyettesítsük be a differenciálegyenletbe.

$$y' + 4y = 2e^{2x} - e^{-4x} \Rightarrow (2Ae^{2x} + Be^{-4x} - 4Bxe^{-4x}) + 4(Ae^{2x} + Bxe^{-4x}) = 2e^{2x} - e^{-4x}$$

Bontsuk fel a zárójeleket, és vonjunk össze.

$$6Ae^{2x} + Be^{-4x} = 2e^{2x} - e^{-4x}$$

Ebből két egyenletet kapunk.

$$6A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{3} \text{ (az } e^{2x} \text{-es tagok egyenlőségéből)}$$

$$B = -1 \text{ (az } e^{-4x} \text{-es tagok egyenlőségéből)}$$

Ezután felírunk egy partikuláris megoldást, végül pedig az általános megoldást is.

$$y_p = \frac{1}{3}e^{2x} - xe^{-4x} \Rightarrow y = y_h + y_p = ce^{-4x} + \frac{1}{3}e^{2x} - xe^{-4x}$$

Ellenőrző kérdések:



1. kérdés: Mi az $y' - 3y = 9x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = ce^{-3x} - 4x + 3$
- ☐ $y = ce^{-3x} - x + 4$
- ☐ $y = ce^{3x} - 3x - 1$
- ☐ $y = ce^{3x} + 2x - 5$



2. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik a $2y' + y = x^2 - 2$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = ce^{\frac{x}{2}} + 3x^2 - x + 5$
- ☐ $y = ce^{\frac{x}{2}} - x^2 + 3x - 1$
- ☐ $y = ce^{-\frac{x}{2}} + 2x^2 - 3x - 2$
- ☐ $y = ce^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 4x + 6$



3. kérdés: Melyik függvény az $y' + 6y = 10\sin 2x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = ce^{-6x} + \frac{3}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x$
- ☐ $y = ce^{-6x} - \frac{3}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x$
- ☐ $y = ce^{-6x} + \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x$
- ☐ $y = ce^{-6x} - \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x$



4. kérdés: A felsorolt függvények közül, melyik a $3y' - y = \cos x - 2\sin x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = ce^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$
- ☐ $y = ce^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{3}{2}\cos x$
- ☐ $y = ce^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$
- ☐ $y = ce^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{3}{2}\cos x$



5. kérdés: A következő függvények közül melyik megoldása az $y' - y = 6e^{3x}$ differenciálegyenletnek?

- ☐ $y = 2e^x - 3e^{3x}$
- ☐ $y = 3e^x - 2e^{3x}$
- ☐ $y = -2e^x + 3e^{3x}$
- ☐ $y = -3e^x + 2e^{3x}$



6. kérdés: Mi az általános megoldása a $4y' + y = e^{3x} + x$ differenciálegyenletnek?



$$y = ce^{-\frac{x}{4}} + \frac{1}{7}e^{3x} - x + 3$$



$$y = ce^{-\frac{x}{4}} + \frac{1}{13}e^{3x} + x - 4$$



$$y = ce^{-\frac{x}{4}} + \frac{1}{13}e^{3x} - x + 3$$



$$y = ce^{-\frac{x}{4}} + \frac{1}{7}e^{3x} + x - 4$$



7. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik megoldása a $3y' - 2y = 4xe^{2x}$ differenciálegyenletnek?



$$y = e^{\frac{2}{3}x} - xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}$$



$$y = e^{\frac{2}{3}x} + xe^{2x} + \frac{3}{4}e^{2x}$$



$$y = e^{\frac{2}{3}x} + xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}$$



$$y = e^{\frac{2}{3}x} - xe^{2x} + \frac{3}{4}e^{2x}$$



8. kérdés: Melyik függvény a $3y' - 4y = 5e^x \sin x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = ce^{\frac{4}{3}x} - \frac{3}{2}e^x \sin x - \frac{1}{2}e^x \cos x$
- ☐ $y = ce^{\frac{4}{3}x} + \frac{1}{2}e^x \sin x - \frac{3}{2}e^x \cos x$
- ☐ $y = ce^{\frac{4}{3}x} + \frac{3}{2}e^x \sin x - \frac{1}{2}e^x \cos x$
- ☐ $y = ce^{\frac{4}{3}x} - \frac{1}{2}e^x \sin x - \frac{3}{2}e^x \cos x$



9. kérdés: A következő függvények közül melyik megoldása az $y' + 5y = 3e^{-5x}$ differenciálegyenletnek?

- ☐ $y = 3e^{-5x}$
- ☐ $y = 3xe^{-5x}$
- ☐ $y = xe^{-5x} - 3e^{-5x}$
- ☐ $y = 3e^{-5x} - xe^{-5x}$



10. kérdés: Mi az $y' - 5y = 2e^{5x} - e^{3x}$ differenciálegyenlet általános megoldása?



$$y = 2e^{5x} + cxe^{5x} + \frac{1}{2}e^{3x}$$



$$y = ce^{5x} + 2xe^{5x} + \frac{1}{2}e^{3x}$$



$$y = 2e^{5x} + cxe^{5x} + \frac{1}{2}xe^{3x}$$



$$y = ce^{5x} + 2xe^{5x} + \frac{1}{2}xe^{3x}$$

Tanulási cél: Elsajátítani az másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldásának felírási módját, a karakterisztikus egyenlet gyökeinek ismeretében.

Tananyag:

Tankönyv: Horváth Zoltán: Bevezetés a differenciálegyenletek megoldásába

Fejezet: 3.1.

Elméleti összefoglaló:

Az $y'' + py' + qy = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$ alakú differenciálegyenleteket másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenleteknek nevezzük.

Ezek megoldását ugyanúgy $y = ce^{\lambda x}$ alakban keressük, mint ahogyan ezt az elsőrendű egyenleteknél tettük. Vegyük ennek a függvénynek az első és második deriváltját.

$$y' = \lambda ce^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 ce^{\lambda x}$$

Helyettesítsük be ezeket a differenciálegyenletbe.

$$y'' + py' + qy = 0 \Rightarrow \lambda^2 ce^{\lambda x} + p\lambda ce^{\lambda x} + qce^{\lambda x} = 0 \Rightarrow ce^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$$

Ezt az egyenletet eloszthatjuk $ce^{\lambda x}$ -szel, mert $e^{\lambda x}$ nem nulla, a $c = 0$ esetben pedig nyilvánvalóan megoldást kapunk, majd feltesszük, hogy $c \neq 0$. Így a $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, melyet a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének nevezünk. Az $y = ce^{\lambda x}$ függvény akkor megoldása a differenciálegyenletnek, ha λ gyöke ezen karakterisztikus egyenletnek. Ezt az egyenletet ismét megkaphatjuk formálisan is, ha a differenciálegyenletben y'' helyére λ^2 -et, y' helyére pedig λ -t írunk, y -t pedig elhagyjuk az egyenletből, s csak az együtthatóját tartjuk meg.

Három esetet kell megkülönböztetnünk aszerint, hogy a másodfokú egyenletnek két különböző valós, egy valós (kétszeres), két komplex gyöke van.

1. Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke (λ_1, λ_2) van, akkor a differenciálegyenlet általános megoldása a következő:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2. Ha a karakterisztikus egyenletnek egy (kétszeres) valós gyöke (λ) van, akkor a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x} (c_1 + c_2 x).$$

3. Ha a karakterisztikus egyenletnek két komplex gyöke (λ_1, λ_2) van, akkor ezek konjugált komplex számok, tehát $\lambda_1 = \alpha + \omega i$, $\lambda_2 = \alpha - \omega i$ alakúak. A differenciálegyenlet általános megoldása ekkor a következő:

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)).$$

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Határozzuk meg az $y'' + y' - 12y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Írjuk fel a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét, s oldjuk meg.

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda_{1, 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

Mivel két valós gyökünk van, $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -4$, a differenciálegyenlet általános megoldását $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ alakban kapjuk. A konkrét feladat megoldása tehát a következő:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}.$$

2. feladat Oldjuk meg az $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ kezdeti érték feladatot!

Megoldás: A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 + 3\lambda = 0$.

Ennek megoldásához felesleges a megoldóképletbe helyettesíteni, mert λ kiemelhető.

$$\lambda(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3$$

Ismét két valós gyököt kaptunk, ezért az $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ formulába helyettesítünk.

Az egyenlet általános megoldása: $y = c_1 e^{0 \cdot x} + c_2 e^{-3x} = c_1 + c_2 e^{-3x}$.

A kezdeti érték feladat megoldásához, vegyük ennek a deriváltját.

$$y' = -3c_2 e^{-3x}$$

Helyettesítsük be y -ba és y' -ba a kezdeti feltételekben szereplő adatokat.

