# Közelítő szimbolikus számítások

## Polinomok, Interpolációk

SZTE-TTIK, Számítógépes Optimalizálás Tanszék

# Polinomok

*Def.:* Polinomnak nevezzük a kifejezéseket, amik felírhatóak

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

alakban, ahol $a_n \neq 0$. $\leftarrow$ azért kell, hogy beszélhessünk fokszámról:

A fenti polinom *n-ed fokú*.

Ha minden $a_i$ egész, valós, vagy komplex, akkor egész, valós, vagy komplex együtthatós polinomról beszélünk.

Pl. Ha $a_i \in \mathbb{C}$ akkor $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, azaz a komplex együtthatós polinomok halmazának eleme.

A polinomok segítségével bonyolultabb függvényeket tudunk közelíteni, könnyű őket deriválni, integrálni, és közelíteni a zérushelyeiket.

# Helyettesítési érték

**Helyettesítési érték:** x helyébe egy konkrét számot írunk, elvégezzük a műveleteket és a kapott érték a helyettesítési érték.
Ha egy $x_0$ helyen a helyettesítési érték 0, akkor $x_0$-t a polinom egy gyökének nevezzük.

Pl. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ polinom.

$P(3) = 8$, azaz a helyettesítési érték 8.

$P(1) = 0$, így az 1 a polinom gyöke.

Ez egy egész együtthatós polinom.

# Az algebra alaptétele

Algebra alaptétele:
Minden n-ed fokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitással számolva pontosan n db gyöke van.

Mivel $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$, ennek 'egyetlen' gyöke van az 1. Azonban az 1 itt háromszoros gyök, mert a polinom $(x-1)(x-1)(x-1)$ alakban írható fel.

Általában minden polinom, a tényezők sorrendjétől eltekintve, egyértelműen írható fel $a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$, alakban.

Az $x_1, x_2, ..., x_n$ számok a polinom gyökei. Ha valamely $x_{i_1} = x_{i_2} = ... = x_{i_k}$, akkor az $x_{i_1}$-et k-szoros gyöknek nevezzük, vagy a multiplicitása k.

Mit jelent a multiplicitás? - Idézet egy gimnáziumi beszélgetésből:
- Minden másodfokú polinomnak két gyöke van.
- De Tanár Úr, ha tudok olyat mondani, aminek csak egy gyöke van, akkor az nem polinom?
- Ááá, nem érted. Ez olyan mint amikor van két anyád, de azok egybeesnek.

# Polinomok kiértékelése

Polinomok kiértékelése (helyettesítési érték kiszámítása).
a) Naiv módszerrel:
A k. tag kiszámítása: k db szorzás, illetve a tagok összeadása még n db összeadás:
Összesen: $\sum_{k=1}^{n} k + n = \frac{(n+1)n}{2} + 2 = O(n^2)$.
b) Horner-elrendezés $\rightarrow$ hatékony kiértékelés
Előnyök:

- A polinom kiértékelhető lineáris időben.
- $(x - c)$-vel való polinomosztás leegyszerűsödik.

# Horner-elrendezés

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 =$$
$$= (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0$$

| $x_0$ | $a_n$ | $a_{n-1}$ | ... | $a_1$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $b_0 = a_n$ | $b_1 = b_0 x_0 + a_{n-1}$ | ... | $b_{n-1} = b_{n-2} x_0 + a_1$ | $b_n = b_{n-1} x_0 + a_0$ |

Konkrétan: $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ polinom 2 helyen vett helyettesítési értéke: 25. És tényleg: 8+20+6-9=25.

| $x_0 = 2$ | 1 | 5 | 3 | -9 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1*2+5=7 | 7*2+3=17 | 17*2-9=25 |

**Feladat:** Értékeld ki a $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 31x - 3$ polinomot az $x_0 = -2$ helyen!

# Horner-elrendezés

Egy zérushellyel számolva 0 lesz a táblázat második sorának végén, pl:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_0 = -3$ | 1 | 5 | 3 | -9 |
| | 1 | 2 | -3 | 0 |

1) A polinom kiértékelése már egyszerű egy adott helyen.
2) Extraként kapjuk az $(x - x_0)$ polinommal való polinomosztás hányadosát.

Ugyanis: $(x^3 + 5x^2 + 3x - 9) : (x + 3) = (x^2 + 2x - 3)$

De akkor is működik, ha van maradék:
$(x^3 + 5x^2 + 3x - 9) = (x - 2)(x^2 + 7x + 17) + 25.$

# Ruffini sorozat

Horner-elrendezéshez használható, számítógépen könnyen implementálható.
A táblázat alsó sorában b-kel jelölt sorozatot Ruffini sorozatnak nevezzük. Ruffini sorozat az adott polinom adott $x_0$ helyéhez tartozik.
A $b_n$ a polinom $x_0$ helyen vett helyettesítési értéke.

