

1. Korlátozás és szétválasztás módszere

A címben szereplő módszer egy általános kereteljárásként interpretálható, melynek különböző konkrét alkalmazásai igen hatékony eszközt szolgáltatnak a kombinatorikus optimalizálási feladatok megoldásában.

A módszer alapgondolata A. H. Land és A. G. Doig [?] munkájában lelhető fel első ízben. A szerzők a vegyes egészértékű lineáris programozási feladat megoldására adtak meg egy olyan eljárást, amely alapvetően erre a technikára épült. Maga az igen találó angol "*Branch-and-Bound*" elnevezés J. D. C. Little és társai [?] dolgozatában szerepelt először, amelyben ezen technika felhasználásával egy, az utazó ügynök probléma megoldására szolgáló eljárás került publikálásra. A korábbi speciális eseteket szintetizálva, P. Bertier és B. Roy [?] dolgozta ki a módszer első általános változatát. Azóta a korlátozás és szétválasztás módszere számos formában, az általánosság különböző szintjein nyert publikálást és alkalmazásával igen sok speciális problémához hatékony megoldási eljárások készültek.

A továbbiakban mi is több változaton keresztül fogjuk felépíteni az eljárást, az egyes változatokat speciális problémamegoldásokkal fogjuk demonstrálni.

Alapeljárás

A módszer tárgyalásához tekintsük az alábbi optimalizálási problémát:

$$(7.1) \quad \min\{z(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in L\}$$

ahol L azonos dimenziójú, egész koordinátájú, nemnegatív vektorok véges és nemüres halmaza.

Az adott feltételek mellett a (7.1) alatti feladatnak nyilvánvalóan létezik optimális megoldása, ugyanis véges sok célfüggvényérték minimumát keressük. Legegyszerűbb megoldási módszernek első közelítésben az tűnhetne, hogy L elemeit végigvizsgáljuk, és vesszük egy olyan elemét, amelyen $z(\mathbf{x})$ a legkisebb értéket veszi fel. Ezzel egy optimális megoldáshoz jutunk. Az ilyen típusú eljárást szokásos *leszámlálási eljárásnak* nevezni. A különböző

gyakorlati problémáknál L elemszáma igen nagy lehet. Például $n \times n$ -es költségmátrixú hozzárendelési feladat esetén $|L| = n!$. Így célszerű lehetőség szerint a teljes leszámrlálást elkerülni, és minél kevesebb lehetséges megoldást megvizsgálni. Ez utóbbi célokat igyekszik realizálni a korlátozás és szétválasztás módszere.

Az eljáráshoz szükséges két függvény. Ezek egyike az úgynevezett *szétválasztási függvény*, amely az L halmaz tetszőleges $|L'| > 1$ részhalmazához hozzárendeli L' egy valódi osztályozását. A másik függvény, az úgynevezett *korlátozó függvény*, amely L tetszőleges $L' \neq \emptyset$ részhalmazához hozzárendeli a $z(\bar{\mathbf{x}})$ ($\bar{\mathbf{x}} \in L'$) függvényértékek egy alsó korlátját. Speciálisan, $L' = \{\bar{\mathbf{x}}\}$ esetén a $z(\bar{\mathbf{x}})$ függvényértéket. Most tegyük fel, hogy rendelkezésünkre állnak ilyen függvények, és jelölje a szétválasztási függvényt φ , a korlátozó függvényt pedig g .

Az eljárás során egy úgynevezett *leszámrlálási fát* vagy *Branch-and-Bound fát* (a továbbiakban *B&B fa*) építünk fel a következők szerint.

Eljárás

Előkészítő rész. A fa gyökere legyen L . Határozzuk meg $g(L)$ -t és rendeljük címkeként az L szögponthoz. Legyen $r = 1$.

