Közelítő és szimbolikus számítások

Gyökkeresés és numerikus integrál

SZTE-TTIK, Számítógépes Optimalizálás Tanszék

Gyökkereső eljárások

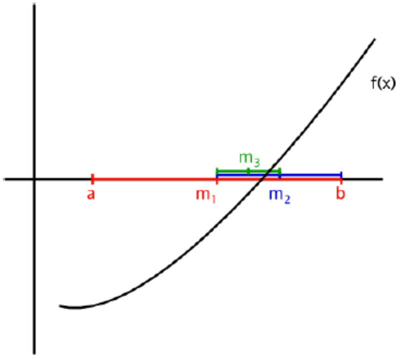
Feladat: $f(x)$ egyszeres, izolált zérushelyének meghatározása az $[a_0, b_0]$ intervallumon.
(Vagyis keressük azt az $a_0 \leq x \leq b_0$ értéket, ahol $f(x) = 0$)

Felező-módszer

$$x_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$$

Ha $f(x_k) = 0$, végeztünk.
Kül.:

- ha $f(x_k)f(a_k) \geq 0$ (előjelük megegyezik) $a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k$
- ha $f(x_k)f(a_k) < 0$ $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k$

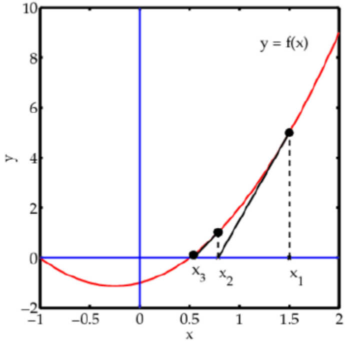


Newton-módszer

Tfh. f kétszer folytonosan differenciálható az $[a_0, b_0]$ intervallumon.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

ha $|x_k - x_{k-1}| \leq \epsilon$, végeztünk



Newton-feladat

Vegyük az $f(x) = x^3 - x + 1$ egyenletet, melynek a deriváltja:
$f'(x) = 3x^2 - 1$
Keressünk egy intervallumot, ahol van zérushely, ez akkor lehetséges, ha a függvényünk folytonos és előjelet vált.
Próbáljunk ki néhány pontot és ha megfelel a feltételnek, akkor válasszunk azok közül egyet kiindulási pontnak:
$f(-2) = -5$
$f(-1) = 1$
-> $x_0 = -1$

Newton-feladat

Írjuk fel a képletet a mostani estünkre:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - x + 1}{3x_k^2 - 1}$$

Helyettesítsünk be:
$x_0 = -1$

$$x_1 = -1 - \frac{(-1)^3 - (-1) + 1}{3(-1)^2 - 1} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Nézzünk meg még egy iterációt:

$$x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{(-\frac{3}{2})^3 - (-\frac{3}{2}) + 1}{3(-\frac{3}{2})^2 - 1} = -\frac{31}{23} = -1.34$$

Valóban közelíti a tényleges gyököt: -1.3247

További-módszer

Húr módszer

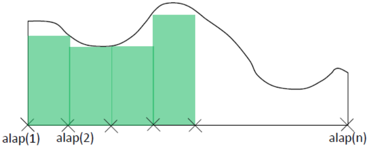
$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)}$$

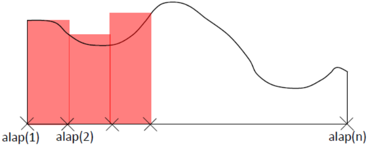
Szelőmódszer

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Integrálás

A kérdés általában határozott integrál kiszámítása.
Emlékezzünk, végeredményben a határozatlan integrált a határozott integrál kiszámítására használtuk a Newton-Leibniz tétel segítségével.

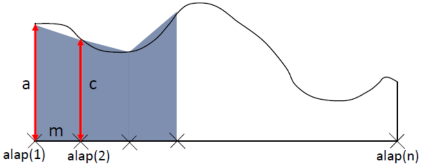




A határozott integrál létezik, ha a beosztás finomításával kapott határérték a felső és alsó összegek esetén megegyezik, és ekkor a határérték a keresett integrál.

Numerikus integrálás

Numerikusan becsüljük meg az integrált!
Számítsuk ki az alsó és felső közelítő összegeket, valamint a legegyszerűbb trapéz szabállyal számolt integrált. Az alsó és felső közelítő összegek az előző ábrán láthatók.
A trapéz szabály pedig:



$$T = \frac{a+c}{2}m$$

Házi feladat

Adott egy függvény néhány helyen mintavételezve. Ábrázoljuk és számítsuk ki az alsó és felső közelítő összegeket, illetve a trapéz módszert. (1 pont)