Az adott helyen vett derivált is meghatározható, mert a hányados polinom helyettesítési értéke.

$$p(x) = (x - x_0)q(x) + b_n$$
$$p'(x) = (x - x_0)'q(x) + (x - x_0)q'(x)$$

Ez pedig az $x_0$ helyen: $p'(x_0) = q(x_0) + (x_0 - x_0)q'(x_0) = q(x_0)$.

# Iterált Horner-elrendezés

A Horner-elrendezést végrehajthatjuk az eredményül kapott (hányados) polinomon is, aztán annak az eredmény polinomján is az eredeti $x_0$ pontból. Ezt helytakarékosan végezve kapjuk az iterált Horner elrendezést.

| $x_0 = -3$ | 1 | 5 | 3 | -9 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | -3 | 0 |
| | 1 | -1 | 0 | |
| | 1 | -4 | | |

$$(x^3 + 5x^2 + 3x - 9) : (x + 3) = (x^2 + 2x - 3)$$
$$(x^2 + 2x - 3) : (x + 3) = (x - 1)$$
$$(x - 1) = (1)(x + 3) - 4$$

Egy gyök multiplicitásának meghatározásához csak ezen táblázat sorainak végén kell megszámolni az első egymást követő 0-ák sorozatának hosszát.
Azaz a példában a -3 multiplicitása 2.

# Polinomok felírása

**Feladat:** Legyen $p(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$. Hányszoros gyök az 1?

A polinomok kódolhatók az együtthatóikkal. Fontos, hogy a 0 együtthatókat is ábrázoljuk. A polinom innentől kezdve számunkra egy vektor, mégpedig az n-ed fokú polinom egy $n + 1$ elemű vektor.

Pl. $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$-hez az [1 5 3 -9] vektor tartozik.
$x^3 + 3x - 9$-hez az [1 0 3 -9] vektor tartozik.

$P(x) = x^2 + 1$

```
» p=[1 0 1];
```

# Műveletek polinomokkal Matlabban

Pl. $P(x) = x^2 + 1$: `» p=[1 0 1];`

a) Kiértékelés:

```
» polyval(p,2)
ans = 5
```

b) Polinomok szorzása:

`» p1 = [1 -1];` $p1 = (x - 1)$

`» p2 = [1 1];` $p2 = (x + 1)$

`» conv(p1,p2)` $p1 * p2 = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$

`ans = 1 0 -1`

c) Polinomok osztása:

`» p = [1 0 1];` $x^2 + 1$

`» p1 = [1 -1];` $x - 1$

`» [q,r] = deconv(p,p1)` $x^2 + 1 = (x + 1)(x - 1) + 2$

```
q = 1 1
r = 0 0 2
```

# Mikor használjuk?

A függvényközelítések, függvényillesztések a legtöbb gyakorlati problémánál felmerülnek:

- néhány ismert függvényérték esetén mondjunk becslést a függvényértékre ismeretlen helyeken (mest. int.)
- ha tudjuk, hogy egy jelenség valamilyen típusú függvényt követ, de nem tudjuk pontosan milyen paraméterekkel és a mért értékeink zajosak, akkor szintén függvényillesztést kell alkalmaznunk (bármilyen tudomány, ahol méréseket végzünk)

# Függvényközelítés alapfeladata

Alapfeladat:
Adott $x_1, x_2, ..., x_n$ alappontok és ezekhez tartozó $y_1, y_2, ..., y_n$ pontok.

Adjuk meg az f függvényt, amely:

- minden pontpáron átmegy
- a legjobban megközelíti a pontpárokat

$\leftarrow$ A minden ponton átmenő függvények esetén találkozhatunk az overfitting (túlillesztés) jelenségével
$\rightarrow$ általában egy ,egyszerűbb' függvényt illesztünk, amely legjobban megközelíti a pontokat.

# Lagrange interpoláció

Cél: megadni egy polinomot, ami minden kérdéses ponton áthalad. (mellesleg pontosan egy ilyen polinom létezik, lásd: előadásjegyzet)

Először is állítsunk elő egy polinomot, amely az $x_1$ pontban 1-et vesz föl, az $x_2, x_3, ..., x_n$ pontokban 0-át.
A polinomok gyöktényezős alakjával nagyon könnyű olyan polinomot mondani, amely az $x_2, x_3, ..., x_n$ pontokban 0-át vesz föl, csak adnunk kell egy polinomot, amelynek ezek a pontok a gyökei.

$$(x - x_2)(x - x_3)...(x - x_n)$$

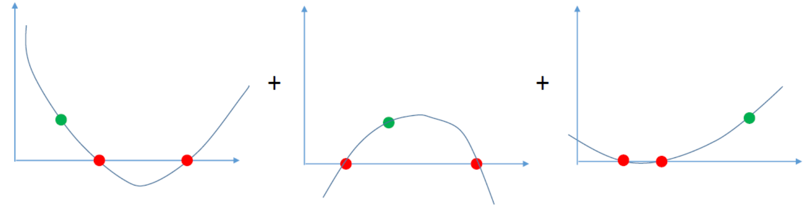
Most már csak azt kell elérni, hogy az $x_1$ helyen ez 1 legyen.