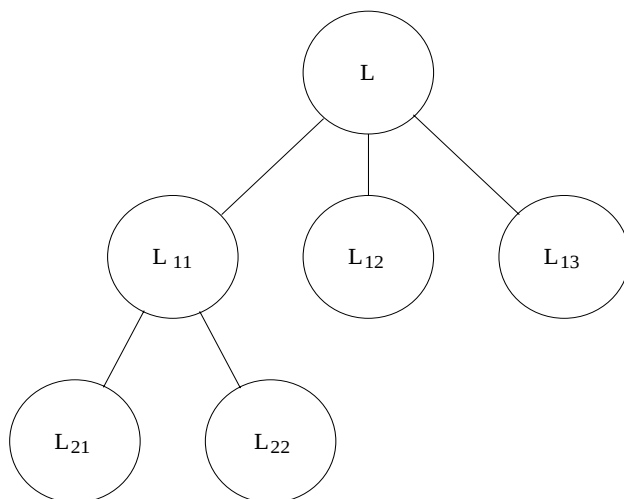
Iterációs rész (r -edik iteráció)

- *1. lépés.* Az aktuális fa levelein határozzuk meg a címkék minimumát és válasszunk ki egy minimális címkéjű L' levelet.
- *2. lépés.* Ha $L' = \{\bar{\mathbf{x}}\}$, akkor vége az eljárásnak; $\bar{\mathbf{x}}$ optimális megoldás. Ellenkező esetben a 3. lépés következik.
- *3. lépés.* Bővítsük az aktuális fát $\varphi(L')$ elemeivel, mint L' leszármazottai-val, majd az új szögpontokhoz rendre számítsuk ki a korlátokat és rendeljük az illető szögpontokhoz címkeként. Ezek után növeljük r értékét 1-gyel, majd térjünk rá a következő iterációs lépésre.

Az eljárás két iterációs lépésében felépülő *B&B* fát szemlélteti a 7.1. ábra, ahol

$$\varphi(L) = \{L_{11}, L_{12}, L_{13}\}, \quad g(L_{11}) \leq g(L_{1j}), \quad (j = 2, 3),$$

$$\varphi(L_{11}) = \{L_{21}, L_{22}\}.$$



7.1. ábra. B&B fa két iterációs lépés után.

Az eljárás helyessége

Végesség. Vegyük észre, hogy φ definíciója alapján minden szögpontnak legfeljebb $|L|$ leszármazottja van, továbbá minden iterációs lépésben az aktuális fa leveleihez tartozó halmazok L -nek egy osztályozását alkotják. Szintén φ definíciója alapján az egymást követő osztályozások egymás valódi finomításai, így a felépíthető fa mélysége legfeljebb $|L|$. De akkor a felépíthető fa véges, amivel adódik az eljárás végessége.

Helyesség. Tegyük fel, hogy valamely iterációs lépésben L' -höz tartozik a minimális korlát és $L' = \{\bar{\mathbf{x}}\}$. Jelölje R a leveleknek megfelelő halmazok halmazát. Akkor $z(\bar{\mathbf{x}}) = g(L') \leq g(S)$ bármely $S \in R$ -re. De $g(S) \leq \min\{z(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\}$, azaz $g(S) \leq z(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in S$ -re. Így $z(\bar{\mathbf{x}}) \leq z(\mathbf{x})$ bármely $\mathbf{x} \in S$ -re és bármely $S \in R$ -re. De akkor mivel R osztályozása L -nek, ezért $z(\bar{\mathbf{x}}) \leq z(\mathbf{x})$ bármely $\mathbf{x} \in L$ -re, amivel igazoltuk, hogy $\bar{\mathbf{x}}$ optimális megoldás. Az eljárás demonstrálására tekintsük az alábbi 0-1 értékű programozási feladatot:

7.1. példa.

$$5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 5$$

$$\frac{x_i \in \{0, 1\} \quad (i = 1, \dots, 4)}{-3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = z(x_1, \dots, x_4) \rightarrow \min}$$

Ekkor

$$L = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0)\}.$$

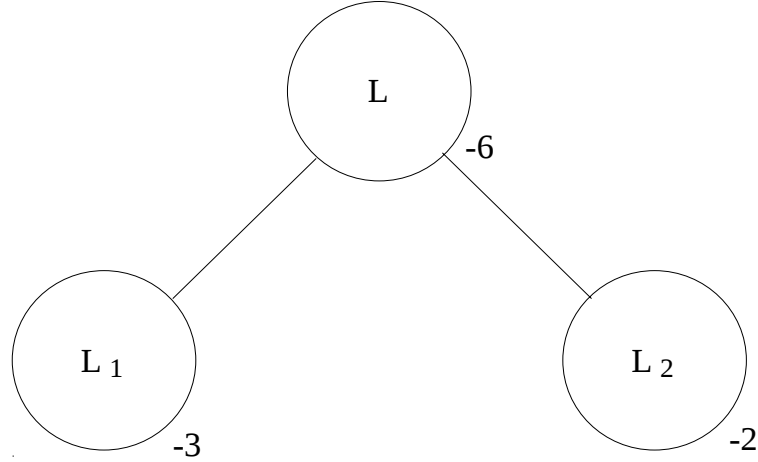
L -hez alsó korlátként hozzárendelhetjük a célfüggvényegyütthatók összegét, azaz tegyük fel, hogy $g(L) = -6$. Tegyük fel továbbá, hogy a φ szétválasztási függvény két részhalmazra bontja L -t, L_1 -be kerülnek azok a lehetséges megoldások, amelyeknek első koordinátája 1, L_2 -be kerülnek azok a lehetséges megoldások, amelyeknek első koordinátája 0. Akkor

