

Közelítő szimbolikus számítások

Iterációk - Jacobi és Gauss-Seidel iteráció

SZTE-TTIK, Számítógépes Optimalizálás Tanszék

Egyenletrendszerek

- ▶ Ha az egyenletrendszer mátrixa túl nagy, akkor az eliminációs (**direkt**) módszer használhatatlanul nagy műveletigényű → közelítő megoldást kell találnunk
- ▶ **Iterációs** eljárás: (iteráció – for ciklus)
elindulunk valahonnan (egy tippelt megoldásból) majd lépésenként egyre közelebb kerülünk (konvergálunk) a valódi megoldáshoz, de általában pontosan nem érjük el azt
- ▶ Akkor jó egy iteráció, ha az általa megadott sorozat a megoldáshoz konvergál

Iterációs eljárások

- ▶ Egyenletrendszereink eddigi formája:
 $Ax = b$
- ▶ Az iterációs módszerek általános formája:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

, azaz valahogyan kapjunk egy új tippet ($x^{(k+1)}$) a régi tippből $x^{(k)}$.

- ▶ Hogyan kapunk ilyen B mátrixot és c vektort? Jó lenne, hogy ha $x^{(k)}$ már megoldás, akkor $x^{(k+1)}$ is megoldás maradna.

Átrendezés iterációra

Tehát legyen igaz, hogy ha x megoldás, akkor

$$x = Bx + c$$

Ha x megoldás, akkor rá igaz az is, hogy $Ax = b$

Az első megoldási javaslat: fejezzük ki az x_i változót az i . egyenletből. Ezt fogjuk **Jacobi iteráció**nak hívni.

Jacobi iteráció példa

- ▶ Nézzük meg egy példán az eljárást:

$$5x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

$$x_2 + 3x_3 = 2$$

- ▶ Fejezzünk ki minden egyenletből egy-egy változót!

$$x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{5}x_2^{(k)} + \frac{7}{5}$$

$$x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k)} + \frac{5}{2}$$

$$x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{3}x_2^{(k)} + \frac{2}{3}$$

Jacobi iteráció példa

- ▶ Írjuk fel mátrix alakban:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/5 \\ 5/2 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

- ▶ Indítsuk el az iterációt a $x^{(0)} = (1 \ 1 \ 1)^T$ kezdővektorból:
1. ITERÁCIÓ.

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/5 \\ 5/2 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Jacobi iteráció példa

► 2. ITERÁCIÓ.

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6/5 \\ 2 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/5 \\ 5/2 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

► 3. ITERÁCIÓ.

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1.9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/5 \\ 5/2 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.02 \\ 2 \\ 0.03 \end{pmatrix}$$

Jacobi iteráció mátrixokkal

- ▶ A Jacobi iteráció könnyen leírható mátrixos formában:
- ▶ Eredeti egyenlet:

$$Ax = b$$

- ▶ Hogyan fejezzük ki az i . változót az i . egyenletből? $\rightarrow$ a főátlón kívül minden mását átviszünk a jobb oldalra (D jelöli az A mátrix főátlóbeli elemeiből képzett diagonális mátrixot)

$$Dx = b - (A - D)x$$

- ▶ és innen

$$x = D^{-1}b - D^{-1}(A - D)x$$

, ami a Jacobi iteráció képlete (ha a bal oldali x az új $(k + 1)$ a jobb oldali pedig a régi (k))

Gauss-Seidel iteráció

- ▶ Tegyük föl, hogy az új x értékeket nem egyszerre (mátrixművelettel), hanem egyesével számoljuk. (tehát először frissítjük x_1 -et, majd x_2 -őt stb.) Ekkor jó ötletnek tűnik, hogy az x_2 frissítéséhez (következő iterált megoldás kiszámításához), már x_1 új értékét használjuk és ne a régit.
- ▶ Az előbbi példán:

$$x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{5}x_2^{(k)} + \frac{7}{5}$$

$$x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k+1)} + \frac{5}{2}$$

$$x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{3}x_2^{(k+1)} + \frac{2}{3}$$

Gauss-Seidel iteráció

- ▶ Ha ilyen módon, azonnal fölhasználjuk a már kiszámolt új x^{k+1} értékeket az iteráció során, akkor a Jacobi iterációt **Guass-Seidel iteráció**nak hívjuk.
- ▶ Nézzünk egy példát, kiindulva az $x = (1, 1, 1)^T$ vektorból.