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + c_2 e^{-3 \cdot 0} \Rightarrow 1 = c_1 + c_2$$

$$y'(0) = 3 \Rightarrow 3 = -3c_2 e^{-3 \cdot 0} \Rightarrow 3 = -3c_2 \Rightarrow c_2 = -1$$

Visszahelyettesítve az első egyenletbe: $c_1 = 2$.

A kezdeti érték feladat megoldása: $y_0 = 2 - e^{-3x}$.

Megjegyzés: A differenciálegyenlet általános megoldása más úton is meghatározható. Ha mindkét oldalt integráljuk, akkor visszavezethetjük az egyenletet, egy paraméteres elsőrendű differenciálegyenletre.

$$\int (y'' + 3y') dx = \int dx \Rightarrow y' + 3y = c$$

Ezt az elsőrendű differenciálegyenletet pedig a szokott módon megoldjuk.

3. feladat Keressük meg az $y'' - 10y' + 25y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$.

A bal oldalon teljes négyzetet ismerhetünk fel.

$$(\lambda - 5)^2 = 0$$

Így egy valós gyök van csak: $\lambda = 5$.

Most az $y = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x)$ képletbe kell helyettesíteni.

A differenciálegyenlet általános megoldása: $y = e^{5x}(c_1 + c_2 x)$.

Megjegyzés: A karakterisztikus egyenlet gyökét a megoldóképlettel is meghatározhattuk volna.

Ha csak egy valós gyök van, akkor a képletben a gyök alatti kifejezés, azaz a diszkrimináns zérus.

4. feladat Határozzuk meg az $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ kezdeti érték feladat megoldását!

Megoldás: Írjuk fel először a karakterisztikus egyenletet.

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda + 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$$

Az egyenletnek egy valós gyöke van, ismét az $y = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x)$ képletbe helyettesítünk.

Így a differenciálegyenlet általános megoldása: $y = e^{-3x}(c_1 + c_2 x)$.

A kezdeti érték feladat megoldásához, vegyük ennek a deriváltját.

$$y' = -3e^{-3x}(c_1 + c_2 x) + e^{-3x}c_2 = e^{-3x}(-3c_1 - 3c_2 x + c_2)$$

Helyettesítsük az általános megoldásba, és a deriváltjába a kezdeti feltételekben megadott értékpárokat.

$$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = e^{-3 \cdot 0}(c_1 + c_2 \cdot 0) \Rightarrow c_1 = 2$$

$$y'(0) = -1 \Rightarrow -1 = e^{-3 \cdot 0}(-3c_1 - 3c_2 \cdot 0 + c_2) \Rightarrow -1 = -3c_1 + c_2$$

Helyettesítsük c_1 értékét a második egyenletbe, így kapjuk: $c_2 = 5$.

A differenciálegyenlet azon partikuláris megoldása, mely eleget tesz a kezdeti feltételeknek:

$$y_0 = e^{-3x}(2 + 5x).$$

5. feladat Oldjuk meg az $y'' - 6y' + 34y = 0$ differenciálegyenletet!

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet a következő: $\lambda^2 - 6\lambda + 34 = 0$.

$$\lambda_{1, 2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 34}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{6 \pm 10i}{2} = \begin{cases} 3 + 5i \\ 3 - 5i \end{cases}$$

Két konjugált komplex gyök van, így az $y = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x))$ képletbe helyettesítünk, amelyben α a komplex számok valós része, ω pedig a képzetes rész. Most tehát $\alpha = 3$, $\omega = 5$.

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát: $y = e^{3x} (c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)$.

6. feladat Mi a megoldása az $y'' + 64y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 16$ kezdeti érték feladatnak?

Megoldás: Írjuk fel a karakterisztikus egyenletet.

$$\lambda^2 + 64 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -64 \Rightarrow \lambda = \sqrt{-64} \Rightarrow \lambda_{1, 2} = \pm 8i$$

Ismét konjugált komplex gyököket kaptunk, megint az

$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x))$ képletbe kell helyettesíteni. Jelen esetben a valós és képzetes rész: $\alpha = 0$, $\omega = 8$.

A differenciálegyenlet általános megoldása: $y = c_1 \cos 8x + c_2 \sin 8x$.

A kezdeti érték feladat megoldásához szükségünk van ennek deriváltjára.

$$y' = -8c_1 \sin 8x + 8c_2 \cos 8x$$

Helyettesítsük be a kezdeti feltételekből az adatokat.

$$y(0) = 5 \Rightarrow 5 = c_1 \cos 8 \cdot 0 + c_2 \sin 8 \cdot 0 \Rightarrow c_1 = 5$$

$$y'(0) = 16 \Rightarrow 16 = -8c_1 \sin 8 \cdot 0 + 8c_2 \cos 8 \cdot 0 \Rightarrow 16 = 8c_2 \Rightarrow c_2 = 2$$

A kezdeti érték feladat megoldása: $y_0 = 5 \cos 8x + 2 \sin 8x$.

7. feladat Egy $m = 10 \text{ kg}$ tömegű testet $D = 10 \frac{N}{m}$ rugóállandójú csavarrugóra

akasztunk. A mozdulatlanul függő testet meglökjük lefelé $v_0 = 0.5 \frac{m}{s}$ kezdősebességgel.

Adjuk meg a test kitérését az idő függvényében, ha a felfelé mutató irányt tekintjük pozitívnak!

Megoldás: A test mozgását leíró differenciálegyenlet Newton 2. törvénye, azaz $F = ma$. A testre a rugó fejt ki erőt, s ez az erő arányos a test kitérésével, de azzal ellentétes. Ezt írjuk le az $F = -Dy$ összefüggéssel, melyben y a test kitérése. A kitérés változik az időben, tehát $y = y(t)$. (Most t felel meg x -nek.) A másik oldalon a gyorsulás nem más, mint a kitérés idő szerinti második deriváltja, azaz $a = y''$. (A fizikusok ezt $a = \ddot{y}$ alakban írják.) Így jutunk a $-Dy = my''$ differenciálegyenlethez. Ennek egy átrendezett alakja $y'' + \frac{D}{m}y = 0$.

Az egyenlethez kezdeti feltételek is tartoznak.

Mert a test kezdetben az egyensúlyi helyzetben volt, ezért kezdeti kitérése zérus, azaz

$$y(0) = 0.$$

Mivel a sebesség a kitérés-idő függvény első deriváltja, azaz $v = y'$, ezért $y'(0) = -0.5$.

. Az előjel azért van, mert a felfelé irány a pozitív, s a testet lefelé lökjük meg.

Tulajdonképpen egy kezdeti érték feladatot kell megoldanunk.

Oldjuk meg a differenciálegyenletet paraméteresen, s majd csak a megoldásba helyettesítsük be a konkrét adatokat.

Írjuk fel először a karakterisztikus egyenletet, s oldjuk meg. Mivel D, m pozitívak, ezért $-\frac{D}{m}$

negatív, s két komplex gyököt kapunk.

$$\lambda^2 + \frac{D}{m} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{D}{m} \Rightarrow \lambda = \sqrt{-\frac{D}{m}} \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{D}{m}} i$$

Amint az előző két feladatban, most is az $y = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x))$ képletbe helyettesítünk. A két komplex gyök valós, illetve képzetes része:

$$\alpha = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$y = e^{0 \cdot x} \left(c_1 \cos \left(\sqrt{\frac{D}{m}} t \right) + c_2 \sin \left(\sqrt{\frac{D}{m}} t \right) \right) = c_1 \cos \left(\sqrt{\frac{D}{m}} t \right) + c_2 \sin \left(\sqrt{\frac{D}{m}} t \right)$$

Helyettesítsük be az adatokat. Figyeljünk, a tömeget át kell váltani, $m = 0.1 \text{ kg}$.

$$y = c_1 \cos \left(\sqrt{\frac{10}{0.1}} t \right) + c_2 \sin \left(\sqrt{\frac{10}{0.1}} t \right) = c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t$$

A megoldásban szereplő konstansokat a kezdeti feltételekből határozzuk meg.

Ehhez vegyük a megoldás deriváltját.

$$y' = -10c_1 \sin 10t + 10c_2 \cos 10t$$

Helyettesítsük be a kezdeti feltételekben megadott értékeket.

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 \cos 10 \cdot 0 + c_2 \sin 10 \cdot 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y'(0) = -0.5 \Rightarrow -0.5 = -10c_1 \sin 10 \cdot 0 + 10c_2 \cos 10 \cdot 0 \Rightarrow -0.5 = 10c_2 \Rightarrow c_2 = -0.05$$

A test kitérését az idő függvényben tehát az $y_0 = -0.05 \sin 10t$ függvény írja le.

Megjegyzés: Amikor differenciálegyenletekkel modellezzük a valóságban lejátszódó folyamatokat, akkor a differenciálegyenlet megoldása csak az első lépés. Miután megvan a jelenséget leíró függvény, azután azt elemezni kell.