$$L_1 = \{(1, 0, 0, 0)\} \text{ és } g(L_1) = -3,$$

$$L_2 = \{(0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0)\}.$$

L_2 -nek csak olyan lehetséges megoldások elemei, amelyekben $x_1 = 0$ és az x_2, x_3, x_4 változók közül legfeljebb kettő vehet fel 0-tól különböző értéket, ugyanis ellenkező esetben nem teljesülne az $5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 5$ feltétel. Ezért $z(\mathbf{x}) \geq -2$ teljesül bármely $\mathbf{x} \in L_2$ vektorra.

Tegyük fel, hogy $g(L_2) = -2$. Akkor az alábbi $B\&B$ fához jutunk.



7.2. ábra. A 7.1. példához tartozó $B\&B$ fa.

Mivel L_1 minimális címkéjű, és $L_1 = \{(1, 0, 0, 0)\}$, ezért vége az eljárásnak; $\bar{\mathbf{x}} = (1, 0, 0, 0)$ optimális megoldása a tekintett feladatnak.

Az eljárás ismertetett változatának alkalmazása nehézkes. A megoldandó problémák többségénél L -ről kevés információ áll rendelkezésre és nagyon nehéz az előírt tulajdonságokkal rendelkező szétválasztási függvényt találni. Például, ha az előzőekben megoldott feladatot úgy változtatjuk meg, hogy a feltételrendszerben x_1 együtthatója 6, akkor az alkalmazott szétválasztási függvényünk már nem lesz jó, $L_1 = \emptyset$ és $L_2 = L$ felbontást eredményez.

A probléma egy lehetséges kiküszöbölése az, hogy L -hez keresünk egy olyan véges Ω halmazt, amely egyrészt tartalmazza L -t, másrészt viszonylag könnyű Ω -hoz szétválasztási függvényt meghatározni. Így a $B\&B$ fák levelei Ω osztályozásainak egy finomodó sorozatát alkotják, és mivel $L \subseteq \Omega$, egyidejűleg implicit módon adódik L osztályozásainak is egy tágabb értelemben vett finomodó sorozata. Nyilvánvaló ahhoz, hogy az eljárás a kívánt módon működjön, a korlátozó függvényre vonatkozó előírásokat alkalmasan meg kell változtatni.

A vizsgált példában $\Omega = \{(u_1, \dots, u_4) : u_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 4\}$ tartalmazza L -et, és Ω bármely legalább kételemű részhalmaza szétbontható két nemüres részhalmazra az $x_1, \dots, x_4$ változók valamelyikének értékei szerint.

Sok esetben heurisztikus eljárásokkal elő lehet állítani viszonylag jó célfüggvényértékkel rendelkező lehetséges megoldásokat. Bizonyos feladatoknál a módszer végrehajtása során részeredményként is előállnak lehetséges megoldások. A rendelkezésre álló lehetséges megoldások felhasználásával esetenként hatékonyabbá tehető az eljárás a következők szerint. Jelölje $\bar{X}$ a rendelkezésre álló lehetséges megoldások halmazát. Legyen $\bar{z} = \min\{z(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \bar{X}\}$ és jelölje $\mathbf{x}^*$ az $\bar{X}$ halmaz egy olyan elemét, amelyre $z(\mathbf{x}^*) = \bar{z}$ teljesül. Mivel $\bar{X} \subseteq L$, ezért $\bar{z}$ az optimum értékének egy felső korlátja. Most jelölje L' az aktuális $B\&B$ fa valamely leveléhez tartozó halmazt. Ekkor $g(L')$ az L' halmazban levő lehetséges megoldásokon felvett célfüggvényértékek alsó korlátja. Ha $g(L') \geq \bar{z}$, akkor az L' halmazba eső bármely $\tilde{\mathbf{x}}$ lehetséges megoldásra $z(\tilde{\mathbf{x}}) \geq g(L') \geq \bar{z}$ teljesül. Ez pontosan azt jelenti, hogy a tekintett levélhez tartozó lehetséges megoldások között nincs jobb, mint $\mathbf{x}^*$. Viszont ez esetben az aktuális $B\&B$ fa ezen levelének további vizsgálata az optimum meghatározását illetően felesleges, az eljárás folytatása során az illető levéltől el lehet tekinteni. Ilyen esetben szokásos szóhasználat, hogy a $B\&B$ fa megfelelő *ágát lezárjuk*. Ezt a továbbiakban az illető szögpont aláhúzásával jelöljük. Az aktuális fa azon leveleit amelyek nincsenek lezárva *élő leveleknek* nevezzük.

