Döntéselméleti modellek gyakorlat

Berta Árpád

November 14, 2017

Contents

1 Bevezetés - Többtényezős döntések

1.1 Egy jellemző döntési feladat - lakásvásárlási probléma

Új városba költözéskor lakóingatlanhoz szeretnénk jutni. Ehhez feltesszük, hogy rendelkezünk egy alaptőkével, amely elegendő több lehetséges lakás (alternatívák) közül egy lakás megvásárlásához. A lakás kiválasztásához több különböző szempontot (kritériumot) kell figyelembe vennünk és ezek alapján a legjobbat kiválasztani. Ilyen például a lakás ára, mérete, beosztása, esztétikuma, külleme, a lakókörnyék közbiztonsági -, levegőminőségi szintje, kiszolgáló létesítmények (bolt, piac, kocsma, szórakozóhely), parkolási, biciklitárolási, megközelíthetőségi lehetőségek, a lakásból érzékelhető kilátás és a táj szerkezete.

Feladat: egyetlen cselekvési alternatíva kijelölése (pl: legjobb lakás).

További példák:

- politikai, üzleti, termelési döntések (közgazdaságtan)
- ajánlórendszerek, szakértői rendszerek (adatbányászat)
- Temesi jegyzet 12-13 o.

1.2 Alapfogalmak

Alternatívák: egy döntési szituáció lehetséges megoldása, lehetséges cselekvések. Ezek strukturált halmaza: *döntési tér* (v. döntési felület). Megadásuk nem feltétlenül matematikai módon történik. Példa: a szóbajöhető lakások halmaza.

Kritériumok: az alternatívák azon jellemzői, amelyeket figyelembe szeretnénk venni a döntési feladatban. Ezek alapján döntünk az alternatívák közül. *Metakritériumok* nem valódi, mérhető, hanem különböző pszichológiai tényezők által behatárolt kritériumok.

Többtényezős döntési problémák: véges (megszámlálható) sok alternatíva, véges sok kritérium. Feladat: egyetlen cselekvési alternatíva kijelölése (pl: legjobb lakás), vagy az alternatívák rangsorolása. Nincs egzakt, minden környezetben és problématípusra általánosan elfogadott algoritmus (ezek megismerése a félév anyaga). Nehézség: lehetnek szubjektív elemei. Teljes döntési folyamatot le kell fedni.

Döntéshozó: felelős a döntés meghozásáért. Több személy is lehet (egyéni $\leftrightarrow$ csoportos döntések). Esetek többségében feltehető, hogy a döntéshozó racionális döntést hoz, optimalizáló szemléletű (Pareto-optimális alternatívák közül választ). Többek között ezt a feltevést járja körbe és cáfolja Herbert A. Simon és Daniel Kahneman (esszék) $\rightarrow$ *korlátozott racionalitás*: kielégítő szemlélet (ez inkább az általános). Döntéshozó az objektív adatok ismeretén felül *preferenciákkal* rendelkezik, ezek alapján dönt.

2 Bevezetés - Lineáris programozás

Többcélú programozási feladat: Fontos kiemelni, hogy amennyiben a feladatunk feltételrendszer és célok különválasztásából és egy matematikai programozási modell feladat felírásából tevődik össze, akkor hagyományos módon többcélú programozási feladatról beszélünk (feladat típusától függően akár LP, vagy hozzárendelési feladat, vagy szállítási feladat). A változók folytonos és egész értékűek és a hozzájuk megadott korlátokkal testesítik meg a döntési szempontrendszerünk. Ilyen esetben a legjobb döntés kiválasztását célfüggvény vezérli és matematikai feladatként megoldható **(így nem a többtényezős döntési problémákra ismertetett eljárásokkal foglalkozunk ilyen esetben)**.

Probléma:

- több alternatív (akár szélsőségesen eltérő struktúrájú) optimum lehet és ezek (alternatívák) közül választani kell → valamilyen pótlólagos információra van szükség.
- az esetek döntő többségében nehéz (sőt lehetetlen) a döntési problémát egyetlen célfüggvény kiértékelésére leegyszerűsíteni.

Amennyiben több célfüggvény is van → új optimum-fogalom kell: *Pareto-optimum* (kb. hasonló a játékelméleti Nash-egyensúlyi helyzethez) több cél egyidejű teljesülése úgy, hogy nem lehet olyan újabb lehetséges megoldást megadni, ami minden szempontból megegyezik az előzővel, de egy szempont szerint jobb az előzőnél. Ezeknek a halmaza viszont általában végtelen sok elemből áll → nem alkalmas a döntési probléma megoldására. Kompromisszumos megoldást kell keresni. Lehetőségek (mindegyik egyetlen cfgv-re vezeti vissza a megoldást):

- súlyozásos módszer: célfüggvényekhez fontossági súlyokat rendelünk, súlyokkal képzett összegként áll elő az egyetlen cfgv (nehéz a súly megadása)
- lexikografikus módszer: legfontosabb cfgv lesz a cfgv (melyik a legfontosabb?)
- korlátok módszere: egy cfgv-t kiválasztunk a többit beépítjük a feltételrendszerbe (mi lesz a korlát?)
- kompromisszumprogramozás elve: kiszámoljuk minden cfgv szerinti legjobb értéket és azt az alternatívát (megoldást) választjuk, ami ehhez a legközelebb van (mi a távolságfüggvény?)

Döntési folyamat:

1. döntési helyzet keletkezése → konfliktus (fel kell oldani, dönteni kell)
2. döntési probléma megfogalmazása és formalizálása
   (a) a döntési cél megfogalmazása
   (b) alternatívák kijelölése
   (c) kritériumok meghatározása
3. módszer választás (nehéz)
4. megoldás: egyetlen cselekvési lehetőség kiválasztása (vagy alternatívák egyértelmű rangsorolása)
5. kiértékelés, elemzés (helyes volt-e a döntésünk?)

3 Bevezetés - Döntéstámogató rendszerek (DSS):

Célja a döntési folyamat automatizálása, döntési feladat megoldásának a segítése. Hagyományosan célorientált (domain specifikus) rendszerek.

Megkülönböztetünk:

- Passzív DSS: felügyeli a döntési folyamatot, de nem ajánl fel semmilyen döntési lehetőséget (kritikai rendszerek)
- Aktív DSS: felügyeli a döntési folyamatot, konkrét javaslatot ad a döntésre
- Kooperatív DSS: a döntési folyamat közben is lehetőség van az egyes paraméterek módosítására, az eljárás újradefiniálásra

Eszközök: egyes folyamatok automatizálása, vizualizáció, szűrés -, súlyozás -, preferencia -, hasznosság alapú módszerek (minden a félév során megismert eljárás), ajánlórendszerek, gépi tanulás, adatbányászat, szövegbányászat, tudásalapú -, szakértői rendszerek, többcélú programozás, megerősítéses tanulás, ...

4 Bevezetés - Csoportos döntések:

Akkor beszélünk csoportos döntésről, ha a döntés nem egyetlen döntéshozótól függ, hanem több döntéshozó van $\longrightarrow$ elosztott döntés.

- vertikális: a folyamat egyes részeit osztjuk szét különböző döntéshozókhoz, mindenki az adott részfeladatban *egyedül* dönt. A döntések közötti kapcsolatot kell megadnunk, a részdöntésekre pedig a hagyományos DSS-eket alkalmazhatjuk.
- horizontális: egy döntési kérdésben több döntéshozó dönt $\longrightarrow$ szavazási eljárások. DSS vezérli a szavazást, vagy egy aktív DSS is lehet egy döntéshozó.

Szavazási eljárások A szavazás során egy olyan *társadalmi jóléti függvény*t keresünk, amely méltányosan összegzi az alternatívák feletti preferenciákat $\longrightarrow$ helyes rendezést ad az alternatívákra. Helyes rendezés alatt olyan csoportos döntést értünk, ami az alábbi tulajdonságokat egyidejűleg kielégíti:

Megkövetelt tulajdonságok:

- Univerzális értelmezési tartomány: minden lehetséges bemenetre tud rendezést adni.
- Gyenge Pareto elv: ha valamely alternatívát minden döntéshozó egyértelműen jobban preferál egy másiknál, akkor az a végső döntésben is jobban fog szerepelni.
- Bináris függetlenség: felteszi, hogy minden alternatíva pár esetében csak és kizárólag az a két alternatíva befolyásolja a döntéshozókat a preferenciarendezésben.
- Diktátor mentesség: nincs olyan döntéshozó, akinek a döntése dominálja az összes többiét.

Arrow-tétel: Nem létezik olyan társadalmi jóléti függvény amelyben ez a négy feltétel egyidejűleg teljesülne. $\longrightarrow$ nincs egy tökéletes szavazási eljárás.

5 Eliminációs módszerek

Formalizáljuk a lakásvásárlási példánkat. Tegyük fel, hogy hosszas gondolkodás után sikerült kritériumaink közül elhagyni azokat, amelyek kevésbé fontos szempontok, így végül a vizsgálataink során az alábbi jellemzők maradnak:

- X_1: ára (millió forint) (kritérium: minél olcsóbb)
- X_2: mérete (m^2) (kritérium: $70m^2$-hez közeli)
- X_3: esztétikuma (kritérium: minél jobb)
- X_4: környék jósága (kritérium: minél jobb)
- X_5: bicikli tárolási lehetőség (kritérium: legyen)

A fenti szempontok szerint nekiálltunk lakást keresni és végül a következő három lehetséges lakásjelöltre tudtuk redukálni a döntési terünket:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
A_1	8.5	98	felújításra szorul	közepes	nincs
A_2	11	56	új	kiemelkedően jó	van
A_3	10	120	újszerű	kifejezetten rossz	van
A_4	12	56	új	kiemelkedően jó	van

5.1 Dominancia módszer

Dominált alternatíva: olyan alternatíva, ami egyik kritérium szerint sem jobb, és legalább egy szempont szerint rosszabb egy másik alternatívánál. A nem dominált alternatívák egyben Pareto-optimális.

A módszer lényege ezek kiszűrése (eliminációs módszer). Amennyiben dominált alternatívát választana egy döntéshozó, akkor az nem számítana racionális döntésnek.

A példában az A_4 egy dominált alternatíva: egyik szempont szerint sem jobb az A_2-nél, és az X_1 kritérium szerint rosszabb.

5.2 Kielégítésre törekvő módszer

Minden célhoz meghatározunk egy *kielégítési szintet.* Ez lényegében azt jelenti, hogy mi az a szint (**szükségességi feltétel**), az adott szempontból, ami felett (v. alatt) elfogadnánk az adott alternatívát. Például: közepes közbiztonsági szint felett már elgondolkozunk a lakás megvásárlásán. Ezek alapján kiküszöbölhetőek azok az alternatívák, amik valamilyen szempontból már nem elfogadhatóak a számunkra. Azok az alternatívák maradnak, amelyek minden kielégítési szintnek megfelelnek. Tehát minden szempontból megbízható. Ugyanakkor általában nem feltétlenül ilyet keresünk, sőt a legjobb alternatívát is kiszórhatja, ami egyébként éppen a határérték alatt van egy szempont szerint. A módszer alkalmazásakor nem az egyetlen legjobb alternatívát keressük, hanem megpróbáljuk leszűkíteni az alternatívák körét (eliminációs módszer).

5.3 Diszjunkt módszer

Az előző módszer kifordítva. Nem egy minden szempontból megbízható alternatívát keresünk, hanem olyat ami valamilyen (akár több) szempontból kiemelkedő. Módszer: minden szemponthoz meghatározzuk azt a szintet (**elegendőségi feltétel**), amelynél ha egy alternatíva jobb értékkel bír, akkor bent marad az alternatívák körében. Ha egy szempont szerint sem kiemelkedő, akkor elvetjük. Ebben az esetben is szűkítjük az alternatívák körét és nem egyetlen legjobbat keresünk (eliminációs módszer).

Példa: 10 millió forint alatti ingatlanokat kiemelkedően jó értékűnek tartjuk. A 70 m^2-hez képest legfeljebb 10 m^2-rel eltérő ingatlanokat kiemelkedően jó alapterületűnek tartjuk. ...