Jelen esetben is több információt hordoz magában ez a megoldás. Látható, hogy a megoldás időben periodikus, mert a sin függvény periodikus. (Persze ez nem meglepő, hiszen tapasztalataink szerint a rugóra akasztott test rezgőmozgást végez.)

Kiolvasható a test legnagyobb kitérése, azaz a rezgés amplitúdója, ami most

$A = 0.05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$. Ez pedig azt jelenti, valóban kialakul ez a rezgés, mert a test a ráakasztásnál 10 cm -rel nyújtotta meg a rúgót, így a rugó a mozgás során végig feszes marad. Ha túl nagyot lökünk a testen, akkor a felfelé mozgás során már összenyomni akarja a rugót, de a rugó ilyenkor inkább meghajlik, s a rezgés nem lesz harmonikus.

Meghatározható a rezgés periódusideje is. Mivel a sin függvény periódusa 2π , s a periódusidő elteltével pontosan egy rezgés ment végbe, ezért a $2\pi = 10T$ egyenlőségnek kell teljesülni, amiből $T = \frac{\pi}{5} \text{ s}$.

Az ilyen gyakorlati példákkal azt szeretnénk megmutatni, hogy a matematika nem csak önmagáért van, hanem fontos szerepe van a valós életben lejátszódó jelenségek leírásában.

Ellenőrző kérdések:



1. kérdés: Mi az általános megoldása az $y'' - 3y' - 10y = 0$ differenciálegyenletnek?

- ☐ $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{5x}$
- ☐ $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x}$
- ☐ $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-5x}$
- ☐ $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x}$



2. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $y'' - 4y' = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 4$ kezdeti érték feladat megoldása?

- ☐ $y = 5 - e^{-4x}$
- ☐ $y = 5 + e^{-4x}$
- ☐ $y = 3 - e^{4x}$
- ☐ $y = 3 + e^{4x}$



3. kérdés: Melyik függvény az általános megoldása az $y'' + 14y' + 49y = 0$ differenciálegyenletnek?

- ☐ $y = c_1 e^{7x} + c_2 x e^{7x}$
- ☐ $y = c_1 e^{-7x} + c_2 x e^{7x}$
- ☐ $y = c_1 e^{7x} + c_2 x e^{-7x}$
- ☐ $y = c_1 e^{-7x} + c_2 x e^{-7x}$



4. kérdés: Mi az $y'' - 8y' + 16y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$ kezdeti érték feladat megoldása?

- ☐ $y = 3e^{4x} + 2xe^{4x}$
- ☐ $y = 3e^{4x} - 7xe^{4x}$
- ☐ $y = 3e^{-4x} + 2xe^{-4x}$
- ☐ $y = 3e^{-4x} - 7xe^{-4x}$



5. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $y'' + 4y' + 53y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = e^{2x}(c_1 \cos 7x + c_2 \sin 7x)$
- ☐ $y = e^{7x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$
- ☐ $y = e^{-2x}(c_1 \cos 7x + c_2 \sin 7x)$
- ☐ $y = e^{-7x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$



6. kérdés: Melyik függvény az $y'' + 36y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -18$ kezdeti érték feladat megoldása?

- ☐ $y = 2\cos 6x - 3\sin 6x$
- ☐ $y = 3\cos 6x - 2\sin 6x$
- ☐ $y = -2\cos 6x - 3\sin 6x$
- ☐ $y = -3\cos 6x - 2\sin 6x$

Tanulási cél: A próbafüggvény-módszer alkalmazásának elsajátítása, másodrendű differenciálegyenletek esetében.

Tananyag:

Tankönyv: Horváth Zoltán: Bevezetés a differenciálegyenletek megoldásába

Fejezet: 3.1.2.

Elméleti összefoglaló:

Az $y'' + py' + qy = b(x)$, $p, q \in \mathbb{R}$ alakú differenciálegyenleteket, melyekben $b(x)$ nem az azonosan 0 konstans függvény, másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletnek nevezzük.

Ha a $b(x)$ függvény polinom, $e^{\alpha x}$, $\sin \beta x$, $\cos \beta x$, vagy ezek számszorosainak összege, szorzata, akkor az ilyen differenciálegyenletek ugyanolyan módon oldhatók meg, mint a hasonló elsőrendű differenciálegyenletek, melyeknek megoldási módszerét a 2.2.5. leckében ismertettük.

Az eljárást nagy vonalakban ismételjük át.

Először megoldjuk az egyenlethez tartozó homogén egyenletet, az előző leckében ismertetett módon.

Az egyenletben szereplő zavaró függvény mintájára felírunk egy próbafüggvényt, határozatlan együtthatókkal.

Ezt a függvényt deriváltjaival együtt behelyettesítjük a differenciálegyenletbe.

Az így kapott egyenletet egyenletrendszerre alakítjuk, felírva az azonos függvényt tartalmazó tagok egyenlőségét.

Az egyenletrendszer megoldása megadja a határozatlan együtthatók értékét, melyekből felírjuk az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását.

Az inhomogén egyenlet általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának, s az előzőekben meghatározott partikuláris megoldásnak az összegeként kapjuk.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat Oldjuk meg az $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$ kezdeti érték feladatot!

Megoldás: Először írjuk fel, és oldjuk meg a karakterisztikus egyenletet.

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

A homogén egyenlet megoldása tehát: $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.

A zavaró függvény másodfokú polinom, így a próbafüggvény: $y_p = Ax^2 + Bx + C$.

Állítsuk elő ennek első és második deriváltját.

$$y'_p = 2Ax + B, \quad y''_p = 2A$$

Helyettesítsük be ezeket a differenciálegyenletbe.

$$y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3 \Rightarrow 2A + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 3$$

Rendezzük x hatványai szerint.

$$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + (2A + B - 2C) = 2x^2 - 3$$

Írjuk fel az egyforma függvényt tartalmazó tagok egyenlőségéből az egyenletrendszert.

$$-2A = 2 \text{ (a másodfokú tagok egyenlőségéből)}$$

$$2A - 2B = 0 \text{ (az elsőfokú tagok egyenlőségéből)}$$

$$2A + B - 2C = -3 \text{ (a konstansok egyenlőségéből)}$$

Ezen egyenletrendszer megoldása: $A = -1, \quad B = -1, \quad C = 0$.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása: $y_p = -x^2 - x$.

A differenciálegyenlet általános megoldása: $y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - x^2 - x$.

A kezdeti érték feladat megoldásához vegyük ennek deriváltját.

$$y' = c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x} - 2x - 1$$

Helyettesítsük be a kezdeti feltételek adatait.

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = c_1 e^0 + c_2 e^{-2 \cdot 0} - 0^2 - 0 \Rightarrow 1 = c_1 + c_2$$

$$y'(0) = 6 \Rightarrow 6 = c_1 e^0 - 2c_2 e^{-2 \cdot 0} - 2 \cdot 0 - 1 \Rightarrow 7 = c_1 - 2c_2$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $c_1 = 3$, $c_2 = -2$.

A kezdeti érték feladat megoldása: $y_0 = 3e^x - 2e^{-2x} - x^2 - x$.

2. feladat Határozzuk meg az $y'' + 2y' + 2y = 17 \cos 3x$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Kezdjük a karakterisztikus egyenlet megoldásával.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} -1 + i \\ -1 - i \end{cases}$$

A homogén egyenlet általános megoldása: $y_h = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$.

Írjuk fel a próbafüggvényt. Ugyan a zavaró függvényben csak egy $\cos$ van, de a próbafüggvényben a $\sin$ és a $\cos$ mindegyikének szerepelnie kell.

$$y_p = A \sin 3x + B \cos 3x$$

Határozzuk meg y'_p -t és y''_p -t.

$$y'_p = 3A \cos 3x - 3B \sin 3x, \quad y''_p = -9A \sin 3x - 9B \cos 3x$$

Helyettesítsünk a differenciálegyenletbe.

$$y'' + 2y' + 2y = 17\cos 3x \Rightarrow$$

$$(-9A\sin 3x - 9B\cos 3x) + 2(3A\cos 3x - 3B\sin 3x) + 2(A\sin 3x + B\cos 3x) = 17\cos 3x$$

Csoportosítsuk a tagokat aszerint, hogy milyen függvényt tartalmaznak.

$$(-9A - 6B + 2A)\sin 3x + (-9B + 6A + 2B)\cos 3x = 17\cos 3x \Rightarrow$$

$$(-7A - 6B)\sin 3x + (6A - 7B)\cos 3x = 17\cos 3x$$

Az egyenletet alakítsuk egyenletrendszeré, felírva az egyforma függvények együtthatóinak egyenlőségét.

$$-7A - 6B = 0 \text{ (a sin-os tagok egyenlőségéből)}$$

$$6A - 7B = 17 \text{ (a cos-os tagok egyenlőségéből)}$$

Az első egyenlet hatszorosához adjuk hozzá a második egyenlet hétszeresét.

$$6(-7A - 6B) + 7(6A - 7B) = 6 \cdot 0 + 7 \cdot 17 \Rightarrow -85B = 119 \Rightarrow B = -\frac{119}{85} = -\frac{7}{5}$$

Ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk: $A = \frac{6}{5}$.

