

Utazó ügynök feladat

Az utazó ügynök problémája

Adott n számú város és a városokat összekötő utak, amelyeknek ismert a hossza. Adott továbbá egy ügynök, akinek adott városból kiindulva, minden várost végig kell látogatnia úgy, hogy minden várost pontosan egyszer érint, és az út befejeztével visszatér a kiindulási városba. Határozzuk meg az ügynök legrövidebb útját.

Vezessük be a következő jelöléseket.

Jelölje $1, 2, \dots, n$ a városokat és c_{ij} az i -edik és j -edik városokat összekötő út hosszát. Ha a két várost nem köti össze út, akkor legyen $c_{ij} = W$, ahol W már az előzőekben is alkalmazott megfelelően nagy szám.

Legyen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha az ügynök az } i\text{-edik városból a } j\text{-edik városba megy,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Végül jelölje tetszőleges $Q \subseteq \{1, \dots, n\}$ halmazra $\bar{Q}$ az $\{1, \dots, n\} \setminus Q$ halmazt. Akkor a fenti feladat az alábbi, *utazó ügynök probléma* néven ismert optimumszámítási modellel írható le.

$$(1) \quad \begin{aligned} & \sum_{t=1}^n x_{it} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\ & \sum_{t=1}^n x_{tj} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\ & \sum_{i \in Q} \sum_{j \in \bar{Q}} x_{ij} \geq 1 \quad (\emptyset \neq Q \subset \{1, \dots, n\}) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = z \rightarrow \min$$

Az első feltételcsoport garantálja, hogy az ügynök minden városból távozik. A második feltételcsoport biztosítja, hogy az ügynök eljut minden városba. Sajnálatos módon a két feltételcsoport megengedi diszjunkt részkörutak kialakulását. Ezt küszöböli ki a harmadik feltételcsoport, amelyben előírjuk, hogy a városok tetszőleges $\emptyset \neq Q \subset \{1, \dots, n\}$ részhalmazára az ügynök valamely Q -beli városból egy nem Q -beli városba látogat. Ez

valóban kizárja a részkörutat, ugyanis a részkörútban szereplő városok halmazát tekintve Q -nak, a harmadik feltételcsoport megfelelő feltétele nem teljesül.

Megjegyezzük, hogy az utazó ügynök problémája a korábbi fejezetek terminológiájával összhangban úgy interpretálható, hogy egy minimális hosszúságú, minden csúcspontot tartalmazó irányított körutat kell meghatározni egy adott hálózatban.

Az (1) modellel kapcsolatban vegyük észre, hogy a harmadik feltételcsoportban a feltételek száma $2^n - 2$, ami már viszonylag kicsi n mellett is nagyon sok egyenlőtlenséget eredményez. A feltételek számának csökkentése a problémának több ekvivalens formalizálása is kidolgozásra került. A következő (2) változatot A. Tucker dolgozta ki 1960-ban.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=1}^n x_{it} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\
 (2) \quad & \sum_{t=1}^n x_{tj} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\
 & u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \leq n-2 \quad (2 \leq i \neq j \leq n) \\
 & x_{ii} = 0, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n) \\
 & u_i \geq 0 \quad \& \quad \text{egész} \quad (i = 2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = z \rightarrow \min$$

Az ekvivalencia igazolásához egyrészt azt kell megmutatnunk, hogy diszjunkt részkörutak egyesítése nem elégíti ki a (2) feladat feltételrendszerét. Ezt indirekt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy a feladat valamely $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{u}})$ lehetséges megoldására

$$\bar{x}_{i_1 i_2} = \bar{x}_{i_2 i_3} = \dots \bar{x}_{i_k i_1} = 1$$

teljesül valamely $1 < k < n$ egészre. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $1 \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. Mivel $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{u}})$ lehetséges megoldás, ezért

$$\bar{u}_{i_1} - \bar{u}_{i_2} + (n-1)\bar{x}_{i_1 i_2} \leq n-2$$

$$\bar{u}_{i_2} - \bar{u}_{i_3} + (n-1)\bar{x}_{i_2 i_3} \leq n-2$$

$$\vdots$$

$$\bar{u}_{i_k} - \bar{u}_{i_1} + (n-1)\bar{x}_{i_k i_1} \leq n-2$$

teljesül. Összeadva rendre az egyenlőtlenségek bal- és jobboldalait, az alábbi egyenlőtlenségnek kell fennállnia

$$k(n-1) \leq k(n-2) ,$$

ami $1 < k < n$ esetén ellentmondás.