6 Elemi döntési módszerek (determinisztikus modellekre)

Problémák az eddigi ábrázolással:

- nem számszerű értékek,
- normalizálatlan (nem ismert a globális range),
- kritériumonként eltérően maximalizálni vagy minimalizálni szeretnénk,
- a lakás mérete esetében pedig általában inkább egy megfelelő értéket szoktunk keresni és nem minél nagyobb vagy minél kisebb méretű lakást (tegyük fel, hogy **70 m^2**-es a számunkra optimális lakásméret).

Szubjektív értékelések számszerűsítése: Ezt majd részletesen fogjuk vizsgálni az értékelőfüggvények tárgyalásakor. Most bemondásos alapon határozzuk meg az értékeket:

felújításra szorul	újszerű	új
0.3	0.6	0.9

kifejezetten rossz	közepes	kifejezetten jó
0.12	0.56	0.97

van	nincs
0.9	0.1

A lakás méretének egyirányú skálára való felfűzése több lehetséges módon is történhet. A legegyszerűbb ha a keresett optimális értéktől vett euklideszi távolságot vesszük. Ha nagyobb irányba térünk el, akkor az a túlzott fűtési költségek miatt kedvezőtlen, ha pedig kisebb méret irányába, akkor pedig a kevés hely miatt kedvezőtlen. Ebben az esetben feltesszük, hogy mind a két irány azonos súllyal ront a lakás ”jóságán”.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
A_1	8.5	28	0.3	0.56	0.1
A_2	11	14	0.9	0.97	0.9
A_3	10	50	0.6	0.12	0.9
A_4	12	14	0.9	0.97	0.9

Skála meghatározása: szakértőktől, vagy ha nem jutunk semmilyen információhoz, akkor az ismert értékek maximuma és minimuma alapján.

Normalizálás:

$$\text{maximum feladat: } r_{ij} = \frac{x_{ij} - x_j^{min}}{x_j^{max} - x_j^{min}}$$
$$\text{minimum feladat: } r_{ij} = \frac{x_j^{max} - x_{ij}}{x_j^{max} - x_j^{min}}$$

Maximum és minimum meghatározása:

- az ismert értékekből kijelölve
- szakértői segítéséggel

	X_1 $max = 12$, $min = 8.5$	X_2 $max = 100$, $min = 0$	X_3	X_4	X_5
A_1	1	0.72	0.3	0.56	0.1
A_2	0.28	0.86	0.9	0.97	0.9
A_3	0.57	0.5	0.6	0.12	0.9
A_4	0	0.86	0.9	0.97	0.9

6.1 Lexikografikus módszer

A célok között fontossági sorrendet állítunk fel. Ezután választjuk a legfontosabb szempontot, megnézzük, hogy eldönti-e az alternatívák választását. Ha egy kiemelkedik akkor azt választjuk, ha nem akkor folytatjuk a második legfontosabb döntéssel mindaddig, míg egyetlen alternatíva nem marad.

Pl: legfontosabb szempont, hogy legyen biciklitárolási lehetőség, második pedig a lakás ára. Ebben az esetben a legfontosabb cél szerint két alternatíva marad, de a lakás ára alapján már egyértelműen lehet dönteni a fennmaradó két alternatíva közül.

6.2 Maximin módszer (pesszimista döntéshozó)

Az értékek azonos, normalizált skálán vannak. Minden alternatívához megkeresi a felvett leggyengébb értéket és azok közül kiválasztja a legjobbat.

A példában az utolsó alternatíva legrosszabb értéke 0, az $A1$-é 0.1, az $A2$-é 0.28, míg az $A3$-é 0.12, így ezeknek a maximuma 0.28, ezért az $A2$ alternatívát választjuk.

6.3 Maximax módszer (optimista döntéshozó)

Minden alternatívához megkeresi a felvett legjobb értéket és ezek közül kiválasztja a legjobbat.

A példában az első alternatíva legjobb értéke 1, így ezt az alternatívát választjuk. A táblázat értékeiből kreált max és min értékek az első kritériumot univerzálisan legfontosabb kritériummá tette. Érdemesebb lehet szakértői min max értékekkel normalizálni.

A skálák meghatározásának nehézségére és az egyes kritériumok értékeinek becslésére megoldás: értékelő függvény alkalmazása.

7 Értékelő függvények

Preferencia reláció: Adott értékelésre váró alternatívák A halmaza (akár véges vagy végtelen számosságú). Ebből vegyünk egy (a, b) rendezett elempárt és definiáljunk felettük egy "legalább olyan jó, mint" relációt ($\succeq$). Tehát $a \succeq b$ akkor és csak akkor, ha a legalább olyan jó mint b.

(Nagyon sok más preferencia alapú döntési módszer létezik, ezekből egy az értékelő függvény alapú)

Értékelő függvény: $v : A \to \mathbb{R}$, ahol $v(a) \geq v(b) \Leftrightarrow a \succeq b$

7.1 Preferenciareláció tulajdonságai

További relációk bevezetése:

- **indifferencia:** teljesül $a \succeq b$ és $b \succeq a$ is $\Rightarrow a \sim b$
- **nem összehasonlíthatóság:** nem teljesül se a $a \succeq b$ és se a $b \succeq a \Rightarrow a\ ?\ b$
- **szigorú preferencia:** teljesül $a \succeq b$, de $b \succeq a$ nem teljesül $\Rightarrow a \succ b$ (a egyértelműen jobb, mint b)

Definícióból adódó fontos tulajdonságaik:

- **preferencia reláció reflexív:** $a \succeq a$, tehát a legalább olyan jó, mint a mindenképpen teljesül
- **indifferencia reflexív:** $a \sim a$, a mindenképpen indifferens a-hez.
- **indifferencia szimmetrikus:** $b \sim a \Rightarrow a \sim b$

Ahhoz, hogy v-t megkonstruáljuk a $\succeq$-nak gyenge rendezésnek kell lennie. **Gyenge rendezés:** reflexív, tranzitív és teljes. **Kikötjük, hogy $\succeq$ legyen gyenge rendezés.**

- A reflexivitás a definíció alapján teljesül.
- Emellé felvesszük, hogy $\succeq$ **tranzitív**, tehát $a \succeq b$ **és** $b \succeq c$ estén teljesülnie kell $a \succeq c$ (ez nehéz!! foci **körbeverés** példa, racionális döntéshozó).
- A teljességhez teljesülnie kell, hogy $\forall (a, b) \in A : a \succeq b$ vagy $b \succeq a$. **Nem adhatunk "nemtudom" választ, nincs ?, minden elemre meg kell adni a preferenciát.**

Következmények: $\sim$ is tranzitív lesz. Tehát a $\sim$ **ekvivalencia reláció** (reflexív, tranzitív, szimmetrikus). Ennek köszönhetően $\sim$ **indifferencia osztály**okat generál A felett (azok az alternatívák, amik ugyanolyan jók, azonos indifferencia osztályba sorolhatók).

Az **indifferencia osztályok halmaza megszámlálható**: ez azt jelenti, hogy az alternatívák véges sok osztályba sorolhatóak.

Minden adott v létezéséhez.

7.2 Értékelő függvény létezése

Ha a $\succeq$ reláció gyenge rendezés az A halmaz elemeire vonatkozóan, és az indifferencia osztályok halmaza megszámlálható $\Rightarrow \exists v : A \to \mathbb{R}$, ahol $\forall (a, b) \in A$ teljesül, hogy

- $a \succeq b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b)$, (vagy
- $a \succ b \Leftrightarrow v(a) > v(b)$, és $a \sim b \Leftrightarrow v(a) = v(b)$.)

(Bizonyítás Fishburn (1970), de nem kell itt, mert nem konstruktív)

Tulajdonságok:

1. A v értéke általában a [0,1] intervallumra skálázódik és a 0 jelenti a legrosszabb preferencia értéket és az 1 a legjobbat. Közbeeső értékek megegyeznek a preferenciarendezés értékeivel.
2. Számszerű értéket ad arra, hogy egyik alternatívát jobban preferáljuk a másiknál. Növekvő preferencia sorrend $\to$ az értékelő függvény **monoton növekvő** (ez eltérhet, de azt nem vizsgáljuk).
3. **Stratégiailag ekvivalens** értékelő függvények: az alternatívákhoz ugyan azt a preferencia sorrendet határozza meg.
4. Racionális a döntéshozó $\Rightarrow$ létezik értékelő függvény.

A fenti tétel, túl szigorú az indifferencia osztályok megszámlálhatóságáról. Ha gyengítjük a feltételt akkor is megkaphatjuk v létezését: Legyen a feltételünk az, hogy $\exists B$ az indifferencia osztályok egy részhalmaza, amelyre teljesül:

- B megszámlálható,
- $\forall A_1, A_2$ indifferencia osztály részhalmazra: $\exists C \in B$, hogy $A_1 \succ C \succ A_2$ (tehát sűrű a $\succ$ rendezésre).

Ekkor teljesül v létezése. Összefoglalva ez annyit jelent, hogy ha létezik olyan véges indifferencia osztályok részhalmaza, amihez megadható olyan rendezés, ami egyértelműen rendezni tudja az ezen a részhalmazon túli indifferencia osztályokat is, akkor létezik hozzá értékelő függvény. (Ez egy jó dolog!)

Speciális eset: A n dimenziós vektortér. Tehát $\forall a \in A$ alternatíva $x_1^{(a)}, ..., x_n^{(a)}$ komponenssel (tulajdonság) jellemzett. Ebben az esetben az alábbi két feltétel teljesülése esetén garantált v létezése:

- monotonitási (dominancia) feltétel: ha a tulajdonságonként mindenben legalább olyan jó, mint b, de legalább 1 tulajdonságban szigorú egyenlőtlenség áll fenn akkor $a \succ b$.
- folytonossági feltétel: $\forall a, b, c \in A$, ahol $a \succ b \succ c \Rightarrow \exists k \in (0, 1) : b \sim k \cdot a + (1 - k) \cdot c$

Továbbiakban ezt a speciális esetét vizsgáljuk.

7.3 Értékelő függvények dekompozíciós alakjai

Def: Preferencia struktúra **dekomponálható**, ha $\exists v_1 : X_1 \to \mathbb{R}$, ..., $v_n : X_n \to \mathbb{R}$ és $\exists v : A \to \mathbb{R}$ függvények, hogy $\forall a', a'' \in A : a' \succeq a'' \Leftrightarrow$

$$v(x_1^{(\prime)}, .., x_n^{(\prime)}) = v[v_1(x_1^{(\prime)}), ..., v_n(x_n^{(\prime)})] \geq v(x_1^{(\prime\prime)}, .., x_n^{(\prime\prime)}) = v[v_1(x_1^{(\prime\prime)}), ..., v_n(x_n^{(\prime\prime)})] \quad (1)$$

Speciális dekomponálható preferencia struktúrák:

- additív alak: $v[v_1(x_1), ..., v_n(x_n)] = k_1 \cdot v_1(x_1) + ... + k_n \cdot v_n(x_n)$
- multiplikatív alak: $v[v_1(x_1), ..., v_n(x_n)] = \frac{1}{K} \cdot [\prod_{i=1}^n (1 + K \cdot k_i \cdot v_i(x_i)) - 1]$
- kvázi additív alak: $v[v_1(x_1), ..., v_n(x_n)] = \sum_{i=1}^n k_i \cdot v_i(x_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n k_{ij} \cdot v_i(x_i) \cdot v_j(x_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \sum_{k>j}^n k_{ijk} \cdot v_i(x_i) \cdot v_j(x_j) \cdot v_k(x_k) + ... + k_{1..n} \cdot v_1(x_1) \cdot ... \cdot v_n(x_n)$

7.4 Additív értékelő függvények

Legyen $a = (x_1^{(a)}, ..., x_n^{(a)}), b = (x_1^{(b)}, ..., x_n^{(b)}) \in A$. Ekkor a preferencia struktúra **additív** $\Leftrightarrow$ teljesül:

- $v(a) = k_1 \cdot v_1(x_1^{(b)}) + ... + k_n \cdot v_n(x_n^{(b)})$, ahol $k_i > 0$ skálázó konstansok, összegük 1.