Ebből az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása: $y_p = \frac{6}{5}\sin 3x - \frac{7}{5}\cos 3x$.

Az általános megoldás pedig:

$$y = y_h + y_p = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + \frac{6}{5}\sin 3x - \frac{7}{5}\cos 3x.$$

3. feladat Keressük meg az $y'' - 3y' - 4y = 6e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -18$ kezdeti érték feladat megoldását!

Megoldás: Írjuk fel a karakterisztikus egyenletet, és oldjuk meg.

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Így a homogén egyenlet általános megoldása: $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$.

A zavaró függvény egy exponenciális, ezért a próbafüggvény is ilyen lesz.

$$y_p = A e^{2x}$$

Vegyük ennek első és második deriváltját.

$$y'_p = 2A e^{2x}, \quad y''_p = 4A e^{2x}$$

Helyettesítsünk a differenciálegyenletben y'' , y' és y helyére.

$$y'' - 3y' - 4y = 6e^{2x} \Rightarrow$$

$$4A e^{2x} - 3 \cdot 2A e^{2x} - 4 \cdot A e^{2x} = 6e^{2x} \Rightarrow -6A e^{2x} = 6e^{2x} \Rightarrow A = -1$$

(Csak egyetlen határozatlan együtthatónk volt, nem kellett egyenletrendszert felírni.)

A partikuláris megoldás tehát a következő: $y_p = -e^{2x}$.

A differenciálegyenlet általános megoldása: $y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - e^{2x}$.

Határozzuk meg ennek deriváltját, mert a kezdeti érték feladat megoldásához ez is szükséges.

$$y' = -c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{4x} - 2e^{2x}$$

Helyettesítsük be a kezdeti feltételekben megadott értékeket.

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 e^{-0} + c_2 e^{4 \cdot 0} - e^{2 \cdot 0} \Rightarrow 0 = c_1 + c_2 - 1$$

$$y'(0) = -18 \Rightarrow -18 = -c_1 e^{-0} + 4c_2 e^{4 \cdot 0} - 2e^{2 \cdot 0} \Rightarrow -18 = -c_1 + 4c_2 - 2$$

Az így kapott egyenletrendszer megoldása: $c_1 = 4$, $c_2 = -3$.

A kezdeti érték feladat megoldása: $y_0 = 4e^{-x} - 3e^{4x} - e^{2x}$.

4. feladat Oldjuk meg az $y'' - y' - 2y = 2e^{3x} - 4x^2 + 8x$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Először határozzuk meg a karakterisztikus egyenlet gyökeit.

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Ezekből a homogén egyenlet általános megoldása: $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$.

A jobb oldal egy exponenciális függvény és egy másodfokú polinom összege, ugyanezt kell írunk a próbafüggvénybe is. Bár a polinomban nincs konstans tag, a próbafüggvényben ilyen tagnak is kell lennie.

$$y_p = Ae^{3x} + Bx^2 + Cx + D$$

Deriváljuk kétszer ezt a függvényt.

$$y'_p = 3Ae^{3x} + 2Bx + C, \quad y''_p = 9Ae^{3x} + 2B$$

Helyettesítsük be ezeket a differenciálegyenletbe.

$$y'' - y' - 2y = 2e^{3x} - 4x^2 + 8x \Rightarrow$$

$$(9Ae^{3x} + 2B) - (3Ae^{3x} + 2Bx + C) - 2(Ae^{3x} + Bx^2 + Cx + D) = 2e^{3x} - 4x^2 + 8x$$

Csoportosítsuk a tagokat a bennük szereplő függvények szerint.

$$4Ae^{3x} - 2Bx^2 + (-2B - 2C)x + (2B - C - 2D) = 2e^{3x} - 4x^2 + 8x$$

Írjuk fel az azonos függvényt tartalmazó tagok együtthatóinak egyenlőségét.

$$4A = 2 \text{ (az exponenciális tagok egyenlőségéből)}$$

$$-2B = -4 \text{ (a másodfokú tagok egyenlőségéből)}$$

$$-2B - 2C = 8 \text{ (az elsőfokú tagok egyenlőségéből)}$$

$$2B - C - 2D = 0 \text{ (a konstansok egyenlőségéből)}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $A = \frac{1}{2}, \quad B = 2, \quad C = -6, \quad D = 5$.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása: $y_p = \frac{1}{2}e^{3x} + 2x^2 - 6x + 5$.

Az általános megoldás: $y = y_h + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}e^{3x} + 2x^2 - 6x + 5$.

5. feladat Határozzuk meg az $y'' + 9y = 13xe^{2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Szokás szerint a karakterisztikus egyenlet megoldásával kezdjük.

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -9 \Rightarrow \lambda = \sqrt{-9} \Rightarrow \lambda = \begin{Bmatrix} 3i \\ -3i \end{Bmatrix}$$

A homogén egyenlet általános megoldása: $y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$.

Az egyenlet jobb oldalán most egy exponenciális függvény és egy elsőfokú polinom szorzata áll, így ugyanilyen alakú próbafüggvényt írunk fel. Vigyázzunk arra, hogy feleslegesen ne szerepeltessünk határozatlan együtthatót.

$$y_p = e^{2x}(Ax + B)$$

Határozzuk meg ennek első és második deriváltját.

$$y'_p = 2e^{2x}(Ax + B) + e^{2x}A = e^{2x}(2Ax + A + 2B)$$

$$y''_p = 2e^{2x}(2Ax + A + 2B) + e^{2x}2A = e^{2x}(4Ax + 4A + 4B) = 4e^{2x}(Ax + A + B)$$

Helyettesítsünk a differenciálegyenletbe.

$$y'' + 9y = 13xe^{2x} \Rightarrow 4e^{2x}(Ax + A + B) + 9e^{2x}(Ax + B) = 13xe^{2x}$$

Osszuk az exponenciális függvénnyel, és rendezzünk x hatványai szerint.

$$4(Ax + A + B) + 9(Ax + B) = 13x \Rightarrow 13Ax + (4A + 13B) = 13x$$

Az azonos fokszámú tagok együtthatóinak egyenlőségéből egyenletrendszert kapunk.

$$13A = 13 \text{ (az elsőfokú tagok egyenlőségéből)}$$

$$4A + 13B = 0 \text{ (a konstansok egyenlőségéből)}$$

Ennek megoldása: $A = 1, \quad B = -\frac{4}{13}.$

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása: $y_p = e^{2x}\left(x - \frac{4}{13}\right).$

Az általános megoldás: $y = y_h + y_p = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + e^{2x}\left(x - \frac{4}{13}\right).$

6. feladat Mi az általános megoldása az $y'' + 2y' + y = 5e^x \sin x$ differenciálegyenletnek?

Megoldás: Oldjuk meg a karakterisztikus egyenletet!

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Most csak egy valós gyököt kaptunk, így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

A zavaró függvény egy exponenciális és egy sinus függvény szorzata, így a próbafüggvény a nekik megfelelő próbafüggvények szorzata. Az egyik tényező ezért exponenciális függvény, a másik pedig sin és cos összege lesz. Feleslegesen most se írjunk határozatlan együtthatót a függvénybe.

$$y_p = e^x (A \sin x + B \cos x)$$

Határozzuk meg y_p' -t és y_p'' -t.

$$y_p' = e^x (A \sin x + B \cos x) + e^x (A \cos x - B \sin x) = e^x ((A-B) \sin x + (A+B) \cos x)$$

$$y_p'' = e^x ((A-B) \sin x + (A+B) \cos x) + e^x ((A-B) \cos x - (A+B) \sin x) = e^x (-2B \sin x + 2A \cos x)$$

Helyettesítsük be ezeket a differenciálegyenletbe.

$$y_p'' + 2y_p' + y_p = 5e^x \sin x \Rightarrow$$

$$e^x (-2B \sin x + 2A \cos x) + 2e^x ((A-B) \sin x + (A+B) \cos x) + e^x (A \sin x + B \cos x) = 5e^x \sin x$$

Osszuk el az egyenletet az exponenciális függvénnyel.

$$(-2B \sin x + 2A \cos x) + 2((A-B) \sin x + (A+B) \cos x) + (A \sin x + B \cos x) = 5 \sin x$$

A tagokat csoportosítsuk a bennük szereplő függvények szerint.

$$(-2B + 2(A-B) + A) \sin x + (2A + 2(A+B) + B) \cos x = 5 \sin x \Rightarrow$$

$$(3A - 4B) \sin x + (4A + 3B) \cos x = 5 \sin x$$

Írjuk fel az azonos függvényt tartalmazó tagok egyenlőségét.

$$3A - 4B = 5 \text{ (a sin-os tagok egyenlőségéből)}$$

$$4A + 3B = 0 \text{ (a cos-os tagok egyenlőségéből)}$$

Az első egyenlet háromszorosához adjuk hozzá a második egyenlet négyszeresét.

$$3(3A - 4B) + 4(4A + 3B) = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 \Rightarrow 25A = 15 \Rightarrow A = \frac{3}{5}$$

Ezt célszerű a második egyenletbe helyettesíteni, amelyből a másik együttható: $B = -\frac{4}{5}$.

A differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása: $y_p = e^x \left(\frac{3}{5} \sin x - \frac{4}{5} \cos x \right)$.

Az általános megoldás: $y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + e^x \left(\frac{3}{5} \sin x - \frac{4}{5} \cos x \right)$.

Ellenőrző kérdések:



1. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $y'' + 6y' + 10y = 10x^2 - 8x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = e^{-3x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + x^2 + 2x + 1$
- ☐ $y = e^{-3x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + x^2 - 2x - 1$
- ☐ $y = e^{-3x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + x^2 - 2x + 1$
- ☐ $y = e^{-3x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + x^2 - 2x - 1$



2. kérdés: Mi az $y'' - 5y' + 4y = 5\sin 3x$ differenciálegyenlet általános megoldása?



$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} \cos 3x + \frac{1}{10} \sin 3x$$



$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} \cos 3x - \frac{1}{10} \sin 3x$$



$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^x + \frac{1}{10} \cos 3x + \frac{3}{10} \sin 3x$$



$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^x + \frac{1}{10} \cos 3x - \frac{3}{10} \sin 3x$$



3. kérdés: Melyik függvény az $y'' - 4y' + 4y = 3e^{5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti érték feladat megoldása?



$$y = \frac{1}{3} e^{2x} + x e^{2x} + \frac{1}{3} e^{5x}$$



$$y = \frac{1}{3} e^{2x} - x e^{2x} + \frac{1}{3} e^{5x}$$



$$y = -\frac{1}{3} e^{2x} + x e^{2x} + \frac{1}{3} e^{5x}$$



$$y = -\frac{1}{3} e^{2x} - x e^{2x} + \frac{1}{3} e^{5x}$$



4. kérdés: Mi az $y'' - 2y' + 10y = 3e^{2x} + 5x$ differenciálegyenlet általános megoldása?



$$y = e^x(c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x) + \frac{1}{10}e^{2x} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{10}$$



$$y = e^x(c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x) + \frac{1}{10}e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}$$



$$y = e^x(c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x) + \frac{3}{10}e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}$$



$$y = e^x(c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x) + \frac{3}{10}e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{7}{10}$$



5. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $y'' + 4y = 25xe^x$ differenciálegyenlet általános megoldása?



$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + e^x(5x + 2)$$



$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + e^x(5x - 2)$$



$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + e^x(-5x + 2)$$



$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + e^x(-5x - 2)$$



6. kérdés: Melyik függvény az $y'' - 2y' + y = 2e^x \cos x$ differenciálegyenlet általános megoldása?



$$y = e^x(c_1 + c_2x + \cos x)$$



$$y = e^x(c_1 + c_2x + 2\cos x)$$



$$y = e^x(c_1 + c_2x - \cos x)$$



$$y = e^x(c_1 + c_2x - 2\cos x)$$

Tanulási cél: A rezonancia különböző eseteinek megismerése, a másodrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenletek körében.

Tananyag:

Tankönyv: Horváth Zoltán: Bevezetés a differenciálegyenletek megoldásába

Fejezet: 3.1.2.

Elméleti összefoglaló:

A rezonanciáról a 2.2.5. leckében egyszer már volt szó. A másodrendű egyenletek esetében akkor beszélünk rezonanciáról, ha az egyenlet jobb oldalán álló $b(x)$ függvény valamelyik tagja, együtthatótól eltekintve, megegyezik a homogén egyenlet megoldásának valamelyik tagjával. Az elsőrendű egyenletek esetében ez csak akkor fordulhatott elő, ha a zavaró függvény ugyanolyan exponenciális függvény volt, mint a homogén egyenlet megoldása. A másodrendű egyenletek körében több eset van, mert a homogén egyenlet megoldásában többféle tag is szerepelhet. Természetesen lehet rezonancia exponenciális függvények megegyezése miatt, de itt lehet rezonancia konstans,

$\sin \beta x$, $\cos \beta x$, $xe^{\alpha x}$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$, $e^{\alpha x} \cos \beta x$ egyenlőségéből is. Ilyen esetekben módosítani kell a jobb oldal alapján felírt próbafüggvényt. A rezonanciában álló függvényhez tartozó részt meg kell szorozni x -szel illetve x^2 -tel, aszerint, hogy a karakterisztikus egyenletnek az a gyöke, mely a homogén egyenlet rezonanciában álló részéhez tartozik, a karakterisztikus egyenletnek egyszeres, vagy kétszeres gyöke.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat Határozzuk meg a $3y'' + 5y' - 2y = 4x + 7e^{\frac{1}{3}x}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Írjuk fel, és oldjuk meg a karakterisztikus egyenletet!

$$3\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \\ -2 \end{array} \right.$$

A homogén egyenlet általános megoldása tehát: $y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{3}x}$.

Ezután szükségünk van a próbafüggvényre, mely a jobb oldal alapján $Ax + B + Ce^{\frac{1}{3}x}$

lenne. De a zavaró függvényben lévő $7e^{\frac{1}{3}x}$ tag, és a homogén egyenlet megoldásában található $c_2e^{\frac{1}{3}x}$ tag csak konstansban különbözik, ezért rezonancia van. A helyes próbafüggvényben a rezonanciában álló részt meg kell szorozni x -szel.

$$y_p = Ax + B + Cxe^{\frac{1}{3}x}$$

Határozzuk meg ennek első és második deriváltját.

$$y'_p = A + Ce^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{3}Cxe^{\frac{1}{3}x}$$

$$y''_p = \frac{1}{3}Ce^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{3}Ce^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{9}Cxe^{\frac{1}{3}x} = \frac{2}{3}Ce^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{9}Cxe^{\frac{1}{3}x}$$

Helyettesítsük be ezeket a differenciálegyenletbe.

$$3y'' + 5y' - 2y = 4x + 7e^{\frac{1}{3}x} \Rightarrow$$

$$3\left(\frac{2}{3}Ce^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{9}Cxe^{\frac{1}{3}x}\right) + 5\left(A + Ce^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{3}Cxe^{\frac{1}{3}x}\right) - 2(Ax + B + Cxe^{\frac{1}{3}x}) = 4x + 7e^{\frac{1}{3}x}$$

Bontsuk fel a zárójeleket, és csoportosítsunk a tagokban szereplő függvények szerint.

$$(2C + 5C)e^{\frac{1}{3}x} + \left(\frac{1}{3}C + \frac{5}{3}C - 2C\right)xe^{\frac{1}{3}x} - 2Ax + (5A - 2B) = 4x + 7e^{\frac{1}{3}x}$$

(Amint látható az $xe^{\frac{1}{3}x}$ -es tag együtthatója zérus lesz.)

$$7Ce^{\frac{1}{3}x} - 2Ax + (5A - 2B) = 4x + 7e^{\frac{1}{3}x}$$

Az egyforma függvényt tartalmazó tagok együtthatóinak meg kell egyeznie.

$$-2A = 4 \text{ (az elsőfokú tagok egyenlőségéből)}$$

$$5A - 2B = 0 \text{ (a konstansok egyenlőségéből)}$$

$$7C = 7 \text{ (az exponenciális tagok egyenlőségéből)}$$

$$\text{Ezen egyenletrendszer megoldása: } A = -2, \quad B = -5, \quad C = 1.$$

$$\text{Az egyenlet egy partikuláris megoldása: } y_p = -2x - 5 + xe^{\frac{1}{3}x}.$$

$$\text{Az általános megoldás: } y = y_h + y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{3}x} - 2x - 5 + xe^{\frac{1}{3}x}.$$

2. feladat Oldjuk meg az $y'' - 3y' = 12x + 8$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 2$ kezdeti érték feladatot!

Megoldás: Számoljuk ki a karakterisztikus egyenlet gyökeit.