A $B\&B$ fa felépítése igen szemléletessé teszi az eljárást, ezért a továbbiakban mi ezt az ábrázolástechnikát fogjuk használni. Számítástechnikai szempontból viszont nem kívánatos a felesleges információk (lezárt ágak) tárolása.

Ez úgy küszöbölhető ki, hogy minden iterációs lépésben csak az aktuális $B\&B$ fa élő leveleit és a hozzájuk tartozó információkat tároljuk.

Az eljárás különböző alkalmazásai során kiderült, hogy az aktuális $B\&B$ fa azon levelének a kiválasztási stratégiája, amelyből a fát továbbépítjük igen jelentős. Az ismertett változatban alkalmazott módszer – egy minimális korláttal rendelkező levél kiválasztása – nem minden esetben célszerű. Bizonyos problémacsoportoknál más stratégiák növelik az eljárás hatékonyságát. Így a különböző alkalmazásoknál más és más kiválasztási szabály alapján történhet a $B\&B$ fa kiépítése.

A fentiekben vázolt bővítéseket ötvözi magába a (7.1) probléma megoldására szolgáló, az alábbiakban felépítésre kerülő eljárás.

Tegyük fel, hogy adott egy olyan Ω véges halmaz, amelyre $L \subseteq \Omega$. Továbbá adott egy olyan φ szétválasztási függvény, amely Ω tetszőleges legalább kételemű Ω' részhalmazához hozzárendeli Ω' egy valódi osztályozását. Végül adott egy olyan g korlátozó függvény, hogy Ω tetszőleges nemüres Ω' részhalmazára az alábbiak teljesülnek:

$$g(\Omega') \leq \min\{z(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Omega' \cap L\}, \text{ ha } |\Omega'| > 1 \text{ és } \Omega' \cap L \neq \emptyset, \\ g(\Omega') \text{ tetszőleges, ha } |\Omega'| > 1 \text{ és } \Omega' \cap L = \emptyset,$$

$$g(\Omega') = \begin{cases} z(\bar{\mathbf{x}}), & \text{ha } |\Omega'| = 1 \text{ \& } \Omega' \cap L = \{\bar{\mathbf{x}}\}, \\ W, & \text{ha } |\Omega'| = 1 \text{ \& } \Omega' \cap L = \emptyset, \end{cases}$$

ahol W alkalmasan nagy számot jelöl, például számítógépes implementációban a gépben ábrázolható legnagyobb számot. Esetenként W -hez hozzáadunk vagy levonunk konstansokat. Ezen műveletek eredményét úgy definiáljuk, hogy az ismét W . A g függvénnyel kapcsolatban feltételezzük, hogy az Ω' halmazok (esetleg implicit) leírása olyan, hogy az $|\Omega'| = 1$, $\Omega' \cap L = \{\bar{\mathbf{x}}\}$ eset felismerhető, és $\bar{\mathbf{x}}$ explicit módon előállítható.

Tegyük fel továbbá, hogy ismertek olyan eljárások, amelyekkel a $g(\Omega')$ függvényértékek meghatározhatók bármely $\emptyset \neq \Omega' \subseteq \Omega$ esetén és a $\varphi(\Omega')$ függvényértékek meghatározhatók bármely $\Omega' \subseteq \Omega$ és $|\Omega'| > 1$ részhalmazra. Ekkor a (7.1) feladatot megoldhatjuk az alábbi eljárással.

