Közelítő szimbolikus számítások

1. gyakorlat

SZTE-TTIK, Számítógépes Optimalizálás Tanszék

Számonkérések

- 0. teszt jövő hétfőn, "állapotfelmérés"
- 2 zárthelyi dolgozat itt a gyakorlaton, coospace-en
  - 5. hét, Szept. 30. Matlab Zh: 10 perc - 20 pont (min. 8 kell)
  - 14. hét, Dec. 2. Nagy Zh: 30 perc - 60 pont (min. 30 kell)
- 4 teszt coospace-en, mind 5 perc - 5 pont
  - 3. hét, Szept. 16.
  - 7. hét, Okt. 14.
  - 10. hét, Nov. 4.
  - 12. hét, Nov. 18.
  - minimum 10 pont kell összesen

Ponthatárok

- Összessen: 20 + 60 + 4*5 = 100 pont
  - 80-100: 5
  - 70-79: 4
  - 60-69: 3
  - 50-59: 2
  - 0-49: 1

Javítási lehetőség

- 1. vizsgahéten
- A 2 zh, vagy 1 zh és 1 teszt javítható
- A teljesítés szükséges és minimális feltétele: 10 pont összesen a tesztekből, 8 pont a Matlab Zh-ból, 30 pont a nagy ZH-ból.

Kérdések

?

Rövid tematika

A félév során a következő témaköröket tekintjük át:

- Bevezetés a MATLAB/Octave programcsomag használatába
- Intervallum aritmetika
- Egyenletrendszerek megoldása
- Mátrixok sajátértékei és sajátvektorai
- Polinomok, gyökkereső eljárások
- Interpoláció
- Numerikus integrálás
- Gradiens módszer

0. teszt anyaga

- lineáris függvény
- determináns
- mátrix fajták
- műveletek mátrixokkal
- polinomok
- szélsőérték
- folytonosság
- differenciálhatóság
- gépi ábrázolás
- Matlab nagyon kezdő

Mit jelentenek a közelítő és a szimbólikus számítások?

Roses are red and
violets are blue
1.4 is
the square root of 2.

A rózsa piros,
az ibolya kék,
négyzetgyök kettő
az 1,4.

- Just because there's an exact formula
  doesn't mean it's necessarily a good idea to use it.
  — *L. N. Trefethen*
- Symbolic computing is mainly useful
  when you want a symbolic answer.
  – *L. N. Trefethen*

Miért van szükség közelítő számításokra?

1. Határozzuk meg az egységkör területét - de mi itt a probléma?? A válasz $r^2\pi$.
2. Határozzuk meg az $x = \sin(x)$ transzcendens egyenlet legkisebb pozitív gyökét!
3. Oldjuk meg az $x^5 - 2x^3 - x - 1 = 0$ egyenletet! (Erre *nincs* megoldóképlet.)
4. Mennyi kőolaj érkezik be az adriai vezetéken át óránként/naponta az országba?
5. stb.

A fontosabb eszközök

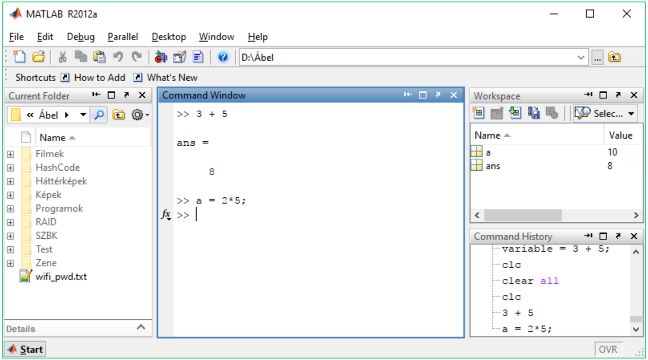
- matematikai programkönyvtárak: GMP, LAPACK, Intel MKL, stb
- matematikai programok/programcsomagok: Matlab, Octave, Scilab, R, stb.

Matlab

- MATrix LABoratory $\rightarrow$ alapvetően mátrixokkal foglalkozik
- Magas szintű nyelv $\rightarrow$ nagyon gyors az implementáció $\rightarrow$ kutatásban használják
- nagyon sok minden már eleve készen van: toolbox-ok.
- lassú
- drága (alternatívák: Octave, Maple, Python, R ...)

Matlab

Command window, Workspace, Current folder



- Parancssorban utasítások
- Ha hiányzik a pontosvessző az utasítás végéről, akkor a parancssorba kiíródik az eredmény

Definíció

- Mátrix: a táblázat matematikai fogalma
- "Ha n sorba és m oszlopba rendezünk matematikai jeleket, akkor egy n x m -es mátrixot kapunk."
- Pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 2 x 3 -as mátrix
- Matlabban: A = [2 -1 0; 3, 5, 1]
- Mátrix elemek: $a_{1,3} = 0$, $a_{2,2} = 5$ A(1,3) A(2,2)
- Az első koordináta a sor a második az oszlop!

Mátrix műveletek

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

- Összeadás **(azonos dimenziók)** $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
  (alsó háromszögmátrix) A + B
- Transzponálás: $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ A'
- Szorzás **(megegyező belső dimenziók)**:
  $A * A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 35 \end{pmatrix}$ A*A'

Műveleti tulajdonságok

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- A szorzás **nem** kommutatív (felcserélhető), azaz $A * B^T \neq B^T * A$ (a példa mátrixokkal számolva az eredménynek még a dimenziói sem stimmelnek)
- Igaz az alábbi összefüggés: $(A * B)^T = B^T * A^T$ (Tetszőleges A,B mátrixokra, ahol a megfelelő műveletek értelmezettek)

Speciális mátrixok

- Egységmátrix (3x3) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eye(3) (a szorzás egységeleme)
- Diagonális mátrixok $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ diag([3,-9,6]) (elemek csak a főátlóban)
- Háromszögmátrixok:
  Alsó: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & -9 & 1 \end{pmatrix}$ (lower) Felső: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ (upper)

Mátrixok determinánsa

- **Csak négyzetes (n x n) mátrixnak**
- Speciális eset (2x2):
  $A = \begin{matrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{matrix}$
  $det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2 * 4) - (-1 * 3) = 8 + 3 = 11$
  det(A)
- Általában kifejtéssel vagy Vandermonde-determinánssal... lásd DiMat I.

Mátrixok inverze

- Szintén **csak négyzetes mátrixnak**

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = I$$

- Számítás definícióval:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} * [\text{adjungált aldeterminánsok}]^T$$

inv(A) A^-1

- $\implies$ Azon mátrixoknak, melynek a **determinánsa 0**, nincs inverze! (egyedül vannak) $\implies$ **szingulárisnak** nevezzük őket
- A többi mátrixnak van inverze, őket nemszingulárisnak nevezzük