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3$$

$$\text{A homogén egyenlet általános megoldása: } y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{0 \cdot x} = c_1 e^{3x} + c_2.$$

Most azért van rezonancia, mert a homogén egyenlet megoldásának egyik tagja konstans, és a zavaró függvény egyik tagja is csak egy szám. Az egyenlet jobb oldala alapján $Ax + B$ lenne a próbafüggvény, de most ezt meg kell szorozni x -szel. Mivel a rezonanciában álló konstans a zavaró polinomfüggvény egyik tagja, így a próbafüggvényben felírt egész polinom hozzá tartozik, ezért kell az egész polinomot szorozni. Ha a jobb oldalon állna egyéb tag is, például $\sin$, $\cos$, ami nem része a polinomnak, akkor a próbafüggvénynek ahhoz tartózkodó részét nem kellene szorozni.

$$\text{A helyes próbafüggvény tehát a következő: } y_p = Ax^2 + Bx.$$

Állítsuk elő ennek első és második deriváltját.

$$y'_p = 2Ax + B$$

$$y''_p = 2A$$

Helyettesítsünk a differenciálegyenletben y'' , y' és y helyére.

$$y'' - 3y' = 12x + 8 \Rightarrow 2A - 3(2Ax + B) = 12x + 8$$

Rendezzünk x hatványai szerint.

$$-6Ax + (2A - 3B) = 12x + 8$$

Egyeztessük az azonos fokszámú tagok együtthatóit.

$$-6A = 12 \text{ (az elsőfokú tagok egyenlőségéből)}$$

$$2A - 3B = 8 \text{ (a konstansok egyenlőségéből)}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $A = -2$, $B = -4$.

A differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása: $y_p = -2x^2 - 4x$.

Az általános megoldás: $y = y_h + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 - 2x^2 - 4x$.

A kezdeti érték feladat megoldásának előállításához deriváljuk ezt.

$$y' = 3c_1 e^{3x} - 4x - 4$$

Helyettesítsük be a kezdeti feltételekben megadott értékeket.

$$y(0) = 5 \Rightarrow 5 = c_1 e^{3 \cdot 0} + c_2 - 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 \Rightarrow 5 = c_1 + c_2$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow 2 = 3c_1 e^{3 \cdot 0} - 4 \cdot 0 - 4 \Rightarrow 2 = 3c_1 - 4 \Rightarrow c_1 = 2$$

Visszahelyettesítve az első egyenletbe kapjuk: $c_2 = 3$.

Végül a kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás: $y_0 = 2e^{3x} - 2x^2 - 4x + 3$.

3. feladat Mi az általános megoldása a $9y'' - 6y' + y = 36e^{\frac{1}{3}x}$ differenciálegyenletnek?

Megoldás: Elsőként a karakterisztikus egyenletet oldjuk meg.

$$9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (3\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

Egy valós gyököt kaptunk, ami a másodfokú egyenletnek kétszeres gyöke.

A homogén egyenlet általános megoldása: $y_h = e^{\frac{1}{3}x}(c_1 + c_2x) = c_1e^{\frac{1}{3}x} + c_2xe^{\frac{1}{3}x}$.

Rezonancia van, mert a konstanstól eltekintve $e^{\frac{1}{3}x}$ a zavaró függvény, és a homogén egyenlet megoldásának egyik tagja is. A próbafüggvénybe a jobb oldal alapján $Ae^{\frac{1}{3}x}$ kerülne, de a rezonancia miatt ezt szoroznunk kell x^2 -tel. Azért nem egyszerűen x a szorzó, mert a karakterisztikus egyenletnek kétszeres gyöke az $\frac{1}{3}$.

A próbafüggvény tehát: $y_p = Ax^2e^{\frac{1}{3}x}$.

Deriváljuk kétszer ezt a függvényt.

$$y'_p = 2Axe^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{3}Ax^2e^{\frac{1}{3}x} = e^{\frac{1}{3}x}\left(\frac{1}{3}Ax^2 + 2Ax\right)$$

$$y''_p = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}\left(\frac{1}{3}Ax^2 + 2Ax\right) + e^{\frac{1}{3}x}\left(\frac{2}{3}Ax + 2A\right) = e^{\frac{1}{3}x}\left(\frac{1}{9}Ax^2 + \frac{4}{3}Ax + 2A\right)$$

Helyettesítsünk be a differenciálegyenletbe.

$$9y'' - 6y' + y = 36e^{\frac{1}{3}x} \Rightarrow 9e^{\frac{1}{3}x}\left(\frac{1}{9}Ax^2 + \frac{4}{3}Ax + 2A\right) - 6e^{\frac{1}{3}x}\left(\frac{1}{3}Ax^2 + 2Ax\right) + Ax^2e^{\frac{1}{3}x} = 36e^{\frac{1}{3}x}$$

Osszuk el az egyenletet az exponenciális függvénnyel, s bontsuk fel a zárójeleket.

$$Ax^2 + 12Ax + 18A - 2Ax^2 - 12Ax + Ax^2 = 36 \Rightarrow 18A = 36 \Rightarrow A = 2$$

(Amint látható, az első és másodfokú tagok eltűntek az egyenletből.)

A differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása így: $y_p = 2x^2 e^{\frac{1}{3}x}$.

Az általános megoldás:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + c_2 x e^{\frac{1}{3}x} + 2x^2 e^{\frac{1}{3}x} = e^{\frac{1}{3}x} (c_1 + c_2 x + 2x^2).$$

4. feladat Keressük meg az $y'' - 4y' + 4y = 18xe^{2x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$ kezdeti érték feladat megoldását!

Megoldás: A szokott módon kezdjük a karakterisztikus egyenlet megoldásával.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

A karakterisztikus egyenletnek tehát egy valós gyöke van, s ez kétszeres gyök.

A homogén egyenlet általános megoldása ebből:

$$y_h = e^{2x} (c_1 + c_2 x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

Amint látható, az $x e^{2x}$ függvény konstansszorosa a zavaró függvény, és a homogén egyenlet megoldásának egyik tagja is, tehát rezonancia van. Csak az egyenlet jobb oldalát tekintve $Ax e^{2x}$ lenne a próbafüggvény, de a rezonancia miatt ezt x^2 -tel szorozni kell. Mint az előző feladatban, most sem elég csak x -szel szorozni, mert a karakterisztikus egyenletnek kétszeres gyöke a 2.

A próbafüggvény így a következő: $y_p = Ax^3 e^{2x}$.

Állítsuk elő az első és második deriváltját.

$$y'_p = 3Ax^2 e^{2x} + 2Ax^3 e^{2x} = e^{2x} (3Ax^2 + 2Ax^3)$$

$$y''_p = 2e^{2x} (3Ax^2 + 2Ax^3) + e^{2x} (6Ax + 6Ax^2) = e^{2x} (4Ax^3 + 12Ax^2 + 6Ax)$$

Helyettesítsünk a differenciálegyenletben y'' , y' és y helyére.

$$y'' - 4y' + 4y = 18xe^{2x} \Rightarrow e^{2x}(4Ax^3 + 12Ax^2 + 6Ax) - 4e^{2x}(3Ax^2 + 2Ax^3) + 4Ax^3e^{2x} = 18xe^{2x}$$

Osszuk el az egyenletet az exponenciális függvénnyel, és bontsuk fel a zárójeleket.

$$4Ax^3 + 12Ax^2 + 6Ax - 12Ax^2 - 8Ax^3 + 4Ax^3 = 18x \Rightarrow 6Ax = 18x \Rightarrow A = 3$$

(Az egyenletből a másodfokú és harmadfokú tagok eltűntek.)

A differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása: $y_p = 3x^3e^{2x}$.

Az általános megoldás pedig:

$$y = y_h + y_p = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + 3x^3e^{2x} = e^{2x}(c_1 + c_2x + 3x^3).$$

Vegyük ennek a deriváltját.

$$y' = 2e^{2x}(c_1 + c_2x + 3x^3) + e^{2x}(c_2 + 9x^2) = e^{2x}(2c_1 + c_2 + 2c_2x + 9x^2 + 6x^3)$$

Helyettesítsük be a kezdeti feltételeket.

$$y(0) = 3 \Rightarrow 3 = e^{2 \cdot 0}(c_1 + c_2 \cdot 0 + 3 \cdot 0^3) \Rightarrow c_1 = 3$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow 1 = e^{2 \cdot 0}(2c_1 + c_2 + 2c_2 \cdot 0 + 9 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0^3) \Rightarrow 1 = 2c_1 + c_2$$

A második egyenletbe behelyettesítjük c_1 -et, s a másik konstansra kapjuk: $c_2 = -5$.

A kezdeti feltételeknek így a differenciálegyenlet következő megoldása tesz eleget:

$$y_0 = e^{2x}(3 - 5x + 3x^3).$$

5. feladat Adjuk meg az $y'' + 16y = 16\sin 4x$ differenciálegyenlet azon megoldását, mely kielégíti az $y(0) = 3$ és $y'(0) = 6$ kezdeti feltételeket!