B&B eljárás

Előkészítő rész. Valamilyen heurisztikus módszerrel határozzunk meg egy lehetséges megoldást, jelölje ezt $\mathbf{x}_0$. Legyen a $\bar{z}$ változó értéke $z(\mathbf{x}_0)$

és az $\mathbf{x}^*$ vektorváltozó értéke $\mathbf{x}_0$. Ha lehetséges megoldás meghatározására nincsen lehetőség, akkor legyen $\bar{z} = W$, és $\mathbf{x}^* = (-1, \dots, -1)$.

Határozzuk meg a $g(\Omega)$ korlátot. Ha a $g(\Omega)$ korlát meghatározása során előáll egy $\bar{\mathbf{x}}$ lehetséges megoldás, akkor definiáljuk újra $\bar{z}$ -t és $\mathbf{x}^*$ -ot a következők szerint. Ha $z(\bar{\mathbf{x}}) \geq \bar{z}$, akkor $\bar{z}$ és $\mathbf{x}^*$ nem változnak, míg $z(\bar{\mathbf{x}}) < \bar{z}$ esetében $\bar{z}$ -nak adjuk a $z(\bar{\mathbf{x}})$ értéket és $\mathbf{x}^*$ -ot változtassuk $\bar{\mathbf{x}}$ -ra. Legyen $r = 0$ és

$$F_0 = \begin{cases} \{\Omega\}, & \text{ha } g(\Omega) < \bar{z}, \\ \emptyset & \text{különben.} \end{cases}$$

Ezt követően folytassuk az eljárást az iterációs eljárásrészszel.

Iterációs rész (r -edik iteráció)

- 1. lépés. Ha $F_r = \emptyset$, akkor vége az eljárásnak; $\mathbf{x}^*$ a feladat optimális megoldása, $\bar{z}$ az optimum értéke. Különben folytassuk a 2. lépéssel az eljárást.
- 2. lépés. Ha $F_r \neq \emptyset$, akkor valamilyen rögzített stratégia szerint válasszunk ki egy elemet F_r elemei közül, jelölje ezt Ω' . Alkalmazzuk a φ szétválasztási függvényt Ω' -re. Legyen

$$\varphi(\Omega') = \{\Omega_1^{(r)}, \dots, \Omega_{k_r}^{(r)}\}.$$

Határozzuk meg rendre az $\Omega_1^{(r)}, \dots, \Omega_{k_r}^{(r)}$ halmazokra a $g(\Omega_1^{(r)}), \dots, g(\Omega_{k_r}^{(r)})$ korlátokat. Jelölje X_r a korlátok meghatározása során előálló lehetséges megoldások halmazát, feltéve, hogy ilyen létezik. Legyen $z_r = \min\{z(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X_r\}$ és jelölje $\mathbf{x}^{(r)}$ az X_r halmaz egy olyan elemét, amelyre $z_r = z(\mathbf{x}^{(r)})$ teljesül. Definiáljuk újra $\bar{z}$ -t és $\mathbf{x}^*$ -ot a következők szerint. Ha $z_r \geq \bar{z}$, akkor $\bar{z}$ és $\mathbf{x}^*$ nem változik, míg $z_r < \bar{z}$ esetén $\bar{z}$ -nak adjuk a z_r értéket és $\mathbf{x}^*$ -ot változtassuk $\mathbf{x}^{(r)}$ -re. ($X_r = \emptyset$ esetén $\bar{z}$ és $\mathbf{x}^*$ nem változnak.). Ezek után legyen

$$F_{r+1} = \{\Omega_i : \Omega_i \in (F_r \setminus \{\Omega'\}) \cup \varphi(\Omega') \text{ \& } g(\Omega_i) < \bar{z}\}.$$

Növeljük r értékét 1-gyel és folytassuk az eljárást a következő iterációs lépéssel.

Az eljárás helyességének igazolása

Vegyük észre, hogy az eljárás során implicit módon fák egy olyan sorozatát állítjuk elő, hogy minden egyes fa leveleihez Ω egy osztályozása tartozik, és az osztályozásokat minden iterációs lépésben finomítjuk. Az F_r halmazok praktikussági okokból csak mindig az aktuális fa élő leveleihez tartozó halmazokat tartalmazzák. Ezek a halmazok legalább kételeműek, ugyanis $|\Omega'| = 1$ esetén $g(\Omega') = W$ vagy $g(\Omega') = z(\bar{x})$ teljesül valamely $\bar{x} \in L$ lehetséges megoldásra. Az első esetben az Ω' -höz tartozó levél lezárásra kerül, a második esetben pedig a g -re vonatkozó feltételezésünk szerint $\bar{x}$ rendelkezésünkre áll, de akkor $\bar{x} \in X_r$ és így F_{r+1} kialakításakor $g(\Omega') = z(\bar{x}) \geq \bar{z}$. Viszont így az Ω' -höz tartozó levél ismét lezárásra kerül.

