Közelítő és szimbolikus számítások

Eliminációs mátrixok, direkt módszerek

SZTE-TTIK, Számítógépes Optimalizálás Tanszék

Lineáris egyenletrendszerek

$$1x + 3y + 2z = -1 \tag{1}$$
$$-1x + 1y + 2z = -3 \tag{2}$$
$$-3x + 2y + 1z = -12 \tag{3}$$

Kapcsolat a lineáris egyenletrendszer és a mátrixok között

Lineáris egyenletrendszerek

$$1x + 3y + 2z = -1 \quad (1)$$

$$-1x + 1y + 2z = -3 \quad (2)$$

$$-3x + 2y + 1z = -12 \quad (3)$$

Kapcsolat a lineáris egyenletrendszer és a mátrixok között

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = b$$

(mátrixszorzás)

Lineáris egyenletrendszerek

Felső háromszögmátrix alakú egyenletrendszer

$$1x + 3y + 2z = -1$$

$$4y + 4z = -4$$

$$-4z = -4$$

Lineáris egyenletrendszerek

Felső háromszögmátrix alakú egyenletrendszer

$$1x + 3y + 2z = -1$$
$$4y + 4z = -4$$
$$-4z = -4$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \; b = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Az ilyen alakú egyenletrendszereket nagyon könnyű megoldani!

Lineáris egyenletrendszerek

Felső háromszögmátrix alakú egyenletrendszer

$$1x + 3y + 2z = -1$$
$$4y + 4z = -4$$
$$-4z = -4$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \; b = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Az ilyen alakú egyenletrendszereket nagyon könnyű megoldani! Az utolsó egyenlet z változója könnyen kifejezhető (z=1). Ha ez megvan, az előtte lévő egyenletbe helyettesítjük; így ott is már csak egy ismeretlen változónk marad

Lineáris egyenletrendszerek

$$1x + 3y + 2z = -1$$
$$4y + 4z = -4$$
$$-4z = -4 \rightarrow z = 1$$

$$1x + 3y + 2z = -1$$
$$4y + 4z = -4 \rightarrow 4y + 4 * 1 = -4 \rightarrow 4y = -8 \rightarrow y = -2$$

$$1x + 3y + 2z = -1 \rightarrow x + 3 * (-2) + 2 * 1 = -1$$
$$\rightarrow x - 6 + 2 = -1 \rightarrow x = 3$$

Megoldás: x=3 y=-2 z=1

Általában

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{1,1} * x_1 + a_{1,2} * x_2 + a_{1,3} * x_3 &= b_1 \\ 0 \quad + a_{2,2} * x_2 + a_{2,3} * x_3 &= b_2 \\ 0 \quad + \quad 0 \quad + a_{3,3} * x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{3,3}} \quad x_2 = \frac{b_2 - a_{2,3} * x_3}{a_{2,2}} \quad x_1 = \frac{b_1 - (a_{1,2} * x_2 + a_{1,3} * x_3)}{a_{1,1}}$$

A programozott megoldás: FelsoHaromszogMegold.m

Átalakítások

- A cél felső háromszög alakra hozni az egyenletrendszerek együtthatómátrixát!
- Hogyan lehet átalakítani?
  Megengedett szabályok:
  - Egy egyenlet nem 0 számmal való megszorzása
  - Egyenletek összeadása
  - Egyenletek cseréje

Eliminációs mátrixok

- Az átalakítások is leírhatók mátrixokkal!
  Pl.: az egységmátrixxal való szorzás semmilyen átalakítást nem eredményez.
- Az egységmátrix kis átalakításával minden egyenletrendszeren végrehajtott művelet egy egyszerű mátrixszorzássá alakul.
- Ezeket az átalakításra használt mátrixokat M-mel jelöljük és eliminációs mátrixoknak fogjuk őket nevezni.

Eliminációs mátrixok

Adjunk meg egy átalakítási mátrixot, amely egy 3x3-as egyenletrendszerben a 2. egyenlet háromszorosából kivonja a 3. egyenlet kétszeresét és hozzáadja a 1. egyenletet.
Megoldás:

Eliminációs mátrixok

Adjunk meg egy átalakítási mátrixot, amely egy 3x3-as egyenletrendszerben a 2. egyenlet háromszorosából kivonja a 3. egyenlet kétszeresét és hozzáadja a 1. egyenletet.

Megoldás:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminációs mátrixok

Hozzuk háromszögmátrix alakúra a következő mátrixot!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Eliminációs mátrixok

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \to M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 * A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \to M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 * M_1 * A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Eliminációs mátrixok általában

$$\begin{aligned} Ax &= b & & M_1\text{-el szorzunk balról} \\ M_1 Ax &= M_1 b & & M_2\text{-el szorzunk balról} \\ M_2 M_1 Ax &= M_2 M_1 b & & M_3\text{-el szorzunk balról} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_n ... M_2 M_1 Ax &= M_n ... M_2 M_1 b \\ MAx &= Mb \end{aligned}$$

Az M*A mátrix felső háromszögmátrix, így könnyen megoldható! Ha ismernénk az

$$M_n ... M_2 M_1 = M$$

mátrixot, akkor nagyon gyorsan megoldható lenne az egyenletrendszer.

Gyakorlás

1. Oldd meg Gauss eliminációval papíron és MATLAB-ban is a következő egyenletrendszert!

$$3x_1 - 1x_2 + 4x_3 = 2$$
$$-1x_1 + x_2 = 1$$
$$4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0$$

Extra feladat

1. Írj MATLAB scriptet, ami bemenetként egy A mátrixot és egy b vektort vár, kimenete pedig az Ax=b egyenlet megoldása. Ha gond van a dimenziókkal, azt írja ki.
2. Legyen A egy 100x100 méretű, 1-től 10-ig véletlen elemeket tartalmazó mátrix, valamint legyen b egy 100x1 méretű, 1-től 10-ig véletlen elemeket tartalmazó vektor.Oldjuk meg az $Ax = b$ egyenletet Matlabban.