Megoldás: Először a karakterisztikus egyenletet oldjuk meg.

$$\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -16 \Rightarrow \lambda = \sqrt{-16} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} 4i \\ -4i \end{cases}$$

A homogén egyenlet általános megoldása a következő:

$$y_h = e^{0 \cdot x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x) = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x.$$

Most konstanstól eltekintve a $\sin 4x$ egyezik meg a zavaró függvényben és a homogén egyenlet megoldásának egyik tagjában, ez okoz rezonanciát. A jobb oldal alapján $A \sin 4x + B \cos 4x$ lenne a próbafüggvény, a rezonancia miatt azonban ezt szorozni kell x -szel.

$$y_p = x(A \sin 4x + B \cos 4x)$$

Határozzuk meg ennek első és második deriváltját.

$$y'_p = (A \sin 4x + B \cos 4x) + x(4A \cos 4x - 4B \sin 4x)$$

$$y''_p = (4A \cos 4x - 4B \sin 4x) + (4A \cos 4x - 4B \sin 4x) + x(-16A \sin 4x - 16B \cos 4x) =$$

$$= (8A \cos 4x - 8B \sin 4x) - x(16A \sin 4x + 16B \cos 4x)$$

Helyettesítsük be a próbafüggvényt és második deriváltját a differenciálegyenletbe.

$$y'' + 16y = 16 \sin 4x \Rightarrow$$

$$(8A \cos 4x - 8B \sin 4x) - x(16A \sin 4x + 16B \cos 4x) + 16x(A \sin 4x + B \cos 4x) = 16 \sin 4x$$

Bontsuk fel a zárójeleket és vonjunk össze.

$$8A \cos 4x - 8B \sin 4x = 16 \sin 4x$$

(Az $x\sin 4x$ és $x\cos 4x$ függvényt tartalmazó tagok eltűntek az egyenletből.)

Az egyforma függvényt tartalmazó tagok együtthatóinak egyeztetéséből két egyenletet kapunk.

$$8A = 0 \text{ (a cos-os tagok egyenlőségéből)}$$

$$-8B = 16 \text{ (a sin-os tagok egyenlőségéből)}$$

Ezek megoldása: $A = 0$, $B = -2$.

A differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_p = x(0 \cdot \sin 4x - 2\cos 4x) = -2x\cos 4x.$$

Az általános megoldás: $y = y_h + y_p = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x - 2x\cos 4x$.

Állítsuk elő ennek deriváltját.

$$y' = -4c_1 \sin 4x + 4c_2 \cos 4x - 2\cos 4x + 8x \sin 4x$$

Helyettesítsük be a kezdeti feltételekben megadott értékeket.

$$y(0) = 3 \Rightarrow 3 = c_1 \cos 4 \cdot 0 + c_2 \sin 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot \cos 4 \cdot 0 \Rightarrow c_1 = 3$$

$$y'(0) = 6 \Rightarrow 6 = -4c_1 \sin 4 \cdot 0 + 4c_2 \cos 4 \cdot 0 - 2\cos 4 \cdot 0 + 8 \cdot 0 \cdot \sin 4 \cdot 0 \Rightarrow 6 = 4c_2 - 2 \Rightarrow c_2 = 2$$

A differenciálegyenlet kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldása:

$$y_0 = 3\cos 4x + 2\sin 4x - 2x\cos 4x.$$

6. feladat Határozzuk meg az $y'' - 6y' + 10y = 6e^{3x}\cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Szokás szerint a karakterisztikus egyenlet megoldásával kezdjük.

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \begin{cases} 3 + i \\ 3 - i \end{cases}$$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_h = e^{3x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) = c_1 e^{3x} \cos x + c_2 e^{3x} \sin x.$$

A zavaró függvény és a homogén egyenlet megoldásának egyik tagja az $e^{3x} \cos x$ függvény konstansszorososa, ezért rezonancia van. Az egyenlet jobb oldala alapján

$e^{3x}(A \sin x + B \cos x)$ lenne a próbafüggvény, de így ezt szorozni kell x -szel.

$$y_p = x e^{3x}(A \sin x + B \cos x) = e^{3x}(A x \sin x + B x \cos x)$$

Deriváljuk kétszer ezt a függvényt.

$$y'_p = 3e^{3x}(A x \sin x + B x \cos x) + e^{3x}(A \sin x + A x \cos x + B \cos x - B x \sin x) =$$

$$= e^{3x}(A \sin x + B \cos x + (3A - B)x \sin x + (A + 3B)x \cos x)$$

$$y''_p = 3e^{3x}(A \sin x + B \cos x + (3A - B)x \sin x + (A + 3B)x \cos x) +$$

$$+ e^{3x}(A \cos x - B \sin x + (3A - B)(\sin x + x \cos x) + (A + 3B)(\cos x - x \sin x)) =$$

$$= e^{3x}((6A - 2B) \sin x + (2A + 6B) \cos x + (8A - 6B)x \sin x + (6A + 8B)x \cos x)$$

Helyettesítsünk a differenciálegyenletben y'' , y' és y helyére.

$$y'' - 6y' + 10y = 6e^{3x} \cos x \Rightarrow$$

$$e^{3x}((6A - 2B) \sin x + (2A + 6B) \cos x + (8A - 6B)x \sin x + (6A + 8B)x \cos x) -$$

$$- 6e^{3x}(A \sin x + B \cos x + (3A - B)x \sin x + (A + 3B)x \cos x) +$$

$$+10e^{3x}(Ax\sin x + Bx\cos x) = 6e^{3x}\cos x$$

Osszuk az egyenletet az exponenciális függvénnyel és vonjunk össze.

(A számolási lépéseket itt nem írjuk le, csak az eredményt adjuk meg.)

$$-2B\sin x + 2A\cos x = 6\cos x$$

(Amint az várható volt, az $x\sin x$ és $x\cos x$ függvényt tartalmazó tagok kiestek az egyenletből.)

Írjuk fel azon tagok együtthatóinak egyenlőségét, melyekben ugyanolyan függvény szerepel.

$$-2B = 0 \text{ (a sin-os tagok egyenlőségéből)}$$

$$2A = 6 \text{ (a cos-os tagok egyenlőségéből)}$$

Ezek megoldása: $A = 3$, $B = 0$.

Ezek alapján a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_p = xe^{3x}(3\sin x + 0\cos x) = 3xe^{3x}\sin x.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = y_h + y_p = c_1e^{3x}\cos x + c_2e^{3x}\sin x + 3xe^{3x}\sin x = e^{3x}(c_1\cos x + c_2\sin x + 3x\sin x)$$

.

Megjegyzés: A feladatok megoldása során az x -szel illetve x^2 -tel szorzott függvényeket tartalmazó tagok kiestek a zárójelek felbontása, és az összevonás után. Ennek mindig így is kell történnie, különben az egyenletrendszer alakításánál több egyenletet kapnánk, mint ahány ismeretlenünk van. Ha tehát az ilyen tagok nem esnek ki egy feladat megoldása során, akkor valahol biztosan hibáztunk.

Ha nem vesszük észre egy feladatban, hogy rezonancia van, és a próbafüggvény megfelelő részét nem szorozzuk meg x -szel illetve x^2 -tel, akkor olyan tagok is kiesnek a bal oldalon, amilyenek a jobb oldalon előfordulnak, s így ellentmondásra jutunk. Ha tehát azt tapasztaljuk,

hogy a jobb oldalon van olyan tag, ami a bal oldalon eltűnt az összevonás során, akkor mindig térjünk vissza a próbafüggvény felírásához, s vizsgáljuk meg nincs-e rezonancia.

Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: Mi az általános megoldása a $2y'' + 5y' - 3y = 9x + 14e^{\frac{1}{2}x}$ differenciálegyenletnek?

- ☐ $y = c_1 e^{-3x} + e^{\frac{1}{2}x} (c_2 + 2x) + 3x + 5$
- ☐ $y = c_1 e^{-3x} + e^{\frac{1}{2}x} (c_2 + 2x) - 3x + 5$
- ☐ $y = c_1 e^{-3x} + e^{\frac{1}{2}x} (c_2 + 2x) + 3x - 5$
- ☐ $y = c_1 e^{-3x} + e^{\frac{1}{2}x} (c_2 + 2x) - 3x - 5$



2. kérdés: Az $y'' + 5y' = 20x + 19$ differenciálegyenletnek melyik megoldása elégíti ki az $y(0) = 4$ és $y'(0) = 13$ kezdeti feltételeket?