7.4.1 Preferencia-függetlenség:

Példa: $T =$(édesség,évszak)

	édesség	évszak
A_1	fagyi	nyár
A_2	fagyi	tél
A_3	süti	nyár
A_4	süti	tél

Tegyük fel, hogy valaki nyáron a fagyit, télen a tortát részesíti előnyben akkor: (fagyi, nyár) $\succeq$ (süti, nyár) $\Rightarrow$ (süti, tél) $\succeq$ (fagyi, tél). Ekkor azt mondjuk, hogy az édesség preferenciafüggő az évszaktól. **Ez fordítva nem feltétlenül mondható ki.** NEM SZIMMETRIKUS. Pl: (nyár, fagyi) $\succeq$ (tél, fagyi), de (nyár, süti) $\succeq$ (tél, süti)

Példa: $T =$(íz,édesség,évszak)

	íz	édesség	évszak
A_1	vanília	fagyi	nyár
A_2	csoki	fagyi	nyár
A_3	vanília	fagyi	tél
A_4	csoki	fagyi	tél
A_5	vanília	torta	nyár
A_6	csoki	torta	nyár
A_7	vanília	torta	tél
A_8	csoki	torta	tél

Ebben az esetben viszont feltesszük azt, hogy függetlenül az évszaktól és az édesség típusától a csokisat preferáljuk a vaníliással szemben. Tehát: (csoki, fagyi) $\succeq$ (vanília, süti) $\Rightarrow$ (csoki, süti) $\succeq$ (vanília, fagyi) és (csoki, nyár) $\succeq$ (vanília, nyár) $\Rightarrow$ (csoki, tél) $\succeq$ (vanília, nyár). Ekkor az íz preferenciafüggetlen a többi kritériumtól.

Definíció: Legyen $T = (X_1, ..., X_m)$ tényezőhalmaz, $C \subseteq T$ tényezőrészhalmaz, $C^* \subseteq T$ komplementerhalmaz. Ekkor C preferencia független C^*-tól $\Leftrightarrow$ ha $\forall x_C^{(\prime)}, x_C^{(\prime\prime)} \in X_C$: egy tetszőleges $x_{C^*}^0 \in X_{C^*}$ esetén teljesül minden más $x_{C^*} \in X_{C^*}$ -re, hogy:

$$(x_C^{(\prime)}, x_{C^*}^0) \succeq (x_C^{(\prime\prime)}, x_{C^*}^0) \Rightarrow (x_C^{(\prime)}, x_{C^*}) \succeq (x_C^{(\prime\prime)}, x_{C^*}) \tag{2}$$

Kölcsönös preferencia függetlenség: ez az előző definícióval szemben a teljes tényezőhalmazra vonatkozik. Méghozzá akkor és csak akkor teljesül ha, minden $C \subseteq T$ preferencia független C^*-tól.

A kölcsönös preferencia függetlenség az additív preferencia struktúra létezésének a szükséges és elégséges feltétele (kivéve kétdimenziós esetben).

7.4.2 Kétdimenziós eset

$T = (X_1, X_2)$

Egyszerűsítési feltétel: kielégíthető, ha $\forall x_1, y_1, z_1 \in X_1$ és $\forall x_2, y_2, z_2 \in X_2$-re teljesül:

$$(x_1, z_2) \succeq (z_1, y_2) \text{ és } (z_1, x_2) \succeq (y_1, z_2) \Rightarrow (x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \tag{3}$$

Ennek a feltételnek a teljesülése és a fent megadott kölcsönös preferenciafüggetlenség teljesülése elegendő és szükséges feltétele az additív értékelőfüggvény létezésének. Túl szigorú feltétel.

Thomsen feltétel: kielégíthető, ha $\forall x_1, y_1, z_1 \in X_1$ és $\forall x_2, y_2, z_2 \in X_2$-re teljesül:

$$(x_1, z_2) \sim (z_1, y_2) \text{ és } (z_1, x_2) \sim (y_1, z_2) \Rightarrow (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \tag{4}$$

Ennek a feltételnek a teljesülése és a fent megadott kölcsönös preferenciafüggetlenség teljesülése elégséges és szükséges feltétele az additív értékelőfüggvény létezésének. Ez már jó.

Visszatérve nem kétdimenziós esetre, ott azért elegendő a kölcsönösen preferenciafüggetlenség, mert azokban az esetekben ez **páronként teljesíti az egyszerűsítési feltételt, ami pedig garantálja a páronkénti Thomsen feltételt**.

7.5 Kvázi additív értékelő függvények

Legyen $a = (x_1, ..., x_n) \in A$. Ekkor a preferencia struktúra **kvázi additív** $\Leftrightarrow$ teljesül:

$$\begin{aligned} v(a) = &\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot v_i(x_i) + \\ &\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} k_{ij} \cdot v_i(x_i) \cdot v_j(x_j) + \\ &\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \sum_{k>j}^{n} k_{ijk} \cdot v_i(x_i) \cdot v_j(x_j) \cdot v_k(x_k) + ... \\ &+ k_{1..n} \cdot v_1(x_1) \cdot ... \cdot v_n(x_n). \end{aligned} \tag{5}$$

A kvázi additív alak jó tulajdonságai:

1. Legyen $\sum_i k_i = 1$ és $k_{ij} = 0, \; ... \; , k_{1..n} = 0$. Ekkor pontosan az additív alakot fogjuk kapni.

2. Legyen $k_i > 0$ és $k_{ij} = K \cdot k_i \cdot k_j$, ... , $k_{1..n} = K^{n-1} \cdot k_1 \cdot ... \cdot k_n$. Ekkor a kvázi additív alak a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} v[v_1(x_1), ..., v_n(x_n)] = &\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot v_i(x_i) + \\ &+ K \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} k_i \cdot k_j \cdot v_i(x_i) \cdot v_j(x_j) + \\ &+ K^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \sum_{k>j}^{n} k_i \cdot k_j \cdot k_k \cdot v_i(x_i) \cdot v_j(x_j) \cdot v_k(x_k) + \\ &+ ... + K^{n-1} \cdot k_1 \cdot ... \cdot k_n \cdot v_1(x_1) \cdot ... \cdot v_n(x_n). \end{aligned} \tag{6}$$

Ezt tekintsük egy egyenletnek, megszorozzuk mindkét oldalról K majd hozzáadunk 1-et:

$$\begin{aligned} 1 + K \cdot v[v_1(x_1), ..., v_n(x_n)] = &1 + K \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot v_i(x_i) + \\ &+ K^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} k_i \cdot k_j \cdot v_i(x_i) \cdot v_j(x_j) + \\ &+ K^3 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \sum_{k>j}^{n} k_i \cdot k_j \cdot k_k \cdot v_i(x_i) \cdot v_j(x_j) \cdot v_k(x_k) + \\ &+ ... + K^n \cdot k_1 \cdot ... \cdot k_n \cdot v_1(x_1) \cdot ... \cdot v_n(x_n) \end{aligned} \tag{7}$$

Ekkor szorzattá alakítható (ha nem hiszed, próbáld ki a kéttényezős esetet!), majd átrendezhető:

$$\begin{aligned} 1 + K \cdot v[v_1(x_1), ..., v_n(x_n)] &= [1 + K \cdot k_1 \cdot v_1(x_1)] \cdot ... \cdot [1 + K \cdot k_n \cdot v_n(x_n)] \\ v[v_1(x_1), ..., v_n(x_n)] &= \frac{1}{K}([1 + K \cdot k_1 \cdot v_1(x_1)] \cdot ... \cdot [1 + K \cdot k_n \cdot v_n(x_n)] - 1) \end{aligned} \tag{8}$$

Ez a szorzat megfelel a multiplikatív alakkal.

Def: Egy $v : A \to \mathbb{R}$ **mérhető** $\Leftrightarrow$ v tükrözi **(1)** az A-beli elemek sorrendjét és **(2)** az elemek különbségeinek a sorrendjét.

A mérhető v létezésének vizsgálata nehézkes (itt most nem térünk ki rá).

Differenciaképzés: $\circ$.

Mérhetőség feltétele: v mérhető, ha $\forall a, b, c, d \in A : a \circ b \succeq^* c \circ d \Leftrightarrow v(a) - v(b) \geq v(c) - v(d)$

Definíció: Legyen $T = (X_1, ..., X_m)$ tényezőhalmaz, $C \subseteq T$ gyenge differencia-független $C^* \subseteq T$-tól $\Leftrightarrow$ ha $\forall w_C, x_C, y_C, z_C \in X_C$: valamely $w^0_{C^*} \in X_{C^*}$ esetén teljesül minden más $w_{C^*} \in X_{C^*}$ -re, hogy: $(w_C, w^0_{C^*}) \circ (x_C, w^0_{C^*}) \succeq^* (y_C, w^0_{C^*}) \circ (z_C, w^0_{C^*}) \Rightarrow (w_C, w_{C^*}) \circ (x_C, w_{C^*}) \succeq^* (y_C, w_{C^*}) \circ (z_C, w_{C^*})$

Kvázi additivitási tétel Tegyük fel, hogy

- létezik v mérhető értékelő függvény
- a legkevésbé preferált $a^0 : v(a^0) = 0$ és a legjobban preferált $a^* : v(a^*) = 1$
- hasonlóan $\forall i \in 1, .., n$: a legkevésbé preferált x^0_i : $v_i(x^0_i) = 0$ és a legjobban preferált x^*_i : $v_i(x^*_i) = 1$.

Ha $\forall i \in 1, .., n : X_i$ tényező gyenge-differenciafüggetlen a komplementerhalmazától, akkor v **felírható kvázi additív alakban**.

7.6 Multiplikatív értékelő függvények

Legyen $a = (x_1^{(a)}, ..., x_n^{(a)}) \in A$. Ekkor a preferencia struktúra **multiplikatív** $\Leftrightarrow$ teljesül:

$$v(a) = \frac{1}{K}([1 + K \cdot k_1 \cdot v_n(x_1)] \cdot ... \cdot [1 + K \cdot k_n \cdot v_n(x_n)] - 1) \tag{9}$$

A multiplikatív alak létezéséhez (kettőnél nagyobb dimenziós esetben) a kölcsönös preferenciafüggetlenség helyett elegendő a következő feltétel: $\exists i$ index, amelyre $C = \{X_i\}$ tényezőrészhalmaz gyenge differencia független a komplementerétől és ugyanez az i index mellett teljesül, hogy $\forall j = 1, ..., n, j \neq i : C' = \{X_i, X_j\}$ preferenciafüggetlen a komplementerétől. Ez könnyebben teljesül az additív alak létezési feltételénél, de szigorúbb a kvázi-additív alakénál.

K skálázási konstans meghatározása 2D ($n = 2$) esetben:

$$\begin{aligned} v(a) =& k_1 \cdot v_1(x_1) + k_2 \cdot v_2(x_2) + \\ & K \cdot k_1 \cdot v_1(x_1) \cdot k_2 \cdot v_2(x_2) \end{aligned} \tag{10}$$

Fejezzük ki K-t a k_i-kből, legyen $K = \dfrac{1 - (k_1 + k_2)}{k_1 \cdot k_2}$. Ekkor:

$$\begin{aligned} v(a) =& k_1 \cdot v_1(x_1) + k_2 \cdot v_2(x_2) + \\ & \frac{1 - (k_1 + k_2)}{\cancel{k_1 \cdot k_2}} \cdot \cancel{k_1} \cdot v_1(x_1) \cdot \cancel{k_2} \cdot v_2(x_2) \\ =& k_1 \cdot v_1(x_1) + k_2 \cdot v_2(x_2) + [1 - (k_1 + k_2)] \cdot v_1(x_1) \cdot v_2(x_2) \end{aligned} \tag{11}$$

Ahol az alábbi 3 eset állhat elő:

1. eset: $k_1 = 0$ és $k_2 = 0 \Rightarrow v(a) = v_1(x_1) \cdot v_2(x_2), K \to \infty$. Konjukció, ÉS operátor.

2. eset: $k_1 = 1$ és $k_2 = 1 \Rightarrow v(a) = v_1(x_1) + v_2(x_2) - v_1(x_1) \cdot v_2(x_2), K = -1$. Diszjunkció, VAGY operátor.