Másrészt igazolnunk kell, hogy bármely körúthoz létezik a (2) feladatnak egy olyan $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{u}})$ lehetséges megoldása, hogy az $\bar{\mathbf{X}}$ által meghatározott élek pontosan a tekintett körutat szolgáltatják. Ehhez tekintsünk egy tetszőleges, az $(1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_n, 1)$ éleket tartalmazó körutat. Defináljuk $\bar{\mathbf{X}}$ -t és $\bar{\mathbf{u}}$ -t a következők szerint:

$$\bar{x}_{1i_2} = \bar{x}_{i_2 i_3} = \dots \bar{x}_{i_n 1} = 1 ,$$

$$\bar{x}_{ij} = 0 \text{ a többi indexpárra,}$$

$$\bar{u}_{i_t} = t \quad (t = 2, \dots, n) .$$

Megmutatjuk, hogy $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{u}})$ kielégíti (2) feltételrendszerét. A feltételek teljesülése a harmadik feltételcsoporttól eltekintve nyilvánvaló. Legyen ezek után $2 \leq i \neq j \leq n$ tetszőleges indexpár. Az $\bar{\mathbf{u}}$ vektor definíciójából következik, hogy $\bar{u}_i - \bar{u}_j \leq n-2$. Másrészt $\bar{x}_{ij} = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $i = i_r$ és $j = i_{r+1}$ valamely $2 \leq r \leq n$ indexre. De ebben az esetben

$$\bar{u}_i - \bar{u}_j + (n-1)\bar{x}_{ij} = r - (r+1) + (n-1) \leq n-2 ,$$

azaz a harmadik feltételcsoport feltételei rendre teljesülnek, így $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{u}})$ lehetséges megoldása (2)-nek.

Vizsgáljuk ezek után az (1) feladatot. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az ügynök az 1-gyel jelzett városból indul. Ekkor

$n - 1$ számú városba mehet, majd $n - 2$ -be, és így tovább. Ebből az következik, hogy a lehetséges megoldások száma $(n - 1)!$. Viszont így rögtön adódik, hogy az (1) feladatnak mindig létezik optimális megoldása. Ezzel kapcsolatban célszerű megjegyezni, hogy amennyiben az i -edik városból nem vezetett út a j -edik városba, akkor ezt a modellben egy W hosszúságú fiktív úttal helyettesítettük. Így, ha optimumértékként W adódik, akkor ez azt jelenti, hogy a városok közötti úthálózat olyan, amely nem teszi lehetővé a körbejárást, azaz a gyakorlati problémának nincs lehetséges megoldása.

Vegyük észre, hogy az (1) feladat feltételrendszere csak n -től függ. Így a $\mathbf{C}^{n \times n}$ költségmátrix egyértelműen meghatározza a feladatot. Ennek alapján az (1) feladatra a $TSP(\mathbf{C})$ jelöléssel fogunk hivatkozni. Itt az angol *Traveling Salesman Problem* név rövidítését használjuk, mely a témakör irodalmában igen széles körben elterjedt.

A továbbiakban az egyszerűbb tárgyalás érdekében az $\bar{\mathbf{X}}$ mátrixot *körútnak* nevezzük, ha minden $\bar{x}_{ij} = 1$ -re véve az (i, j) éleket, az így képezett éleket az n -szögpontú teljes gráfban irányított kört alkotnak.

Most ismételten használjuk a hozzárendelési feladatok bemutatásánál definiált mátrixok ekvivalenciáját.

A tekintett reláció és a TSP kapcsolatát adja meg a következő állítás.

segéd-tétel. *Ha $\mathbf{C}^{n \times n} \sim \mathbf{D}^{n \times n}$, akkor a $TSP(\mathbf{C})$ és $TSP(\mathbf{D})$ feladatok optimális megoldásai megegyeznek.*

Bizonyítás. Mivel mindkét feladatnak létezik optimális megoldása, ezért az állítás korrekt. Másrészt a tekintett két feladat feltételrendszere azonos, ezért a lehetséges megoldások halmaza közös, amelyet jelöljön L . Továbbá jelölje a $TSP(\mathbf{C})$ és $TSP(\mathbf{D})$ feladatok célfüggvényét rendre $z_{\mathbf{C}}$ és $z_{\mathbf{D}}$. Megmutatjuk, hogy van olyan γ konstans, amelyre $z_{\mathbf{C}}(\bar{\mathbf{X}}) = z_{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{X}}) + \gamma$ teljesül tetszőleges $\bar{\mathbf{X}}$ lehetséges megoldásra. Valóban, mivel $\mathbf{C} \sim \mathbf{D}$, ezért vannak olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n$ konstansok, hogy $c_{ij} = d_{ij} + \alpha_i + \beta_j$ teljesül bármely $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ indexpárra. De akkor

$$\begin{aligned} z_{\mathbf{C}}(\bar{\mathbf{X}}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij} + \alpha_i + \beta_j) \bar{x}_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \bar{x}_{ij} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} + \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^n \bar{x}_{ij}. \end{aligned}$$