- ☐ $y = 2e^{-5x} + 2x^2 + 3x + 6$
- ☐ $y = -2e^{-5x} + 2x^2 + 3x + 6$
- ☐ $y = 2e^{-5x} + 2x^2 + 3x - 6$
- ☐ $y = -2e^{-5x} + 2x^2 + 3x - 6$



3. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik a $4y'' - 4y' + y = 24e^{\frac{1}{2}x}$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = e^{\frac{1}{2}x}(c_1 + c_2x + 3x)$
- ☐ $y = e^{\frac{1}{2}x}(c_1 + c_2x - 3x)$
- ☐ $y = e^{\frac{1}{2}x}(c_1 + c_2x + 3x^2)$
- ☐ $y = e^{\frac{1}{2}x}(c_1 + c_2x - 3x^2)$



4. kérdés: Melyik függvény az $y'' - 6y' + 9y = 12xe^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ kezdeti érték feladat megoldása?

- ☐ $y = e^{3x}(2x^3 + x + 1)$
- ☐ $y = e^{3x}(2x^3 - x + 1)$
- ☐ $y = e^{3x}(2x^3 + x - 1)$
- ☐ $y = e^{3x}(2x^3 - x - 1)$



5. kérdés: Az $y'' + 4y = 12\cos 2x$ differenciálegyenlet megoldásai közül melyik tesz eleget az $y(0) = 1$ és $y'(0) = 8$ kezdeti feltételeknek?

- ☐ $y = 3x\sin 2x + 4\sin 2x + \cos 2x$
- ☐ $y = 3x\sin 2x + \sin 2x + 4\cos 2x$
- ☐ $y = 4x\sin 2x + 3\sin 2x + \cos 2x$
- ☐ $y = 4x\sin 2x + \sin 2x + 3\cos 2x$



6. kérdés: Mi az általános megoldása az $y'' - 2y' + 5y = 8e^x \sin 2x$ differenciálegyenletnek?

- ☐ $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \cos 2x)$
- ☐ $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x - x \cos 2x)$
- ☐ $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2x \cos 2x)$
- ☐ $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x - 2x \cos 2x)$



1. kérdés: Az alábbi differenciálegyenletek közül melyik lineáris?

(1) $y' + y\sqrt{x} = y^2$ (2) $y' + x\sqrt{y} = x^2$

- ☐ (1) lineáris (2) nem
- ☐ (2) lineáris (1) nem
- ☐ mindkettő lineáris
- ☐ egyik sem lineáris



2. kérdés: Melyik függvény az $y' = \sin 3x$ differenciálegyenlet $y(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása?

- ☐ $y = \frac{\cos 3x + 1}{3}$
- ☐ $y = \frac{\cos 3x - 1}{3}$
- ☐ $y = \frac{1 - \cos 3x}{3}$
- ☐ $y = \frac{-1 - \cos 3x}{3}$



3. kérdés: A következő két differenciálegyenlet közül melyik szétválasztható változójú?

(1) $y' + \sqrt{xy} = 0$ (2) $y' + \sqrt{x+y} = 0$

- ☐ (1) szétválasztható változójú (2) nem
- ☐ (2) szétválasztható változójú (1) nem
- ☐ mindegyik szétválasztható változójú
- ☐ egyik sem szétválasztható változójú



4. kérdés: Mi az $y' - y \operatorname{ctg} x = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = c \sin x$
- ☐ $y = \frac{c}{\sin x}$
- ☐ $y = c + \sin x$
- ☐ $y = c - \sin x$



5. kérdés: Mi a megoldása az $y' - \frac{y}{\sqrt{x}} = 0$, $y(1) = e^2$ kezdeti érték feladatnak?

- ☐ $y = e^{(\sqrt{x}+1)}$
- ☐ $y = e^{(\frac{1}{\sqrt{x}}+1)}$
- ☐ $y = e^{2\sqrt{x}}$
- ☐ $y = e^{\frac{2}{\sqrt{x}}}$



6. kérdés: Mi az általános megoldása az $xy' = x - 2y$ differenciálegyenletnek?

- ☐ $y = \frac{c}{x^2} - \frac{x}{3}$
- ☐ $y = \frac{c}{x^2} + \frac{x}{3}$
- ☐ $y = c \cdot x^4 - \frac{x}{3}$
- ☐ $y = c \cdot x^4 + \frac{x}{3}$



7. kérdés: Mi az általános megoldása az $y' + 5 = 3\sqrt{5x + y}$ differenciálegyenletnek?

- ☐ $y = \left(c + \frac{3}{2}x\right)^2 + 5x$
- ☐ $y = \left(c + \frac{3}{2}x\right)^2 - 5x$
- ☐ $y = \left(c - \frac{3}{2}x\right)^2 + 5x$
- ☐ $y = \left(c - \frac{3}{2}x\right)^2 - 5x$



8. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $y' - \frac{y}{x} = -x \sin x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = x(c + \sin x)$
- ☐ $y = x(c - \sin x)$
- ☐ $y = x(c + \cos x)$
- ☐ $y = x(c - \cos x)$



9. kérdés: Mi a megoldása az $y' + \frac{2y}{x} = 4x$, $y(1) = 3$ kezdeti érték feladatnak?

- ☐ $y = \frac{2}{x^2} + x^2$
- ☐ $y = \frac{4}{x^2} - x^2$
- ☐ $y = 2x^2 + 1$
- ☐ $y = 4x^2 - 1$



10. kérdés: Mi az $y' - 3y = 17 - 6x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = ce^{-3x} + 2x - 7$
- ☐ $y = ce^{-3x} + 2x - 5$
- ☐ $y = ce^{3x} + 2x - 7$
- ☐ $y = ce^{3x} + 2x - 5$



11. kérdés: Melyik függvény az $y' + 2y = 12\sin 2x$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = ce^{-2x} + 3\sin 2x + 3\cos 2x$
- ☐ $y = ce^{-2x} + 3\sin 2x - 3\cos 2x$
- ☐ $y = ce^{-2x} - 3\sin 2x + 3\cos 2x$
- ☐ $y = ce^{-2x} - 3\sin 2x - 3\cos 2x$



12. kérdés: Mi az $y'' - y' - 6y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása?

- ☐ $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$
- ☐ $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$
- ☐ $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$
- ☐ $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$



13. kérdés: Mi a $4y'' - 12y' + 9y = 0$, $y(0) = -4$, $y'(0) = 5$ kezdeti érték feladat megoldása?

- ☐ $y = e^{\frac{3}{2}x}(7x - 4)$
- ☐ $y = e^{\frac{3}{2}x}(9x - 4)$
- ☐ $y = e^{\frac{3}{2}x}(11x - 4)$
- ☐ $y = e^{\frac{3}{2}x}(13x - 4)$



14. kérdés: Mi az általános megoldása az $y'' - 4y' + 29y = 0$ differenciálegyenletnek?

- ☐ $y = e^{5x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$
- ☐ $y = e^{-5x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$
- ☐ $y = e^{2x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)$
- ☐ $y = e^{-2x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)$



15. kérdés: Az $y'' - 5y' + 2y = 3e^x \cos x$ differenciálegyenlet megoldása során milyen próbafüggvényt kell felírnunk?

- ☐ $y_p = Ae^x \cos x$
- ☐ $y_p = Ae^x B \cos x$
- ☐ $y_p = e^x (A \cos x + B \sin x)$
- ☐ $y_p = Ae^x (B \cos x + C \sin x)$



16. kérdés: Mi az általános megoldása a $9y'' - 6y' + y = x^2 - 7$ differenciálegyenletnek?

- ☐ $y = c_1 e^{\frac{x}{3}} + c_2 x e^{\frac{x}{3}} + x^2 + 12x + 47$
- ☐ $y = c_1 e^{\frac{x}{3}} + c_2 x e^{\frac{x}{3}} + x^2 + 12x + 51$
- ☐ $y = c_1 e^{\frac{x}{3}} + c_2 x e^{\frac{x}{3}} + x^2 + 13x + 43$
- ☐ $y = c_1 e^{\frac{x}{3}} + c_2 x e^{\frac{x}{3}} + x^2 + 13x + 47$



17. kérdés: Mi a megoldása az

$$y'' - 4y' + 13y = 9e^{5x}, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = -\frac{1}{2} \text{ kezdeti érték}$$

feladatnak?

- ☐ $y = \frac{1}{2}e^{5x} + e^{2x}\cos 3x$
- ☐ $y = \frac{1}{2}e^{5x} - e^{2x}\cos 3x$
- ☐ $y = \frac{1}{2}e^{5x} + e^{2x}\sin 3x$
- ☐ $y = \frac{1}{2}e^{5x} - e^{2x}\sin 3x$



18. kérdés: Mi az általános megoldása az $y'' - 4y' + 3y = 8e^{3x}$ differenciálegyenletnek?

- ☐ $y = c_1e^x + c_2e^{-3x} + 4e^{3x}$
- ☐ $y = c_1e^x + c_2e^{3x} + 4xe^{3x}$
- ☐ $y = c_1e^x + c_2e^{-3x} + 8e^{3x}$
- ☐ $y = c_1e^x + c_2e^{3x} + 8xe^{3x}$