3. eset: $k_1 + k_2 = 1 \Rightarrow v(c) = k_1 \cdot v_1(x_1) + k_2 \cdot v_2(x_2), K = 0$. Átlag művelet. (Additív alak)

A k_i-k tekinthetőek az adott tényezőhöz tartozó súlyozásként, a K pedig azért felelős többek között, hogy az értékelés a $[0, 1]$ intervallumba skálázódjon. A fentiek alapján a K a $[-1, \infty]$ intervallumról vesz fel értéket. Ez határérték vizsgálatokkal kettőnél több tényezős esetben is belátható.

7.7 Értékelő függvények megkonstruálása

Jelölések:

A	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
a_1	$v_1(x_1^{(1)})$	$v_2(x_2^{(1)})$	$v_3(x_3^{(1)})$	$v_4(x_4^{(1)})$	$v_5(x_5^{(1)})$
a_2	$v_1(x_1^{(2)})$	$v_2(x_2^{(2)})$	$v_3(x_3^{(2)})$	$v_4(x_4^{(2)})$	$v_5(x_5^{(2)})$
a_3	$v_1(x_1^{(3)})$	$v_2(x_2^{(3)})$	$v_3(x_3^{(3)})$	$v_4(x_4^{(3)})$	$v_5(x_5^{(3)})$

Ezekből meg szeretnénk kapni a $v(a_1), v(a_2), v(a_3)$-kat. Ez így többtényezős alak, ha az egyes $v_i(x_i^{(j)})$-ket tekintjük, akkor pedig az egytényezős értékelő függvényeket vizsgáljuk.

7.7.1 Többtényezős értékelőfüggvény

Hipotézisek alakra vonatkozó tesztekből:

- Kölcsönös preferenciafüggetlenség (2D esetben Thompsen feltétel) vagy a páronkénti Thompsen feltétel teljesülése $\Rightarrow$ additív alak
- Kölcsönös gyenge differenciafüggetlenség és kritériumpárokra nézve kölcsönös preferenciafüggetlenség $\Rightarrow$ multiplikatív forma
- Kölcsönös gyenge differenciafüggetlenség $\Rightarrow$ kvázi additív forma
- Minden más esetben $\Rightarrow$ egyéb formák

Konstruálás:

1. Többtényezős értékelőfüggvény létezésének verifikálása. Pl: teljesül-e a preferencia struktúrára a gyenge rendezés tulajdonságai. Ha nem teljesül, akkor rossz a preferencia struktúra, megkérjük a döntéshozót, hogy racionális preferencia struktúrát állítson fel.
2. Megfelelő alakú függvényforma kiválasztása. Főleg a (gyenge differencia, és preferencia, Thompsen) függetlenségi tesztek alapján történik. Mivel ezek közül csak a preferencia függetlenség ellenőrizhető intuitíven, ezért általában multiplikatív alak használata javasolt.
3. Az összetevő egydimenziós értékelő függvények megkonstruálása. (7.7.2.-ban bemutatottak alapján)
4. Konstansok kiválasztása: Kellő mennyiségű preferencia információ alapján felírunk egy konstansokra vonatkozó független egyenletrendszert, megoldjuk. (Konkrét megvalósítással nem foglalkozunk, hasonló a multiplikatív konstansok beállításához.)
5. Konzisztencia ellenőrzés, elemzés. (Döntéshozóval együtt, kérdezéses módszerrel)

7.7.2 Egydimenziós értékelőfüggvény

1. **A döntéshozó direkt értékelést ad.** Általában nem tud, nehéz, nem lesz konzisztens. (Az elemi módszereknél ezzel próbálkoztunk).
2. **Lineáris értékelő függvény:** meghatározzuk az adott tényező szélső értékeit és a közötte lévő részt egyszerűen behúzzuk egy egyenessel.

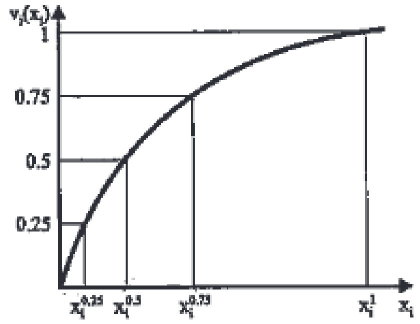
   Ennek a módszernek az alapján lehetséges bármely más görbe használata is (például szigmoid).
3. **Felező módszer:** Az eljárást minden $X_k \in X$ tényezőre végrehajtjuk:
   (a) Adjunk meg egy egyértelmű rendezést a lehetséges tényező értékek felett.
   (b) Válasszuk ki a legkevésbé kívánatos x_k^0 és a leginkább kívánatos x_k^* tényezőértéket. A valós értéküket rögzítsük: $v(x_k^0) = 0$, $v(x_k^*) = 1$
   (c) Amíg nem találjuk meg a x_k^0 és a x_k^* középpontját, vegyünk egy tetszőleges $x_k' \in X_k$ tényezőértéket és kérdezzük meg a döntéshozót, hogy értékelje a x_k^0-ből és a x_k^*-ből való elmozdulást a vizsgált tényezőérték esetében. Ha a két elmozdulás között eltérés van, akkor

vegyünk egy további tényezőértéket abból az intervallumból, ahol a középpont várhatóan megtalálható lesz. Ha megvan akkor $v(x_k^{0.5}) = v(x'_k) = 0.5$ és ekkor léphetünk a következő lépésre.

(d) Az előző lépés alkalmazása a x_k^0 és a $x_k^{0.5}$ közötti $x_k^{0.25}$ és a $x_k^{0.5}$ és a x_k^* közötti $x_k^{0.75}$ középpont megtalálásáért.

(e) Konzisztencia ellenőrzés: a kapott $x_k^{0.25}$ és $x_k^{0.75}$ középpontja valóban a $x_k^{0.5}$?

(f) Ismételjük a (c) lépéstől, a részletezni kívánt intervallumon, addig míg elegendő pont nem lesz a görbe illesztéséhez. A görbének rendelkeznie kell a korábban vizsgált tulajdonságokkal (folytonosság, monotonitás)



8 Döntés bizonytalanság mellet (sztochasztikus modellek)

Sztochasztikus döntési modell esetében a vizsgálat értékeink kibővülnek a természet egyes állapotainak valószínűségével (s_k). **Kockázatos döntések.**

Feladat: Befektetési feladat: rendelkezünk 12 millió forint befektetésre szánt pénzzel. Két befektetési lehetőségen gondolkozunk: vehetünk belőle 10 ha jó minőségű termőföldet, vagy az aktuális alapkamaton elérhető banki lekötést választjuk.

A termőföld vásárlása esetén egyrészt a termőföld éves bérbeadásából származó nyereséget könyvelhetjük el, másrészt a jó minőségéből és a piaci környezetből adódóan évről-évre folyamatosan emelkedik az értéke. A példában egy év alatt 2 millió forint nyereség várható.

A környéken nem megoldott a kellő hulladékkezelés. Ennek köszönhetően várhatóan egy hulladéklerakó fog létesülni a termőföldünk szomszédságában. A beruházásra nincs meg a kellő forrás. A helyi önkormányzat ezt a forráshiányt a kellő biztonsági intézkedéseken spórolná meg, így a híg hulladéklé a termőföldünkön folyna keresztül és összességében 90%-kal esne vissza a termőföldünk értéke és a termés is tönkremegy (nem lesz belőle bevételünk). A rendelkezésre álló információk alapján 25%-ra becsüljük annak a valószínűségét, hogy a hulladéklerakó megépül.

Ugyanakkor lelkes helyi civilek aláírásgyűjtésbe kezdenek a hulladéklerakó távolabbra és biztonságosabb elhelyezéséért. Ha a kezdeményezés sikeres akkor ebben az esetben nem valósulna meg a beruházás. Mivel a környék eleve forráshiánnyal küzd ezért ennek az esetnek (hulladéklerakó nem megépülése) szerintünk 75% a becsült esélye.

A másik lehetőségünk, hogy banki lekötésbe fektetjük a pénzünk. Ha ez mellett nem lesz új beruházás (hulladéklerakó) számolnunk kell azzal, hogy a jelenlegi 3.8%-os alapkamatot az MNB tovább vágja 3%-ra, ami érinti a banki lekötésünket. Ellenkező esetben marad a kamatszint.

Események	**Cselekvési lehetőségek**	
	s_1 = hulladéklerakó épül	s_2 = nincs új beruházás
a_1 = termőföldvásárlás	-10 800	2 000
a_2 = pénz a bankban	456	360

$P(s_1) = 0.25, P(s_2) = 0.75$ szubjektív valószínűségi értékek (becslések).

8.1 Döntés a pénzérték alapján

A döntésben csak a nyereségértékeket vesszük figyelembe a valószínűségeket nem.

Pesszimista, maximin kritérium: sorminimumok maximuma $\rightarrow a_2$

Optimista, maximax kritérium: sormaximumok maximuma $\rightarrow a_1$

De pénzérték alapján ezen enyhíteni szoktak $\rightarrow$ optimizmus együttható: *Hurwick-féle* α, a döntéshozó α arányban optimista és $1-\alpha$ arányban pesszimista. Legyen például $\alpha \leftarrow 0.8$, ekkor a példánkban:

$$H_{a_1} \leftarrow 0.8 \cdot 2000 + 0.2 \cdot -10800 = -560$$
$$H_{a_2} \leftarrow 0.8 \cdot 456 + 0.2 \cdot 360 = 436.80$$

A döntést a $max\{H_{a_1}, H_{a_2}\}$ alapján hozzuk, így az a_1-et választjuk.

8.2 Döntés a valószínűségérték alapján

Maximum likelihood kritérium: azt választjuk, amelynek a legnagyobb a bekövetkezési valószínűség mellett legnagyobb a pénzértéke.

Tehát a $P(s_2)$-nek a legnagyobb a valószínűsége, így az a_1-t választjuk.

8.3 Döntés a várható pénzérték alapján

Alternatívánként vesszük a természet állapotaihoz tartozó várható pénzértéket és azok valószínűségét. Kiszámoljuk az állapotok becsült valószínűségekkel súlyozott összegeit és kiválasztjuk közülük a maximálisat.

$VP(a_1) = 0.25 \cdot -10800 + 0.75 \cdot 2000 = -1200$

$VP(a_2) = 0.25 \cdot 456 + 0.75 \cdot 360 = 384$

Az a_2-t választjuk.

8.4 Döntés az elmulasztott nyereség alapján

Ebben az esetben se vesszük figyelembe a valószínűségeket. Ugyanakkor a pénzérték helyett itt az adott esemény által elérhető maximális nyereségtől való eltérést vesszük. Ezek alapján a táblázatunk a következőképpen néz ki:

Események	**Cselekvési lehetőségek**	
	s_1 = hulladéklerakó épül	s_2 = nincs új beruházás
a_1 = termőföldvásárlás	11 256	0
a_2 = pénz a bankban	0	1640

A döntést az alternatívánkénti (soronkénti) maximális értékek minimuma fogja adni. Tehát az a_2-t választjuk.

8.5 Döntés a várható elmulasztott nyereség alapján

Az előzővel teljesen azonosan, azt leszámítva, hogy az elmulasztott nyereség táblázatából vesszük az értékeket és itt a minimálisat választjuk.

$VE(a_1) = 0.25 \cdot 11256 + 0.75 \cdot 0 = 2814$

$VE(a_2) = 0.25 \cdot 0 + 0.75 \cdot 1640 = 1230$

Az a_2-t választjuk.

8.6 Döntés a rendelkezésre álló információ alapján

Azonos a 8.3 szekcióban bemutatottakkal, várható pénzértéket számolunk. Annyival bővül, hogy itt kihangsúlyozzuk azt, hogy a valószínűségeket *rendelkezésre álló információnak* tekintjük. Tehát azok szubjektív valószínűségek.

$VPRI(a_1) = 0.25 \cdot -10800 + 0.75 \cdot 2000 = -1200$

$VPRI(a_2) = 0.25 \cdot 456 + 0.75 \cdot 360 = 384$

$VPRI = max\{VPRI(a_1), VPRI(a_2)\} = 384$

A tökéletes információ várható pénzértéke: ha élne egy jós, aki meg tudná mondani, hogy elindul-e a beruházás, akkor ennek az információnak mekkora a pénzértéke? Mennyit fizessünk a jósnak, ha tökéletes információt tud mondani?