A fenti észrevételeket felhasználva, az eljárás helyessége hasonlóan bizonyítható, mint a megelőző verzióé.

Vegyük még észre, hogy a φ szétválasztási és a g korlátozó függvényekre szükségtelenül erős az a kikötés, amely szerint φ tetszőleges $\Omega' \subseteq \Omega$ és $|\Omega'| > 1$ részhalmazra, g tetszőleges $\emptyset \neq \Omega' \subseteq \Omega$ részhalmazra értelmezve van. Ez sok esetben nagyon körülményes, vagy egyáltalán nem biztosítható. Lényegében elegendő, ha a φ szétválasztási függvény értelmezve van az eljárás során előálló $B\&B$ fák élő levelein. A g korlátozó függvényről pedig elegendő azt kikötni, hogy értelmezett az Ω halmazon és az eljárás során előálló $B\&B$ fák bármely Ω' élő levelére $\varphi(\Omega')$ elemein.

A φ és g függvényekre vonatkozó fenti kikötések is formalizálhatók. Mivel az általános eset formalizmusa eléggé bonyolult, ezért ettől eltekintünk. Az egyes modelleknél rendre megadjuk a konkrét φ és g függvényeket és tulajdonságaikat.

A következőkben a fenti eljárást fogjuk alkalmazni konkrét problémacsoportok megoldására. Egy konkrét alkalmazás esetén meg kell adni

- (a) az Ω halmazt,
- (b) a φ szétválasztási és a g korlátozó függvényt, és igazolni kell, hogy ezek rendelkeznek a kívánt tulajdonságokkal,
- (c) azt a stratégiát, amely alapján az aktuális $B\&B$ fa levelét kiválasztjuk további faépítés céljából.

A felsoroltak megadásával egy konkrét eljárást kapunk az illető problémacsoport megoldására, amelynek helyessége következik az általános eljárás helyességéből.

Az eljárással kapcsolatban megjegyezzük még, hogy nyilvánvaló módon maximum feladatok megoldására is alkalmas. Ez esetben W helyett mindenhol $-W$ szerepel, minimumok helyett maximumokkal kell dolgozni, és a

célfüggvényértékekre, valamint a korlátokra vonatkozó egyenlőtlenségekben " $\leq$ " helyett " $\geq$ " relációt, " $<$ " helyett " $>$ " relációt kell venni, végül a g korlátozó függvénynek az egyes halmazokhoz felső korlátokat kell rendelnie.

2. Utazó ügynök probléma

A modellhez számos gyakorlati probléma kapcsolható. Ezek közül a legismertebb a címben szereplő alábbi feladat.

Az utazó ügynök problémája

Adott n számú város és a városokat összekötő utak, amelyeknek ismert a hossza. Adott továbbá egy ügynök, akinek adott városból kiindulva, minden várost végig kell látogatnia úgy, hogy minden várost pontosan egyszer érint, és az út befejeztével visszatér a kiindulási városba. Határozzuk meg az ügynök legrövidebb útját.

Vezessük be a következő jelöléseket.

Jelölje $1, 2, \dots, n$ a városokat és c_{ij} az i -edik és j -edik városokat összekötő út hosszát. Ha a két várost nem köti össze út, akkor legyen $c_{ij} = W$, ahol W már az előzőekben is alkalmazott megfelelően nagy szám.

Legyen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha az ügynök az } i\text{-edik városból a } j\text{-edik városba megy,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Végül jelölje tetszőleges $Q \subseteq \{1, \dots, n\}$ halmazra $\bar{Q}$ az $\{1, \dots, n\} \setminus Q$ halmazt. Akkor a fenti feladat az alábbi, *utazó ügynök probléma* néven ismert optimumszámítási modellel írható le.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=1}^n x_{it} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\
 & \sum_{t=1}^n x_{tj} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\
 & \sum_{i \in Q} \sum_{j \in \bar{Q}} x_{ij} \geq 1 \quad (\emptyset \neq Q \subset \{1, \dots, n\}) \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = z \rightarrow \min$$