Mivel $\bar{\mathbf{X}}$ lehetséges megoldás, ezért $\sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = 1$ és $\sum_{i=1}^n \bar{x}_{ij} = 1$. De akkor

$$z_{\mathbf{C}}(\bar{\mathbf{X}}) = z_{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{X}}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j .$$

Most legyen $\gamma = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j$. Akkor a $z_{\mathbf{C}}(\bar{\mathbf{X}}) = z_{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{X}}) + \gamma$ egyenlethez jutunk, amely teljesül bármely $\bar{\mathbf{X}}$ lehetséges megoldásra. Ez pontosan azt jelenti, hogy a lehetséges megoldások halmazán a két célfüggvény csak egy additív konstansban tér el egymástól, amiből nyilvánvalóan következik az állítás.

következmény. *Az optimális megoldás meghatározását illetően elegendő olyan $TSP(\mathbf{C})$ feladatok vizsgálatára szorítkoznunk, amelyekre $\mathbf{C} \geq 0$ teljesül.*

A fenti következmény alapján a továbbiakban minden hivatkozás nélkül feltételezzük, hogy a vizsgált feladatok célfüggvényegyütthatói rendre nem-negatívak.

Az (1) feladattal kapcsolatosan azt is észrevehetjük, hogy amennyiben a harmadik feltételcsoporthoz eltekintünk, úgy a hozzárendelési feladathoz jutunk. Ebből viszont következik, hogy (1) tetszőleges $\bar{\mathbf{X}}$ lehetséges megoldása egyben lehetséges megoldása a $\mathbf{C}$ költségmátrixú $H(\mathbf{C})$ hozzárendelési feladatnak is. Jelölje (1) lehetséges megoldásainak halmazát L , $H(\mathbf{C})$ lehetséges megoldásainak halmazát S . Akkor $L \subseteq S$, és így

$$\min\{z(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in S\} \leq \min\{z(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in L\} .$$

A kapott egyenlőtlenségből nyilvánvalóan adódnak a következők:

- (i) *ha $\bar{\mathbf{X}}$ optimális megoldása $H(\mathbf{C})$ -nek és $\bar{\mathbf{X}}$ körút, akkor $\bar{\mathbf{X}}$ egyben optimális megoldása $TSP(\mathbf{C})$ -nek is,*
- (ii) *ha $\bar{\mathbf{X}}$ optimális megoldása $H(\mathbf{C})$ -nek, akkor $z(\bar{\mathbf{X}})$ alsó korlátja a $TSP(\mathbf{C})$ feladat optimumértékének.*

A továbbiakban olyan speciális hozzárendelési feladatok használunk, melyekre kikötjük, hogy bizonyos változóknak 0 értéket, a változók egy másik csoportjának 1 értéket kell felvennie. Ismét I és J jelöli azon változók indexeinek a halmazát, amelyekről kikötjük, hogy értékük 1 illetve 0. Ezen speciális hozzárendelési feladatok jelölésére a $(H(\mathbf{C}), I, J)$ jelölést fogjuk használni.

A következőkben egy $B\&B$ eljárást építünk fel az utazó ügynök probléma megoldására, amelyben a korlátozó függvény definiálására a fentiekben vázolt, a $H(\mathbf{C})$ és $TSP(\mathbf{C})$ feladatok közti kapcsolatot fogjuk kihasználni. Az eljárás felépítését az általános eljárásnak megfelelően végezzük. Feltételezzük, hogy a $\mathbf{C}$ mátrixban $c_{ii} = W$, $(i = 1, \dots, n)$ teljesül.

I. Az Ω halmaz megadása

Legyen Ω a $\{0, 1\}$ feletti $n \times n$ mátrixok halmaza. Nyilvánvaló, hogy $L \subseteq \Omega$, továbbá $|\Omega| = 2^{n^2}$, így Ω rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal.