Lehetséges előrejelzés:

- ha s_1 lesz a jós szerint $\rightarrow$ optimális cselekvés: a_2 és a $VP(a_2) = 0.25 \cdot 456 = 114$
- ha s_2 lesz a jós szerint $\rightarrow$ optimális cselekvés: a_1 és a $VP(a_1) = 0.75 \cdot 2000 = 1500$

A tökéletes információ várható pénzértéke ennek a két lehetőségnek az összege:

$VPTI = 114 + 1500 = 1614$

"Mennyit fizessünk a jósnak?" kérdésre a válasz: $VPTI - VPRI = 1614 - 384 = 1230$ (ez egy maximum érték, ennél többet nem ér az információ)

8.7 Döntés nem tökéletes információ alapján

Jósok helyett érdemesebb kockázatelemző, előrejelző céget keresni. Ami a következő állításokat teheti:

- z_1 : azt állítják (előrejelzik), hogy s_1 következik be (általánosan: bekövetkezik vmely esemény, itt speciálisan, ez az s_1)
- z_2 : azt állítják, hogy s_2 következik be (általánosan: nem következik be a z_1-ben feltett esemény, itt speciálisan, ez az s_2)

Tegyük fel, hogy a cégről ismert **az előrejelzési pontossága** (korábbi előrejelzéseik pontossága alapján):

- $P(z_1|s_1) = 0.8$
- $P(z_2|s_1) = 1 - P(z_1|s_1) = 0.2$
- $P(z_2|s_2) = 0.9$
- $P(z_1|s_2) = 0.1$

Ezek a **beválási valószínűségek (likelihoodok)**. Akár meg is egyezhetnének a negatív és a pozitív bekövetkezésre, de általában a negatív bekövetkezést könnyebb előre jelezni. Az előző fejezetben például a jósnak 1 volt a találati értéke és 0 a tévesztési mindkét esetben.

Az ilyen feladatok esetében a $P(s_1) = 0.25, P(s_2) = 0.75$ ismert valószínűségi értékeket tekintjük **a priori valószínűségek**nek.

A Bayes-tétellel kiszámolható a posteriori valószínűségeket: $P(s_1|z_1)$, $P(s_2|z_1)$, $P(s_1|z_2)$, $P(s_2|z_2)$

$$P(s_1|z_1) = \frac{P(z_1|s_1) \cdot P(s_1)}{\sum_i P(z_1|s_i) \cdot P(s_i)}$$

$$\vdots \text{ a többit hasnolóan}$$

$$\begin{aligned} P(z_1) &= \sum_i P(z_1|s_i) \cdot P(s_i) = 0.8 \cdot 0.25 + 0.1 \cdot 0.75 = 0.275 \\ P(z_2) &= \sum_i P(z_2|s_i) \cdot P(s_i) = 0.2 \cdot 0.25 + 0.9 \cdot 0.75 = 0.725 \\ P(s_1|z_1) &= \frac{0.2}{0.275} = 0.72727, P(s_1|z_2) = \frac{0.05}{0.725} = 0.06896 \\ P(s_2|z_2) &= \frac{0.675}{0.725} = 0.93103, P(s_2|z_1) = \frac{0.075}{0.275} = 0.27273 \end{aligned} \tag{12}$$

Ezekből pedig kifejezhető az adott alternatíva, adott előrejelzés melletti várható pénzértéke:
$VP(a_1|z_1) = \sum_i v(s_i, a_1) \cdot P(s_i|z_1) = -10800 \cdot 0.72727 + 2000 \cdot 0.27273 = -7309.1$
$VP(a_2|z_1) = \sum_i v(s_i, a_2) \cdot P(s_i|z_1) = 456 \cdot 0.72727 + 360 \cdot 0.27273 = \mathbf{429.82}$
$VP(a_1|z_2) = \sum_i v(s_i, a_1) \cdot P(s_i|z_2) = -10800 \cdot 0.06896 + 2000 \cdot 0.93103 = \mathbf{1117.3}$
$VP(a_2|z_2) = \sum_i v(s_i, a_2) \cdot P(s_i|z_2) = 456 \cdot 0.06896 + 360 \cdot 0.93103 = 366.62$

A nem tökéletes információ várható pénzértéke: Ajánlatot kapunk az eddig vizsgált előrejelző cégtől. 150 ezer forintért előrejelzést adnak a beruházás megépülésére. A kérdés megéri-e ennyiért elfogadni az ajánlatot. Mennyit ér a nem tökéletes információ?

Lehetséges előrejelzés:

- $z_1 \to$ optimális cselekvés: a_2 és a $VP(a_2) = VP(a_2|z_1) \cdot P(z_1) = 429.82 \cdot 0.275 = 118.20$
- $z_2 \to$ optimális cselekvés: a_1 és a $VP(a_1) = VP(a_1|z_2) \cdot P(z_2) = 1117.3 \cdot 0.725 = 810.04$

Nem teljes információhoz tartozó pénzérték: $VPNTI = \sum_j VP(a_j) = 810.04 + 118.20 = 928.24$

A "Mennyit fizessünk legfeljebb az előrejelző cégnek?" kérdése a válasz: $VPNTI - VPRI = 928.24 - 384 = 544.24$. Tehát az ajánlatot elfogadjuk.

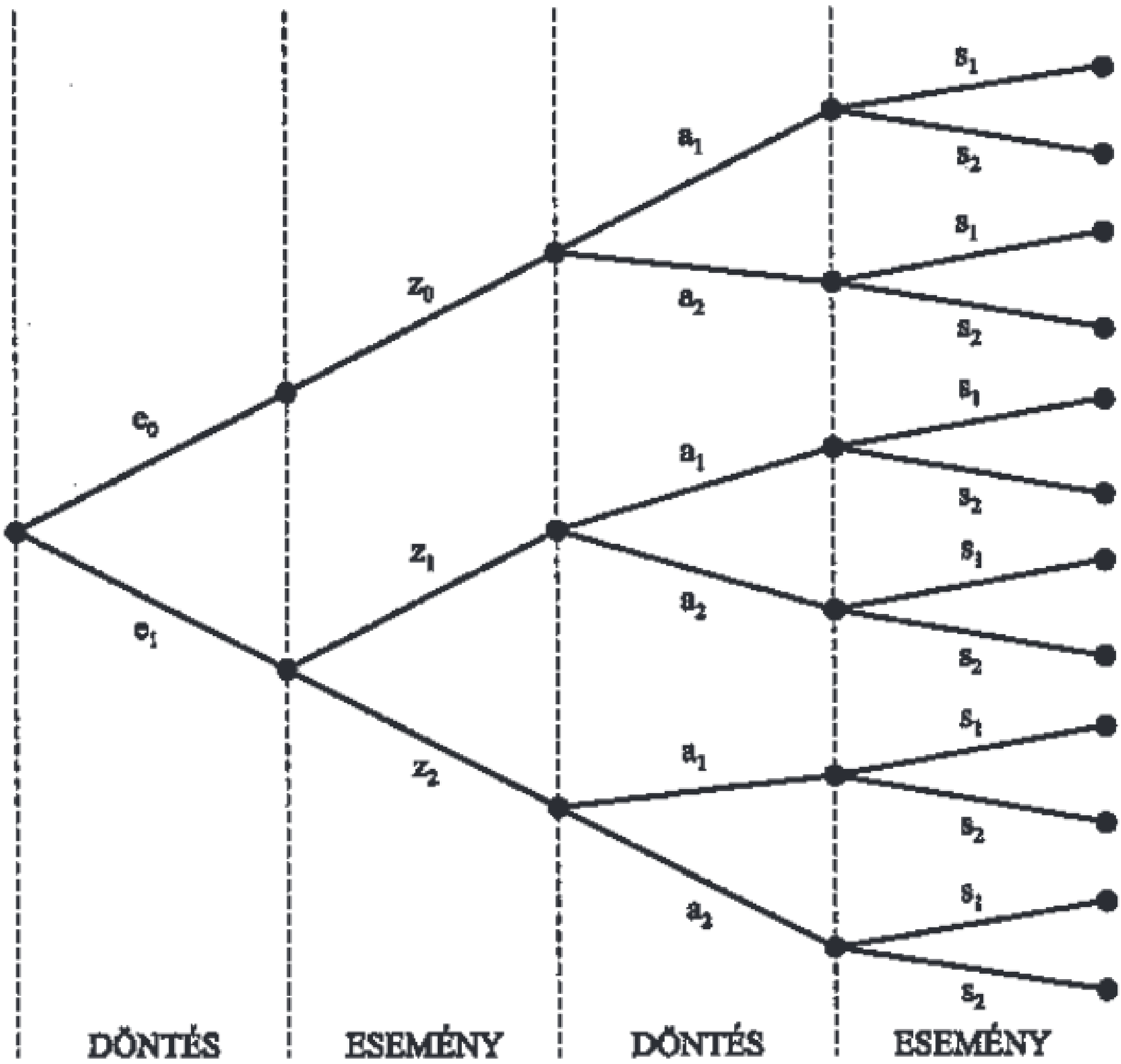
8.8 Döntés döntési fa eljárás alapján

Kiértékelési eljárásnak fogható fel. A döntési fa struktúra itt egy absztrakciós szintként jelenik meg, ami segíti a döntési folyamat átlátását és nem mint egy gépi tanulási eljárás!

A kérdés, amire a megoldást keressük egyrészről az, hogy melyik alternatívát válasszuk, másrészről pedig az, hogy igénybe vegyünk-e (a példában megadott mértékű) d költségű előrejelzést. Tehát a feladat itt nem az információ értékének a kiszámítása, hanem a döntési folyamat egyes lépéseinek és egészének a várható pénzértékének a számítása, melyeket maximalizálni szeretnénk. Így ez megadja az optimális döntéseket az adott szituációkban.

Jelölésben, új cselekvési alternatívákat vezetünk be:

- e_0 : nem veszünk igénybe előrejelzést (ekkor z_0 üres esemény fog megtörténni, $P(z_0) = 1$)
- e_1 : igénybe vesszük az előrejelező céget (ennek a műveletnek d költsége van)