Gauss-Seidel iteráció példa

► 1. ITERÁCIÓ.

$$x_1^{(1)} = -\frac{1}{5}1 + \frac{7}{5} \implies x_1^{(1)} = 1.2$$

$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{2}1.2 + \frac{5}{2} \implies x_2^{(1)} = 1.9$$

$$x_3^{(1)} = -\frac{1}{3}1.9 + \frac{2}{3} \implies x_3^{(1)} = 0.03$$

► 2. ITERÁCIÓ.

$$x_1^{(2)} = -\frac{1}{5}1.9 + \frac{7}{5} \implies x_1^{(2)} = 1.02$$

$$x_2^{(2)} = -\frac{1}{2}1.02 + \frac{5}{2} \implies x_2^{(2)} = 1.99$$

$$x_3^{(2)} = -\frac{1}{3}1.99 + \frac{2}{3} \implies x_3^{(2)} = 0.003$$

Iterációk konvergenciája

- ▶ A pontos gyökök az $x = (1 \ 2 \ 0)^T$ vektor elemei.
→ Mindkét eljárással ezen gyökök felé konvergáltunk, különböző sebességgel.
- ▶ DE, honnan tudjuk, hogy egy iterációs eljárás konvergens?
→ Be kell bizonyítani: lásd: koszikicsi.pdf 57-59.oldal (és a házi feladat)

Iterációk konvergenciája

- ▶ Röviden - néhány definíció:
 - ▶ Egy iterációs sorozat **globálisan konvergens**, ha bármely indulóvektorral ugyanazt a megoldást kapjuk.
 - ▶ Az $A(n \times n)$ -es mátrix szigorúan diagonális domináns, ha minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re teljesül, hogy:

$$\sum_{(j=1, j \neq i)}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

Diagonális dominancia példa

- ▶ Honnan tudjuk, hogy egy iterációs eljárás konvergens?
- ▶ „Meg kell nézni, hogy a sorok abszolútérték összege (a főátlóbeli elem kivételével) kisebb-e mint a főátlóbeli elem abszolútértéke.”

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 2 \\ 10 & 10 & -21 \end{pmatrix}$$

- ▶ Szigorúan diagonális domináns, mert:
 $| -6 | > 5 = |4| + |1|$ és $|15| > 2 = |0| + |2|$ és
 $| -21 | > 20 = |10| + |10|$

Konvergenca elegendő feltétele

- ▶ A Jacobi- és a Gauss-Seidel iteráció is konvergens, ha a hozzá tartozó egyenletrendszer mátrixa diagonálisan domináns. (elegendő feltétel)
- ▶ Tehát lehet olyan nem szigorúan diagonális mátrixú egyenletrendszer, amire konvergál valamely módszer.

Konvergencia vizsgálata

Honnan tudjuk, hogy az eljárásunk konvergált? (elegendően közel ért a valódi megoldáshoz)

A baj, hogy nem ismerjük a valódi megoldást, de ha ismernénk is, hogyan lehet két vektort összehasonlítani? Mikor mondhatjuk, hogy két vektor nem tér el túlzottan egymástól?

Példa számokkal:

$$|4 - 2| = 2$$

$$|3.001 - 3| = 0.001$$

,tehát, ha két szám különbsége a 0-hoz közel van, akkor hasonlóak.

Hogyan csináljuk ezt vektorokkal?

Vektornormák

A fenti példa vektorokra történő általánosításához meg kell említeni egy fogalmat, ami a vektorok 0-hoz közelségét adja meg, kell adjunk egy mérőszámot a vektorokra. Ezen mérőszámok a **vektornormák**. Jelük: $||\cdot||$

- ▶ A legkézenfekvőbb vektornorma a 2-es norma (jele: $||\cdot||_2$), amelyet mindenki ismer, ez a vektor hossza.

Utasítása:

`norm(v, 2);` vagy csak simán `norm(v);`

- ▶ Számos egyéb vektornorma is létezik (ahogy sok mátrixnorma is van, lásd a következő gyakorlatot), de nekünk most elég, ha tudjuk, hogy a vektor hossza és a 2-es norma ugyanaz.

Visszatérve az eredeti kérdésre: ha x^* a megoldás, akkor ha $||x^k - x^*||_2$ már elég kicsi, akkor mondhatjuk azt, hogy konvergáltunk.