II. A φ szétválasztási és a g korlátozó függvények megadása

Elsőként a függvényeket az Ω halmazon definiáljuk. Legyen $g(\Omega)$ a $H(\mathbf{C})$ hozzárendelési feladat optimumértéke. A $\varphi(\Omega)$ definiálásához pedig különböztessük meg az alábbi két esetet.

(a) Ha $H(\mathbf{C})$ optimális megoldása körút, akkor ez optimális megoldása a $TSP(\mathbf{C})$ feladatnak is. Így $\bar{z}$ felveszi az optimumértéket és Ω nem lesz élő levél, azaz $\Omega \notin F_0$. De akkor nem kell a φ függvényt az Ω halmazon definiálni.

(b) Ha a $H(\mathbf{C})$ feladat $\bar{\mathbf{X}}$ optimális megoldása nem körút, akkor $\bar{\mathbf{X}}$ diszjunkt részkörökből áll. Legyen ezek közül az $(i_1, i_2), \dots, (i_{k-1}, i_k), (i_k, i_1)$ éleket tartalmazó részkörút minimális elemszámú, és tekintsük a következő halmazokat:

$$\begin{aligned}\Omega^{(0)} &= \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega \ \& \ x_{i_1 i_2} = \dots = x_{i_k i_1} = 1\}, \\ \Omega^{(1)} &= \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega \ \& \ x_{i_1 i_2} = 0\}, \\ \Omega^{(2)} &= \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega \ \& \ x_{i_2 i_3} = 0 \ \& \ x_{i_1 i_2} = 1\}, \\ &\vdots \\ \Omega^{(k)} &= \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega \ \& \ x_{i_k i_1} = 0 \ \& \ x_{i_1 i_2} = \dots = x_{i_{k-1} i_k} = 1\}.\end{aligned}$$

Egyszerűen beláthatók a következők:

- (1) az $\Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(k)}$ halmazok a felbontandó halmaznak (jelenleg Ω) egy valódi osztályozását alkotják,
- (2) bármely $1 \leq i \leq k$ indexre az $\Omega^{(i)}$ definíciójában 1 értékkel szereplő változóknak megfelelő élekből álló gráf nem tartalmaz részkörutat,
- (3) $\Omega^{(0)} \cap L = \emptyset$.

Definiáljuk $\varphi(\Omega)$ -t a következők szerint. Legyen

$$\varphi(\Omega) = \{\Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(k)}\}.$$

A φ függvény definícióját úgy fogjuk kiterjeszteni, hogy az (1),(2),(3) tulajdonságok érvényben maradjanak. A továbbiakban az osztályozások osztályainak leírására azt a technikát fogjuk használni, hogy az I, J halmazokban megadjuk azon változók indexeit, amelyek értéke rögzített. Például $\Omega^{(2)} = \Omega_{I,J}$, ahol $I = \{(i_1, i_2)\}$, $J = \{(i_2, i_3)\}$. A rögzített értékű változókat *kötött változóknak*, a többi változót pedig *szabad változóknak* fogjuk nevezni $\Omega_{I,J}$ -re vonatkozóan. Végül speciálisan azokat az osztályokat, amelyekről tudjuk, hogy nem tartalmazznak körutat (Ω felbontásánál $\Omega^{(0)}$), lássuk el *-gal.

Ezek után kiterjesztjük a φ és g függvények értelmezését.

A g korlátozó függvény definiálásához tekintsük a $B\&B$ -fában valamely élő levél leszármazottját. Ha a tekintett osztály *-gal lett ellátva, akkor g rendelje ehhez a részhalmazhoz a W korlátot. Ellenkező esetben jelölje a tekintett osztályt $\Omega_{I,J}$. Ekkor a $(H(\mathbf{C}), I, J)$ hozzárendelési feladat bármely lehetséges megoldása eleme $\Omega_{I,J}$ -nek, továbbá bármely olyan körút, amelyben az I -ben szereplő indexekre a változók értéke 1, valamint a J -ben szereplő indexekre a változók értéke 0, lehetséges megoldása $(H(\mathbf{C}), I, J)$ -nek. Viszont így a $(H(\mathbf{C}), I, J)$ feladat $\tilde{z}$ optimumértékére

$$\tilde{z} \leq \min\{z(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in L \cap \Omega_{I,J}\}$$

teljesül, amennyiben $L \cap \Omega_{I,J} \neq \emptyset$. Ennek alapján definiáljuk $g(\Omega_{I,J})$ -t a következők szerint:

$$g(\Omega_{I,J}) = \begin{cases} (H(\mathbf{C}), I, J) \text{ optimuma,} & \text{ha } |\Omega_{I,J}| > 1, \\ z(\bar{\mathbf{X}}), & \text{ha } \Omega_{I,J} = \{\bar{\mathbf{X}}\} \text{ és } \bar{\mathbf{X}} \text{ körút,} \\ W & \text{különben.} \end{cases}$$