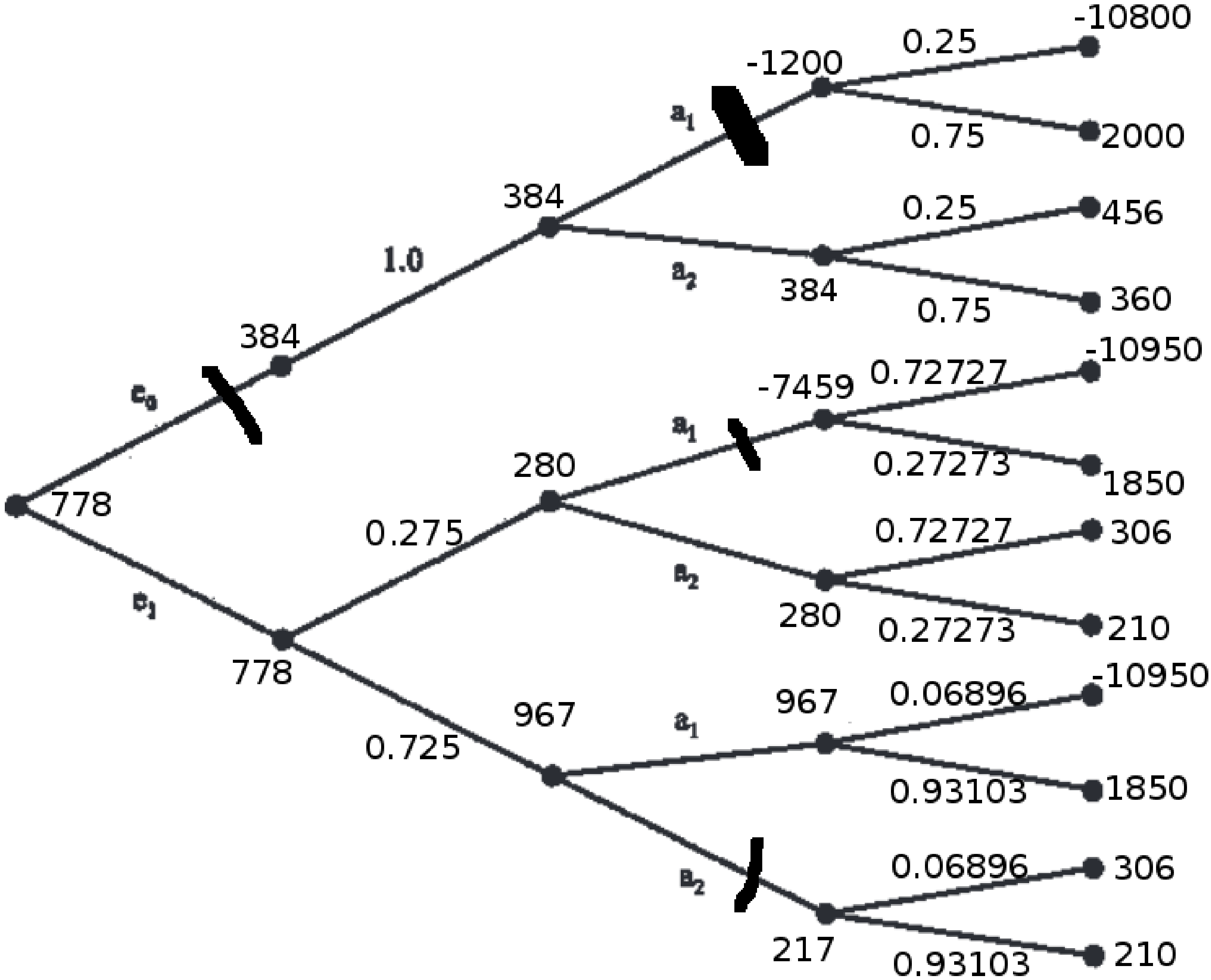
Előkészületek:

- a fát a gyökérből indulva rajzoljuk meg, minden lehetséges döntésnek és lehetséges eseménynek külön ágat húzunk be (fenti ábra).
- az eseményekhez tartozó valószínűségeket be tudjuk helyettesíteni az egyes ágakra. Egy esemény minél mélyebben van, annál több dologtól függ. A lentebbi ágakon a felette lévőekkel alkot feltételes valószínűséget.
- a levelekhez be tudjuk írni az egyes választások pénzértékét a táblázatból (előrejelzés esetében már itt $d = 150$ ezer forinttal terhelt pénzértékeket).

Eljárás: a levélből elindulva, felfelé propagálva kiszámoljuk az egyes csúcsokat (K az aktuális csúcs):

- az események esetében kiszámoljuk a csúcshoz tartozó várható pénzértéket: $VP_K = \sum_{i \in K} ag_i \cdot gyerek_i$
- döntési elágazás: kiválasztjuk a $max_{i \in K}\{gyerek_i\}$ és a nem maximális értékhez tartozó ágat levágjuk. Ez lesz a csúcs várható pénzértéke.

Végül a gyökérben egyetlen várható pénzérték marad és az ahhoz tartozó optimális döntések.



9 Multi-attribute utility theory — Hasznosság függvény

A MAUT egy általános összefoglaló neve a többtényezős hasznosság elméletnek, több tárgyalásban ebbe beleértik az értékelő függvényeket is (azt is hasznosságként kezelik). Az alapfeltevése az, hogy minden döntéshozó megpróbál optimalizálni egy olyan függvényt, amely aggregálja az összes véleményét az adott kérdésben. Ez azt feltételezi, hogy a döntéshozó racionális és optimalizáló szemléletű. (Ennek kritikájáról hallhattunk Ha-Joon Chang és Daniel Kahneman könyve nyomán tartott előadásokban)

A hasznosságelmélet a megértés könnyedsége kedvéért a különböző valószínűségekkel terhelt kimeneteket, egy olyan játékként mutatja be, ahhol a döntéshozónak aközül kell választania, hogy például $\alpha \cdot c^{(j,k)}$ nyer és $(1-\alpha) \cdot c^{(j,l)}$ veszít vagy $\beta \cdot c^{(i,k)}$ nyer és $(1-\beta) \cdot c^{(i,l)}$

Példa: kérdés a döntéshozóhoz: 90%-os eséllyel nyerünk 12 dollárt és 10%-os eséllyel nem nyerünk semmit. Vagy 1%-os eséllyel nyerünk 1 millió dollárt, 99%-os eséllyel nem nyerünk semmit.

Lottery Döntés bizonytalanság esetében a becsült valószínűségi értékkel terhelt kimeneteleket, alternatívákat **kockázatos lehetőségeknek (risky prospect), lotteryknek** nevezzük és $a_p^{(j,k)}$ vagy $a_p^{(j)}$-vel jelöljük. Attól függően, hogy a vizsgált kimenetelhez vagy a teljes alternatívához tartozó lotteryt vizsgáljuk. A lotteryk halmaza A^p. A elemei kifejezhetőek A^p-ből (adott alternatíva rendelkezik becsült valószínűségekkel, a többi 0). Megadhatóak biztos kimenetelek A^p-ből (adott kimenetel valószínűsége 1, minden másé 0).

Tehát sarkosan fogalmazva annyit jelent a lottery, hogy a döntéshozó mennyit hajlandó kockáztatni az alternatíva adott értékéért cserébe.

Preferenciarendezés: lotteryk felett definiáljuk. Az így megadott preferencia struktúra felhasználható a hasznosságfüggvény megkonstruáláshoz.

Várható hasznosságfüggvény: $u : X \to \mathbb{R}$, $U : A^p \to \mathbb{R}$

Döntési szabály megalkotása → Bernoulli elv: A^p elemeihez meghatározzuk a várható értékét (ismerjük a valószínűségeket, és az értékeket), majd azt az alternatívát választjuk, amelyiknek legnagyobb a várható hasznossága: $U(a_p^{(j)}) = \sum_{s_k \in S} P(s_k) \cdot u(c^{(j,k)}) \to$ ezek közül azt az alternatívát választjuk, ahol maximális ez az érték. (Bernoulli elv röviden: várható pénzérték alapján döntünk)

Példa: $U(a_p) = 0.9 \cdot 12 + 0.1 \cdot 0 = 10,8$ és $U(a_q) = 0.9 \cdot 1000000 + 0.1 \cdot 0 = 900000$. Ezek közül az a_q lotteryhez tartozó érték a maximális így ezt preferáljuk. (Ebben az esetben nem alkalmaztuk a u értékelő függvényt, de ha az értékeket normalizáljuk, és ezt tekintenénk értékelésnek, akkor is ezen eredményre jutnánk a döntés szempontjából.)

9.1 Axiómarendszerek (Neumann-Morgenstern)

9.1.1 1. Axióma

A kockázatos lehetőségek A^p halmazán értelmezett $\succeq$ preferencia reláció gyenge rendezés (reflexivitás, tranzitivitás, teljesség). Hasonló indokok miatt kell ezt megkövetelnünk, mint amit már az értékelő függvényeknél láthattunk.

9.1.2 2. Axióma

$a_p \succ a_q \to \forall \alpha \in (0,1) : a_p \succ (\alpha \cdot a_q, (1-\alpha) \cdot a_q) \succ a_q$**.** Szigorú preferencia tulajdonságából származó tulajdonság. Ha egy lotteryt mindenféleképpen jobban preferálunk egy másiknál, akkor akármilyen kombinációjukat vesszük, annál is jobban preferált lesz.

9.1.3 2'. Axióma - Függetlenségi axióma (Fishburn 1970)

$a_p \succ a_q \to \forall \alpha \in (0,1) : (\alpha \cdot a_p, (1-\alpha) \cdot a_r) \succ (\alpha \cdot a_q, (1-\alpha) \cdot a_r)$ **.** A könnyebb igazolhatóság végett a 2.axióma helyett ezt az axiómát használjuk. (Teljesülése esetén nem lehet komplementaritás a két lottery között.)

9.1.4 3. Axióma - Folytonossági axióma

$a_p \succ a_q \succ a_r \rightarrow \exists \alpha, \beta \in (0,1) : (\alpha \cdot a_p, (1-\alpha) \cdot a_r) \succ a_q \succ (\beta \cdot a_p, (1-\beta) \cdot a_r)$ **.** Azt mondja ki, hogy létezik a vizsgált legjobb és legrosszabb érték olyan keverése, ami jobb illetve rosszabb a középső értéknél. Ez általánosságban igaz, akkor sérülhet, ha a legjobb és a középső érték nagyon közel van egymáshoz és a legrosszabb viszont nagyon rossz: a_p nyerünk 100 dollárt, a_q nyerünk 99 dollárt, a_r életfogytiglanig börtönbe kerülünk.

9.1.5 4. Axióma

$\forall \alpha \in [0,1] : (\alpha \cdot a_p, (1-\alpha) \cdot a_q) = ((1-\alpha) \cdot a_q, \alpha \cdot a_p)$ **.** Lényegtelen a sorrend a kombináció esetén.

9.1.6 5. Axióma - Redukciós szabály

$\forall \alpha \in (0,1) : a_r = (\alpha \cdot a_p, (1-\alpha) \cdot a_q) \Leftrightarrow \forall \beta \in (0,1) : (\beta \cdot a_r, (1-\beta) \cdot a_q) = (\alpha \cdot \beta \cdot a_p, (1-\beta \cdot \alpha) \cdot a_q)$**.** Bonyolultan megfogalmazott játékban ugyanakkora esélye van a győzelemnek, mint a vele ekvivalens könnyű játékban. Csak akkor van értelme bonyolultan feltenni a kérdést, ha döntéshozó "élvezetét leli" az összetett játékban.

9.2 Hasznosság függvény létezése és előállítása

9.2.1 Létezési tétel:

Ha az A^p elemeire teljesülnek az 1.,2'.,3.,4.,5. axiómák akkor létezik $U : A^p \rightarrow \mathbb{R}$ hasznosságfüggvény.

9.2.2 Fontos tulajdonság:

az A^p értelmezett $\succeq$ preferencia struktúrára és a $U : A^p \rightarrow \mathbb{R}$ hasznosságfüggvényre teljesül:

1. $a_p \succeq a_q \Leftrightarrow U(a_p) \geq U(a_q)$
2. és $\forall \alpha \in (0,1) : U(\alpha \cdot a_p, (1-\alpha) \cdot a_q) = \alpha \cdot U(a_p) + (1-\alpha) \cdot U(a_q)$

9.2.3 Bizonyítás:

1. Feltétel: bizonyossági egyenérték Bármely biztos kimenethez (c, valószínűsége 1 a többié 0) megadható olyan lottery, amelyet a legjobb ($c^{(max)}$) és a legrosszabb ($c^{(min)}$) kimenetből kevertünk össze.

Tehát $\exists \beta : c \sim (\beta \cdot c^{(max)}, (1-\beta) \cdot c^{(min)}) \equiv a_p$. Ekkor azt mondjuk, hogy $(\beta \cdot c^{(max)}, (1-\beta) \cdot c^{(min)})$ lotterynek a *bizonyossági egyenértéke c.*

2. Feltétel: helyettesítés Az összes kockázatos kimenetel esetén a kimenetelt ($c^{(j,k)}$) bizonyossági egyenértékesként véve helyettesíthető (indifferens) a bizonyossági egyenértékhez tartozó kockázatos kimenettel ($a_p^{(j,k)}$):
$(\alpha^{(1,1)} \cdot c^{(1,1)}, ..., \alpha^{(m,n)} \cdot c^{(m,n)}) \sim (\alpha^{(1,1)} \cdot a_p^{(1,1)}, ..., \alpha^{(m,n)} \cdot a_p^{(m,n)})$

3. Feltétel: redukálhatóság Ez azonos az 5. Axiómával. Amit felhasználunk belőle az az, hogy egy összetett lottery lecserélhető egy egyszerű lotteryre.

