

SZÁMÍTÓGÉPES ESZKÖZÖK DINAMIKUS MODELLEK VIZSGÁLATÁRA

5. hét - Numerikus módszerek kezdetiérték problémákra.

Bánhelyi Balázs

Szegedi Tudományegyetem

2012

- ▶ Az elsőrendű közönséges differenciálegyenleteknek végtelen sok megoldása van, amelyek egy konstansban különböznek egymástól. Ha egy plusz feltételt rendelünk a feladathoz, akkor a megoldás egyértelművé válik. Ezt nevezzük Cauchy-féle feladatnak:

$$\dot{y}(t) = f(t, y)$$

$$y(t_0) = y_0$$

- ▶ A differenciálegyenletek numerikus megoldásának alapelve, hogy az integrál görbét pontszerűen közelítjük meg

$$y(t_i) = y_i,$$

ahol t_i a tanulmányozott intervallum $t \in [t_0; t_f]$ egy felosztása.

Az Euler-féle (törtvonal) módszer

- ▶ Az Euler módszer lényege, hogy az elméleti görbét -pontról pontra haladva- lineáris szakaszokkal közelítjük meg és eredményül egy $P_0, P_1, \dots, P_n$ törtvonalat kapunk.
- ▶ Az y_1 ordináta kiszámításához figyelembe vesszük a t_0 időpontban ismert y_0 függvény értékét és feltételezzük hogy a $[t_0; t_1]$ intervallumban a függvény növekedése konstans, vagyis $\dot{y}(t_0) = f(t_0; y_0)$:

$$P_0P_1 : \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0} = f(t_0; y_0) \Rightarrow y_1 = y_0 + hf(t_0; y_0)$$

- ▶ Hasonlóan szerkesztjük meg az összes többi $y_i; i = 2; \dots; n$ ordinátát:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i; y_i).$$

- ▶ Az Euler módszer pontosságának javítására használhatjuk a Taylor sorfejtést integrál maradékkal:

$$y(t+h) = y(t) + \int_0^h \dot{y}(t+s) ds,$$

majd az integrálra különböző numerikus közelítést használunk.

- ▶ Az integrál közelítésére használjuk a téglalap módszert:

$$\int_0^h \dot{y}(t+s) ds = h \dot{y} \left(t + \frac{h}{2} \right)$$

Javított Euler módszerek (folyt.)

- ▶ Ezt a Taylor képlettel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\dot{y} \left(t + \frac{h}{2} \right) &= \\ &= f \left(t + \frac{h}{2}, y \left(t + \frac{h}{2} \right) \right) = f \left(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{h}{2} f(t, y(t)) \right).\end{aligned}$$

- ▶ Innen kapjuk, hogy

$$y(t + h) = y(t) + hf \left(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{h}{2} f(t, y(t)) \right).$$

- ▶ Vagyis:

$$y_{i+1} = y_i + hf \left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) \right).$$

- ▶ A Runge-Kutta módszerek az Euler módszer továbbfejlesztésének, javításának tekinthetők.
- ▶ A Runge-Kutta módszer explicit megoldásának általános alakja az s lépésben:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

$$k_i = f \left(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right)$$

Ahol $a_{ij} = 0, j \geq i$ és $\sum_{j=1}^s a_{ij} = c_i$.

Másodrendű Runge-Kutta módszerek

- ▶ Egy másodrendű klasszikus Runge-Kutta módszer Butcher táblázata:

0	0	.
c_2	c_2	0
.	b_1	b_2

- ▶ A következőknek kell teljesülnie:

$$b_1 + b_2 = 1$$

$$b_2 c_2 = 1/2$$

- ▶ Végtelen sok megoldása van ezért a leghasználatosabbak:

$$b_1 = 0, b_2 = 1, c_2 = 1/2.^1$$

$$b_1 = 1/2, b_2 = 1/2, c_2 = 1.$$

¹Javított Euler módszer.

- Egy negyedrendű klasszikus Runge-Kutta módszer Butcher táblázata:

0	0			
1/2	1/2	0		
1/2	0	1/2	0	
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

Taylor sorbafejtés

- ▶ Az elsőrendű Euler-módszer felfogható úgy, hogy egy ismeretlen $y(t)$ függvény kis megváltozását a Taylor-sorfejtés első rendjéig közelítjük. Ha azonban több tagot is felhasználunk, akkor pontosabb lesz a közelítés, így jutunk el a magasabb rendű Euler-módszerekig.
- ▶ Ezek alapján könnyű belátni, hogy egy másodrendű Euler-módszer egy lépése így néz ki:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t + \frac{df(t, y(t))}{dt} \frac{(\Delta t)^2}{2!}$$

- ▶ A harmadrendűé pedig

$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t + \frac{df(t, y(t))}{dt} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \frac{d^2f(t, y(t))}{dt^2} \frac{(\Delta t)^3}{3!}$$

és így tovább.