Közelítő és szimbolikus számítások

Mátrix felbontások: LU, QR, Cholesky

SZTE-TTIK, Számítógépes Optimalizálás Tanszék

LU felbontás

Egy A négyzetes mátrixot felbonthatunk a következőképp:
A=LU

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Ha megvan a felbontás, akkor az eredeti egyenlet

$$Ax = b \rightarrow LU = b$$

alakú és legyen Ux=y, ekkor Ly=b megoldása után Ux=y-t megoldva kapjuk x-et.

LU felbontás

```
>>A;
>>b;
>>[L, U] = lu(A);
>> y=L\b;
>> x=U\y
```

Mire jó? Ha különböző b értékekre kell megoldanunk az egyenletrendszert, az LU felbontást akkor is csak egyszer kell megtenni, míg a Gauss eliminációt minden esetben el kellene végezni.

QR felbontás

- Egy Q négyzetes mátrix ortogonális, ha
$$QQ^T = Q^TQ = I,$$
azaz ha transzponáltja megegyezik az inverzével.
- Tetszőleges A négyzetes valós reguláris mátrixnak létezik
$$A = QR$$
felbontása egy ortogonális és egy felső háromszögmátrixra.
- Lineáris egyenletrendszer megoldása:
$$Ax = b \to QRx = b \to Rx = Q^Tb$$
- QR felbontás háromszor drágább, mint az LU- felbontás. (Miért?) DE MIÉRT JÓ? $\to$ Általában jobb, mint az LU.

QR felbontás és egyenletrendszer MATLAB-ban

```
>> A = [2 1 -1; -3 -1 2; -2 1 2];
>> b = [8 -11 -3]';
>> [Q,R] = qr(A)

Q =     -0.4851    0.4117    0.7715
         0.7276   -0.2994    0.6172
         0.4851    0.8608   -0.1543


R =     -4.1231   -0.7276    2.9104
              0    1.5718    0.7111
              0         0    0.1543

>> x = R\(Q'*b)

x =      2.0000
         3.0000
        -1.0000
```

Cholesky felbontás

- Egy A négyzetes mátrix szimmetrikus, ha
$$A = A^T$$
- Egy A négyzetes mátrix pozitív definit, ha
$$x^T A x > 0$$
minden x nem nullvektor esetén
- Ha A négyzetes mátrix szimmetrikus és pozitív definit, akkor felbontható
$$A = LL^T,$$
ahol L alsó háromszögmátrix a főátlóban pozitív elemekkel (v.ö. LU felbontás) -> Cholesky

MIÉRT JÓ?

Kb kétszer hatékonyabb, mint az LU.

Cholesky felbontás és egyenletrendszer MATLAB-ban

```
>> A = [1 2 3; 2 8 12; 3 12 27];
>> b = [14 54 108]';
>> L = chol(A, 'lower')

L =  1     0     0
     2     2     0
     3     3     3

>> y = L\b;
>> x = L'\y

x =   1
      2
      3
```

Gyakorló feladatok

- Oldd meg a következő lineáris egyenletrendszert a Cholesky-felbontás segítségével:

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Oldd meg a következő lineáris egyenletrendszer a QR-felbontás segítségével:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Házi feladatok

- Valósíts meg egy négyzetes mátrix invertáló eljárást MATLAB-ban az inv függvény és hatványozás művelet nélkül (tipp: LU felbontás) (1 pont)