4. Feltétel: összehasonlíthatóság
$a_p \sim (\alpha \cdot c^{(max)}, (1-\alpha) \cdot c^{(min)})$ és $a_q \sim (\gamma \cdot c^{(max)}, (1-\gamma) \cdot c^{(min)}) \Rightarrow a_p \succeq a_q \Leftrightarrow \alpha \geq \gamma$.

A feltételek teljesülése esetén az Axiómák is teljesülnek.

1. Axióma esetén a gyenge rendezés a 4. feltétel miatt teljesül.

2. Axióma: Legyen két lottery $a_p^{(')} \sim (\alpha^{(')} \cdot c^{(max)}, (1-\alpha^{(')}) \cdot c^{(min)})$ és $a_p^{('')} \sim (\alpha^{('')} \cdot c^{(max)}, (1-\alpha^{('')}) \cdot c^{(min)})$ (1.-3. feltétel), melyre teljesül hogy $a_p^{(')} \succ a_p^{('')} \Leftrightarrow \alpha^{(')} > \alpha^{('')}$ (4. feltétel). Ekkor teljesül (3. feltétel), hogy

$$\begin{aligned}
\forall \beta \in (0,1):& \\
&(\beta \cdot a_p^{(')}, (1-\beta) \cdot a_p^{('')}) = \\
=&[(\beta \cdot \alpha^{(')} \cdot c^{(max)}, \beta \cdot (1-\alpha^{(')}) \cdot c^{(min)}), \\
&((1-\beta) \cdot \alpha^{('')} \cdot c^{(max)}, (1-\beta) \cdot (1-\alpha^{('')}) \cdot c^{(min)})] = \\
=&[(\beta \cdot \alpha^{(')} + \alpha^{('')} - \beta \cdot \alpha^{('')}) \cdot c^{(max)}, \\
&(\beta - \beta \cdot \alpha^{(')} + 1 - \beta - \alpha^{('')} + \beta \cdot \alpha^{('')}) \cdot c^{(min)}] = \\
=&[(\alpha^{('')} + \beta \cdot (\alpha^{(')} - \alpha^{('')})) \cdot c^{(max)}, (1 - (\alpha^{('')} + \beta \cdot (\alpha^{(')} - \alpha^{('')})) \cdot c^{(min)}]
\end{aligned} \tag{13}$$

Ekkor a $c^{(max)}$-hoz tartozó szorzókra teljesül: $\alpha^{(')} > (\alpha^{('')} + \beta \cdot (\alpha^{(')} - \alpha^{('')})) > \alpha^{('')}$ a 4. feltétel alapján, hogy maguk után vonják a $a_p^{(')} \succ (\beta \cdot a_p^{(')}, (1-\beta) \cdot a_p^{('')}) \succ a_p^{('')}$ feltételt. A 2'. Axióma ehhez hasonlóan belátható.

3. Axióma: bevezetünk egy harmadik középső lotteryt, a különböző kombinációkra alkalmazzuk az előzőekben bemutatott átalakítást (3. feltétel alapján) végül a szorzóknak és a 4. feltételnek köszönhetően teljesül a 3. Axióma. (Részletek a Temesi könyvben)

4. Axióma: triviális.

5. Axióma: 3. feltétel.

9.2.4 Következmények:

A feltételekből megkonstruálható a hasznosságfüggvény: Az első feltételnek köszönhetően garantált, hogy $\forall c \in X : c \sim (\beta \cdot c^{(max)}, (1-\beta) \cdot c^{(min)})$. Ekkor legyen $u : X \to \mathbb{R} : u(c) = \beta$

Az első három feltételnek köszönhetően garantált, hogy $\forall a_p \in A^p : a_p \sim (\alpha \cdot c^{(max)}, (1-\alpha) \cdot c^{(min)})$. Ekkor legyen $U : A^p \to \mathbb{R} : U(a_p) = \alpha$

Az így megadott U teljesíti a létezési feltételeket:

- Az Axiómákat már láttuk.
- $a_p \succeq a_q \Leftrightarrow U(a_p) = \alpha \geq U(a_q) = \gamma$ a 4. feltétel alapján teljesül.
- Belátható:

$$\begin{aligned}
\forall \beta \in (0,1) : U(\beta \cdot a_p^{(')}, (1-\beta) \cdot a_p^{('')}) =& \\
&= U((\alpha^{('')} + \beta \cdot (\alpha^{(')} - \alpha^{('')})) \cdot c^{(max)}, (1 - (\alpha^{('')} + \beta \cdot (\alpha^{(')} - \alpha^{('')}))) \cdot c^{(min)}) \\
&= \alpha^{('')} + \beta \cdot \alpha^{(')} - \beta \cdot \alpha^{('')} = \beta \cdot \alpha^{(')} + (1-\beta) \cdot \alpha^{('')} = \\
&= \beta \cdot U(a_p^{(')}) + (1-\beta) \cdot U(a_p^{('')})
\end{aligned} \tag{14}$$

U olyan alakú, hogy megfelel a Bernoulli-elvnek: az előzőek következménye: $U(a_p^{(j)}) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot u(c^{(j,k)})$ és, ha $\beta_k = P(s_k)$-val, akkor az pontosan megegyezik a Bernoulli-elvvel.

9.3 Egydimenziós hasznosság függvény előállítás - bizonyossági egyenértékes módszer

1. Keressük meg a $c^{(min)}$-t és a $c^{(max)}$-ot. (Nem feltétlenül az ismert lotterykből)
2. Ismételjük minden kimenetelre (c): vegyük az adott kimenetelt bizonyossági egyenértékként és keressük meg a hozzá tartozó lotteryt, ami a $c^{(min)}$, $c^{(max)}$ kombinációjából épül fel. Ennek megtalálása a döntéshozónak feltett kérdések alapján történik.

   $\forall c \sim (\beta \cdot c^{(max)}, (1-\beta) \cdot c^{(min)})$
3. Helyettesítsük be a feladatban megadott lotteryk (c) értékei helyére az előző pontban kapott lotteryket.

   $a_p = (\alpha \cdot c_1, (1-\alpha) \cdot c_2)$

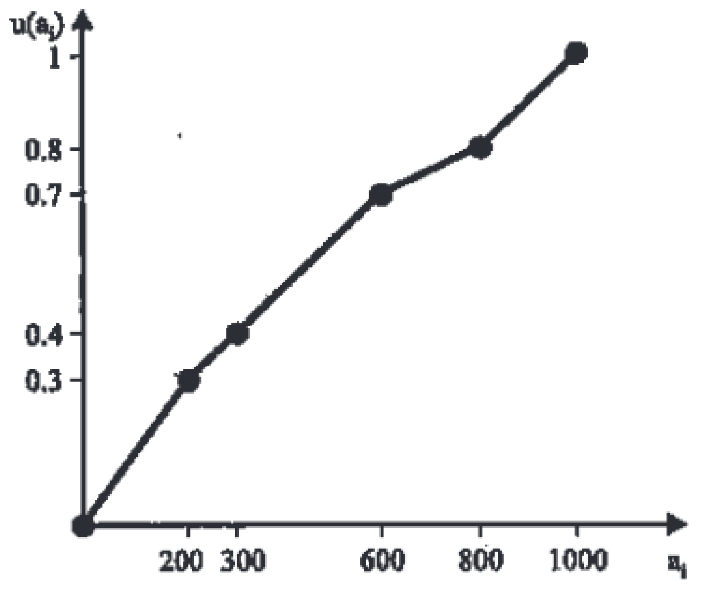
   $a_p = (\alpha \cdot (\beta \cdot c^{(max)}, (1-\beta) \cdot c^{(min)}), (1-\alpha) \cdot (\gamma \cdot c^{(max)}, (1-\gamma) \cdot c^{(min)}))$
4. Az így kapott összetett lotteryket a redukciós szabály segítségével hozzuk egyszerűbb alakra:

   $a_p = (\alpha \cdot (\beta \cdot c^{(max)}, (1-\beta) \cdot c^{(min)}), (1-\alpha) \cdot (\gamma \cdot c^{(max)}, (1-\gamma) \cdot c^{(min)}))$

   $a_p = ((\alpha \cdot \beta + (1-\alpha) \cdot \gamma) \cdot c^{(max)}, (\alpha \cdot (1-\beta) + (1-\alpha) \cdot (1-\gamma)) \cdot c^{(min)})$

   $U(a_p) = \alpha \cdot \beta + (1-\alpha) \cdot \gamma$
5. Az így kapott egyszerű lotteryk összehasonlíthatóak, ezek felett könnyedén megadható a preferencia rendezés.

A döntéshozóval történt egyeztetés, dialógus során keletkező válaszok fogják meghatározni a hasznosságfüggvényt.



Példa a hasznosságfüggvényre, ami dialógus során keletkezik.

Jelölés: $a_p = (\alpha : c_1, c_2) \equiv (\alpha \cdot c_1, (1-\alpha) \cdot c_2)$

Feladat: Legyen $a_p = (0.5 : 800, 200)$, $a_q = (0.6 : 600, 300)$ két referencia lottery. Döntsük el, hogy melyiket válasszuk.

1. Legyen $c^{(min)} = 0$ és a $c^{(max)} = 1000$

2. Az első érték 800, kérdezzük meg a döntéshozót, hogy biztos 800 dolláros nyereség mellett, belevágna-e egy olyan játékba, ahol 20% eséllyel nyerne 1000 dollárt és 80% eséllyel semmit. A döntéshozó megmondja, hogy mi a véleménye erről a játékról. Érdemes egy közepes (50% - 50%) eséllyel kezdeni, majd a döntéshozó válasza alapján növelni vagy csökkenteni az esélyt. Ebből megkapható az adott kimenetelhez tartozó hasznossági érték. Legyen például: $800 \sim (0.7 : 1000, 0)$, $200 \sim (0.1 : 1000, 0)$, $600 \sim (0.5 : 1000, 0)$, $300 \sim (0.2 : 1000, 0)$,

3. Összetett lotteryk: $a_p = (0.5 : (0.7 : 1000, 0), (0.1 : 1000, 0))$, $a_q = (0.6 : (0.5 : 1000, 0), (0.2 : 1000, 0))$, a redukciós szabály segítségével hozzuk egyszerűbb alakra: $a_p : (0.5 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.1) \to a_p = (0.4 : 1000, 0)$, $a_q : (0.6 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.2) \to a_q = (0.38 : 1000, 0)$.

4. $a_p \succ a_q$ mivel $0.4 > 0.38$

Rajzoljuk meg a hasznosságfüggvényt és döntsük el, hogy milyen a döntéshozó kockázati magatartása. (Kockázat kereső)

Az információ ára fejezetnél ismertetett példa hasznosságfüggvény előállítására
Most feltesszük, hogy nem tudjuk senkitől sem megtudni a lehetséges valószínűségeket, hanem a döntéshozó segítségével határozzuk meg őket.

A	s_1	s_2
a_1	$c_1 = -10800$	$c_2 = 2000$
a_2	$c_3 = 456$	$c_4 = 360$

A feladat két lotteryje, amiről el kell dönteni, hogy a döntéshozó melyiket válassza az a következő: $a_p = (0.25 : -10800, 2000)$ $a_q = (0.25 : 456, 360)$

Keressük meg $c^{(max)}$ és $c^{(min)}$-t: $c^{(min)} = c_1$, $c^{(max)} = c_2$. Ebből már meg is kaptuk a két bizonyossági egyenértékest: $c_1 \sim (0 : 2000, -10800)$ és $c_2 \sim (1 : 2000, -10800)$.

Vegyük egyesével a maradék c_3 és c_4-et biztos eseményként és kérdezzük meg a döntéshozót, hogy emellett a mekkorát kockáztatna a $c^{(max)}$ eléréséért, ismerve a $c^{(min)}$ esetleges veszteséget.