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)...(x_1-x_n)}$$

# Lagrange interpoláció egy pontra

$\frac{(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)...(x_1-x_n)}y_1$, ez egy olyan polinomot készít, amely az $x_1, y_1$ ponton átmegy és az összes többi helyen 0-át vesz föl.

Ezt készítsük el, az összes pontra majd adjuk ezeket össze. Ez a Lagrange interpoláció.



# Lagrange interpoláció általánosan

Általános alak:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_2)(x_i-x_3)\ldots(x_i-x_n)}$$

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) y_i$$

Ez a Lagrange interpolációs polinom. Ha n db alappontunk van, akkor $n-1$-ed fokú.

# Lagrange interpoláció - példa

Határozzuk meg az alábbi pontokhoz tartozó interpolációs polinomot!

$$\begin{array}{ccccc} x_1 = -1 & x_2 = 0 & x_3 = 1 & x_4 = 2 & x_5 = 3 \\ y_1 = 8 & y_2 = 6 & y_3 = 7 & y_4 = -4 & y_5 = 0 \end{array}$$

Az $L_1$ az a polinom, amely az első pontban 1-et vesz föl a többiben 0-át.

$$L_1 = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{((-1)-0)((-1)-1)((-1)-2)((-1)-3)} = \frac{x^4-6x^3+11x^2-6x}{24}$$

Hasonlóan:

$$L_2 = \frac{(x-(-1))(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-(-1))(0-1)(0-2)(0-3)} = \frac{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}{-6}$$

# Lagrange interpoláció - példa

Mivel az informatikus lusta ezért itt megáll, és programot ír.

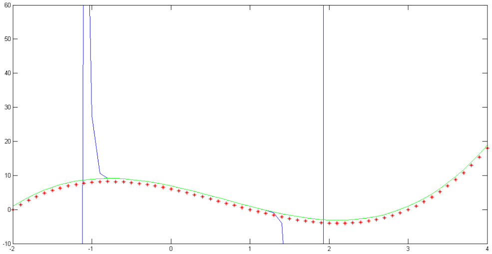
Gyorsabb programíráshoz használhatjuk a poly utasítást.
A poly paraméterként egy vektort vár és elkészít egy polinomot, amelynek gyökei a paramétervektorban kapott számok.

```
» poly([1 -1])
ans = 1 0 -1
```

És valóban: Az $x^2 - 1$ polinom gyökei az 1 és -1.
$(x - 1)(x + 1)$ a gyöktényezős alak.

# Overfitting

Megeshet, hogy a megfigyeléseinkbe hiba csúszott. (‚részeg volt a traktoros')
Ekkor (illetve, ha nagyon sok alappont ismert) a Lagrange-interpoláció minden pontra való illesztése nagyon rossz eredményt okoz.

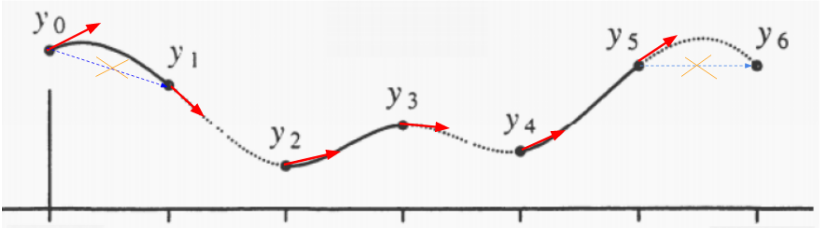


# Spline interpoláció

Lagrange interpolációval az interpolációs polinom annál nagyobb, minél többb alappontunk van. Ez bizonyos esetekben indokolatlanul nagy hullámzást eredményez a polinom grafikus képében.
Erre nyújt megoldást a spline interpoláció:

- kicsi fokszámú polinomokból rakjuk össze a közelítő polinomot,
- a pontokat párosával véve (egymást követő 2 pont),
- közben figyelve az illeszkedési pontokban a derivált értékekre $\rightarrow$ tökéletes illeszkedés.

# Spline interpoláció



# Extra feladatok

- Írj Matlab kódot, mely tetszőleges, inputból érkező polinomra megadja annak a Horner-elrendezését, a hozzá tartozó Ruffini sorozatot, és az iterált Horner-elrendezését. (1 pont)