A φ függvény definíciójának kiterjesztéséhez tekintsük a $B\&B$ -fa egy élő $\Omega_{I,J}$ levelét. Mivel $\Omega_{I,J}$ élő levél, ezért $|I| + |J| < n^2 - n$, $(H(\mathbf{C}), I, J)$ optimuma kisebb, mint W , továbbá $(H(\mathbf{C}), I, J)$ optimális megoldása nem körút. (Ellenkező esetben a levél lezárásra kerülne.) De akkor $(H(\mathbf{C}), I, J)$ optimális megoldása diszjunkt részkörutak uniója. Válasszunk ezen részkörutak közül egy minimális elemszámút. Jelölje K a választott részkörúthoz tartozó változók indexeinek a halmazát. Akkor K nemüres halmaz, $K \cap J = \emptyset$, és a (2) tulajdonság miatt $K \not\subseteq I$. Legyen $K \setminus I = \{(i_1, j_1), \dots, (i_r, j_r)\}$. Mivel $(K \setminus I) \cap J = \emptyset$ és $(K \setminus I) \cap I = \emptyset$, ezért bármely $x_{i_s j_s}$ ($1 \leq s \leq r$) változó

szabad változó lesz $\Omega_{I,J}$ -re vonatkozóan. Képezzük ezek után a következő halmazokat:

$$\Omega_{I_0,J_0} = \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega_{I,J} \ \& \ x_{i_1j_1} = \dots = x_{i_rj_r} = 1\},$$

$$\Omega_{I_1,J_1} = \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega_{I,J} \ \& \ x_{i_1j_1} = 0\},$$

$$\Omega_{I_2,J_2} = \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega_{I,J} \ \& \ x_{i_2j_2} = 0 \ \& \ x_{i_1j_1} = 1\},$$

$$\vdots$$

$$\Omega_{I_r,J_r} = \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega_{I,J} \ \& \ x_{i_rj_r} = 0 \ \& \ x_{i_1j_1} = \dots = x_{i_{r-1}j_{r-1}} = 1\}.$$

Mivel $x_{i_tj_t}$ ($1 \leq t \leq r$) szabad változók $\Omega_{I,J}$ -re vonatkozóan, ezért a fenti halmazok az $\Omega_{I,J}$ halmaznak egy valódi osztályozását alkotják. Nyilvánvaló, hogy $\Omega_{I_0,J_0} \cap L = \emptyset$, ugyanis Ω_{I_0,J_0} minden eleme tartalmazza a kiválasztott minimális elemszámú részkörutat, mint részgráfot. Most legyen $0 \leq t \leq r$ tetszőleges egész. Jelölje $\mathcal{G}_t = (N, E_t)$ azt a gráfot, amelyre $(i, j) \in E_t$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(i, j) \in I_t$, ahol $N = \{1, \dots, n\}$. Ekkor $\mathcal{G}_0$ tartalmazza a kiválasztott minimális elemszámú részkörutat és más részkörutat nem tartalmaz. Másrészt bármely $1 \leq t \leq r$ indexre $\mathcal{G}_t$ előállítható $\mathcal{G}_0$ -ból úgy, hogy $\mathcal{G}_0$ egyetlen részkörútjából elhagyunk egy vagy több élet. De akkor $\mathcal{G}_t$ nem tartalmaz részkörutat. Ez pontosan azt jelenti, hogy az Ω_{I_t,J_t} -ben 1 értékkel rögzített változóknak megfelelő élek nem alkotnak részkörutat bármely $1 \leq t \leq r$ indexre. Következésképp, a definiált halmazok rendelkeznek az (1),(2),(3) tulajdonságokkal. Legyen ezek után

$$\varphi(\Omega_{I,J}) = \{\Omega_{I_0,J_0}, \Omega_{I_1,J_1}, \dots, \Omega_{I_r,J_r}\}.$$

A φ és g függvények definíciójából következik, hogy rendelkeznek a kívánt tulajdonságokkal.

III. Faépítési stratégia

Azt a korábban már megismert stratégiát fogjuk alkalmazni, miszerint egy minimális korláttal rendelkező levelet választunk a faépítés során.