Például: Tegyük fel, hogy biztosan nyerünk 456 dollárt. Általában egyesével kérdezzük, hogy játszana-e a biztos esemény helyett ha például: 10% eséllyel nyerne $c^{(max)}$-ot vagy, ha 20% eséllyel nyerne max-ot, ... addig, amíg el nem dönti, hogy mekkora kockázatot vállalna az adott esetben. Például legyen: $c_3 \sim (0.9 : 2000, -10800)$, ekkor csak akkor kockáztatná meg a biztos c_3-at, ha 90%-os eséllyel nyerne $c^{(max)}$-ot. Legyen $c_4 \sim (0.8 : 2000, -10800)$

$a_p = (0.25 : (0 : 2000, -10800), (1 : 2000, -10800)) = (0.25 \cdot 0 + 0.75 \cdot 1 : 2000, -10800)$

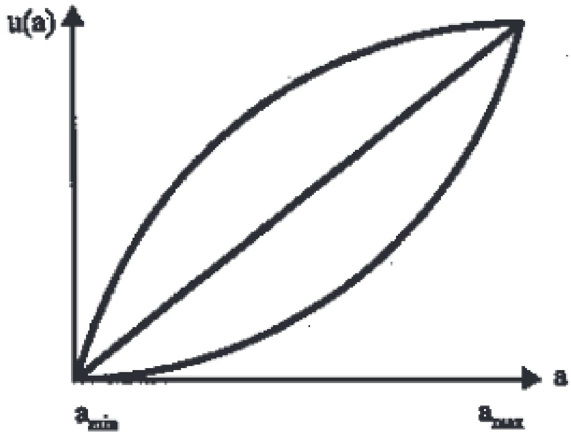
$a_q = (0.25 : (0.9 : 2000, -10800), (0.8 : 2000, -10800)) = (0.25 \cdot 0.9 + 0.75 \cdot 0.8 : 2000, -10800)$

$U(a_p) = 0,75 < U(a_q) = 0,825$. Tehát a második alternatívát választjuk.

Rajzoljuk meg a hasznosságfüggvényt és döntsük el, hogy milyen a döntéshozó kockázati magatartása. c_3 esetén a játék várhatpénzértéke $VP = 720$, míg c_4 esetén $VP = -560$. Tehát kevert stratégiát alkalmaz.

9.4 Kockázati magatartás

Jelölés: $CE(a_p) = c$, ahol c az a_p lotteryhez tartozó bizonyossági egyenérték.



- g : semleges kockázati magatartás. A döntéshozó ugyanúgy viselkedik sztochasztikus esetben, mint determinisztikus esetben: várható pénzérték alapján dönt. $CE(a_p) = VP(a_p)$
- h : kockázat kerülő magatartás. A hasznossági függvénye konkáv, bizonyossági egyenértéke szigorúan a várható pénzértéké alatt található: $CE(a_p) < VP(a_p)$
- f : kockázat kereső magatartás. A hasznossági függvénye konvex, bizonyossági egyenértéke szigorúan a várható pénzértéké felett található: $CE(a_p) > VP(a_p)$
- lehetnek kevert stratégiák is.

9.5 Többtényezős hasznosság függvény létezése és előállítása

Többtényezős hasznosság függvény az értékelő függvényhez hasonlóan a dekompozíciós alakok vizsgálatát jelenti. Feltehetjük, hogy tényezőnként ismerjük az egydimenziós hasznosság függvényeket (pl: bizonyossági egyenértékes módszer alapján), így már csak a skálázási konstansok beállítása és a megfelelő függvényalak kiválasztása a feladatunk. Az alak létezésének a vizsgálatához itt is függetlenségi tesztekre lesz szükségünk.

9.5.1 Függetlenségi tesztek

Jelölés: A^p kockázatos kimenetelek halmaza: $a_p = \{c, \alpha\} \in A^p$ vagy $a_p = \{x_i, \alpha_i, x_i \in X_i\}$

Értékfüggetlenség Legyen $T = (X_1, ..., X_m)$ tényezőhalmaz. T tényezőrészhalmazai *érték-függetlenek* $\Leftrightarrow$ ha $\forall a_p, a_q \in A^p$ (amelyek együttes eloszlásai rendre α, β):

$$a_p \sim a_q \Leftrightarrow \forall i = 1..m : \alpha_i = \beta_i \tag{15}$$

Ez nehezen teljesülő feltétel, de az additív alak létezésének a feltétele.

Hasznosságfüggetlenség Legyen $T = (X_1, ..., X_m)$ tényezőhalmaz, $C \subseteq T$ tényezőrészhalmaz, $C^* \subseteq T$ komplementerhalmaz. Ekkor C hasznosság független C^*-tól $\Leftrightarrow$ ha $\forall a_p, a_q \in A_C^p$: egy tetszőleges $x_{C^*}^0 \in X_{C^*}$ esetén teljesül minden más $x_{C^*} \in X_{C^*}$ -re, hogy:

$$(a_p, x_{C^*}^0) \succeq (a_q, x_{C^*}^0) \Rightarrow (a_p, x_{C^*}) \succeq (a_q, x_{C^*}) \tag{16}$$

Hasonló a preferenciafüggetlenséghez, itt lotteryk közötti függőségeket vizsgáljuk.

Preferenciafüggetlenség Legyen $T = (X_1, ..., X_m)$ tényezőhalmaz, $C \subseteq T$ tényezőrészhalmaz, $C^* \subseteq T$ komplementerhalmaz. Ekkor C preferencia független C^*-tól $\Leftrightarrow$ ha $\forall x'_C, x''_C \in X_C$: egy tetszőleges $x_{C^*}^0 \in X_{C^*}$ esetén teljesül minden más $x_{C^*} \in X_{C^*}$ -re, hogy:

$$(x'_C, x_{C^*}^0) \succeq (x''_C, x_{C^*}^0) \Rightarrow (x'_C, x_{C^*}) \succeq (x''_C, x_{C^*}) \tag{17}$$

Determinisztikus esethez teljesen hasonlóan.

Értékfüggetlenség $\Rightarrow$ **Hasznosságfüggetlenség** $\Rightarrow$ **Preferenciafüggetlenség.**

Értékfüggetlenség $\Rightarrow$ additív forma

Kölcsönös hasznosságfüggetlenség $\Rightarrow$ multiplikatív forma

Minden tényező ($\{X_i\} = C$) legyen hasznosságfüggetlen a komplementeréhez képest $\Rightarrow$ kvázi additív forma

Minden más esetben $\Rightarrow$ egyéb formák

9.6 Additív és multiplikatív hasznosságfüggvény

A közös alak: kvázi additív hasznosságfüggvény (kifejezhető belőle az additív és a multiplikatív hasznosságfüggvény)

$$\begin{aligned}u(c) = &\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot u_i(x_i) + \\ &\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} k_{ij} \cdot u_i(x_i) \cdot u_j(x_j) + \\ &\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \sum_{l>j}^{n} k_{ijl} \cdot u_i(x_i) \cdot u_j(x_j) \cdot u_l(x_l) + ... \\ &+ k_{1..n} \cdot u_1(x_1) \cdot ... \cdot u_n(x_n)\end{aligned} \tag{18}$$

Ha $k_{ij}, k_{ijl}, ..., k_{1..n}$ egyenlő nullával, akkor megkapjuk belőle az **additív alakot**:

$$u(c) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot u_i(x_i) \tag{19}$$

Megkapható a multiplikatív forma, ha $k_{ij} = K \cdot k_i \cdot k_j, k_{ijl} = K^2 \cdot k_i \cdot k_j \cdot k_l, ..., k_{1..n} = K^{n-1} \cdot k_1 \cdot ... \cdot k_n$:

$$\begin{aligned}u(c) = &\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot u_i(x_i) + \\ &K \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} k_i \cdot u_i(x_i) \cdot k_j \cdot u_j(x_j) + \\ &K^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \sum_{l>j}^{n} k_i \cdot u_i(x_i) \cdot k_j \cdot u_j(x_j) \cdot k_l \cdot u_l(x_l) + ... \\ &+ K^{n-1} \cdot k_1 \cdot u_1(x_1) \cdot ... \cdot k_n \cdot u_n(x_n)\end{aligned} \tag{20}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt K-val, majd adjunk hozzá mindkét oldalhoz 1-et:

$$\begin{aligned}1 + K \cdot u(c) =& 1 + K \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot u_i(x_i) + \\ & K^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} k_i \cdot u_i(x_i) \cdot k_j \cdot u_j(x_j) + \\ & K^3 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \sum_{l>j}^{n} k_i \cdot u_i(x_i) \cdot k_j \cdot u_j(x_j) \cdot k_l \cdot u_l(x_l) + ... \\ & + K^n \cdot k_1 \cdot u_1(x_1) \cdot ... \cdot k_n \cdot u_n(x_n)\end{aligned} \tag{21}$$

Ezután a jobboldal szorzattá alakítható az alábbi módon:

$$1 + K \cdot u(c) = [1 + K \cdot k_1 \cdot u_1(x_1)] \cdot [1 + K \cdot k_2 \cdot u_2(x_2)] \cdot ... \cdot [1 + K \cdot k_n \cdot u_n(x_n)] \tag{22}$$

Amiből átrendezéssel már kifejezhető a **multiplikatív alak**:

$$u(c) = \frac{1}{K} \cdot [\prod_{i=1}^{n} (1 + K \cdot k_i \cdot u_i(x_i)) - 1] \tag{23}$$

K skálázási konstans meghatározása 2D ($n = 2$) esetben: Legyen a kiindulási multiplikatív alak olyan alak, amit az additív konstansainak a módosítása során kaptunk a (20) pontban

$$\begin{aligned}u(c) =& k_1 \cdot u_1(x_1) + k_2 \cdot u_2(x_2) + \\ & K \cdot k_1 \cdot u_1(x_1) \cdot k_2 \cdot u_2(x_2)\end{aligned} \tag{24}$$

Fejezzük ki K-t a k_i-kből, ezért legyen $K = \dfrac{1 - (k_1 + k_2)}{k_1 \cdot k_2}$. Ekkor:

$$\begin{aligned}u(c) =& k_1 \cdot u_1(x_1) + k_2 \cdot u_2(x_2) + \\ & \frac{1 - (k_1 + k_2)}{\cancel{k_1 \cdot k_2}} \cdot \cancel{k_1} \cdot u_1(x_1) \cdot \cancel{k_2} \cdot u_2(x_2) \\ =& k_1 \cdot u_1(x_1) + k_2 \cdot u_2(x_2) + [1 - (k_1 + k_2)] \cdot u_1(x_1) \cdot u_2(x_2)\end{aligned} \tag{25}$$

Ahol az alábbi 3 eset állhat elő:

1. eset: $k_1 = 0$ és $k_2 = 0 \Rightarrow u(c) = u_1(x_1) \cdot u_2(x_2), K \to \infty$. Konjukció, ÉS operátor.
2. eset: $k_1 = 1$ és $k_2 = 1 \Rightarrow u(c) = u_1(x_1) + u_2(x_2) - u_1(x_1) \cdot u_2(x_2), K = -1$. Diszjunkció, VAGY operátor.
3. eset: $k_1 + k_2 = 1 \Rightarrow u(c) = k_1 \cdot u_1(x_1) + k_2 \cdot u_2(x_2), K = 0$. Átlag művelet.

A k_i-k tekinthetőek az adott tényezőhöz tartozó súlyozásként, a K pedig azért felelős többek között, hogy a hasznosság a $[0, 1]$ intervallumba skálázódjon. A fentiek alapján a K a $[-1, \infty]$ intervallumról vesz fel értéket. Ez határérték vizsgálatokkal kettőnél több tényezős esetben is belátható.

9.7 Előállítás

1. Többtényezős hasznosságfüggvény létezésének verifikálása. Feltételek teljesülése.
2. Az összetevő egydimenziós értékelő függvények megkonstruálása, bizonyossági egyenértékes módszer alapján

3. Megfelelő alakú függvényforma kiválasztása és abból többtényezős hasznosság konstruálása. Főleg a függetlenségi tesztek alapján történik.

4. Konstansok kiválasztása: Kellő mennyiségű preferencia információ alapján felírunk egy konstansokra vonatkozó független egyenletrendszert, megoldjuk. (Konkrét megvalósítással nem foglalkozunk, hasonló a multiplikatív konstansok beállításához.)

5. Konzisztencia ellenőrzés, elemzés. (Döntéshozóval együtt, kérdezéses módszerrel)

9.8 A hasznossági elmélet felvetéseinek magatartáselméleti kritikái

Temesi jegyzet, Daniel Kahneman - Gyors és lassú gondolkodás