Az első feltételcsoport garantálja, hogy az ügynök minden városból távozik. A második feltételcsoport biztosítja, hogy az ügynök eljut minden városba. Sajnálatos módon a két feltételcsoport megengedi diszjunkt részkörutak kialakulását. Ezt küszöböli ki a harmadik feltételcsoport, amelyben előírjuk, hogy a városok tetszőleges $\emptyset \neq Q \subset \{1, \dots, n\}$ részhalmazára az ügynök valamely Q -beli városból egy nem Q -beli városba látogat. Ez valóban kizárja a részkörutat, ugyanis a részkörútban szereplő városok halmazát tekintve Q -nak, a harmadik feltételcsoport megfelelő feltétele nem teljesül.

Megjegyezzük, hogy az utazó ügynök problémája a korábbi fejezetek terminológiájával összhangban úgy interpretálható, hogy egy minimális hosszúságú, minden csúcspontot tartalmazó irányított körutat kell meghatározni egy adott hálózatban.

Az utazó ügynök problémáján kívül számos olyan gyakorlati feladat van, amely a (10.1) modellre vezethető vissza. A továbbiakban két ilyen gyakorlati alkalmazást ismertetünk.

Műszaki tervezés

Adott egy automata gépsor és abban egy szegecselő gép. A szegecselő gép karjának a szalagon jövő termék meghatározott pontjaiba szegeceket kell elhelyeznie. Határozzuk meg a szegecsek elhelyezésének azt a sorrendjét, amely esetén legkisebb a szegecselő gép karjának teljes mozgása.

Sorrendi ütemezés

Adott egy üzem, amely n féle különböző terméket gyárt. Az egyes termékféleségek gyártása időben elkülönül egymástól, és a termékváltásnál a gépeket át kell állítani. Ismeretes tetszőleges termékpárra a gépek átállításának a költsége. Határozzuk meg a termékek termelésének egy olyan sorrendjét, amely mellett a gépek átállításának teljes költsége minimális.

A (10.1) modellel kapcsolatban vegyük észre, hogy a harmadik feltételcsoportban a feltételek száma $2^n - 2$, ami már viszonylag kicsi n mellett is nagyon sok egyenlőtlenséget eredményez. A feltételek számának csökkentése a problémának több ekvivalens formalizálása is kidolgozásra került. A következő (10.2) változatot A. Tucker [?] dolgozta ki 1960-ban.

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^n x_{it} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\
(10.2) \quad & \sum_{t=1}^n x_{tj} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\
& u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \leq n-2 \quad (2 \leq i \neq j \leq n) \\
& x_{ii} = 0, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n) \\
& u_i \geq 0 \text{ \& \textit{egész}} \quad (i = 2, \dots, n)
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = z \rightarrow \min$$

Az ekvivalencia igazolásához egyrészt azt kell megmutatnunk, hogy diszjunkt részkörutak egyesítése nem elégíti ki a (10.2) feladat feltételrendszerét. Ezt indirekt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy a feladat valamely $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{u}})$ lehetséges megoldására

$$\bar{x}_{i_1 i_2} = \bar{x}_{i_2 i_3} = \dots \bar{x}_{i_k i_1} = 1$$

teljesül valamely $1 < k < n$ egészre. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $1 \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. Mivel $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{u}})$ lehetséges megoldás, ezért

$$\bar{u}_{i_1} - \bar{u}_{i_2} + (n-1)\bar{x}_{i_1 i_2} \leq n-2$$

$$\bar{u}_{i_2} - \bar{u}_{i_3} + (n-1)\bar{x}_{i_2 i_3} \leq n-2$$

$$\vdots$$

$$\bar{u}_{i_k} - \bar{u}_{i_1} + (n-1)\bar{x}_{i_k i_1} \leq n-2$$

teljesül. Összeadva rendre az egyenlőtlenségek bal- és jobboldalait, az alábbi egyenlőtlenségnek kell fennállnia

$$k(n-1) \leq k(n-2),$$

ami $1 < k < n$ esetén ellentmondás.

Másrészt igazolnunk kell, hogy bármely körúthoz létezik a (10.2) feladatnak egy olyan $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{u}})$ lehetséges megoldása, hogy az $\bar{\mathbf{X}}$ által meghatározott élek pontosan a tekintett körutat szolgáltatják. Ehhez tekintsünk egy tetszőleges, az $(1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_n, 1)$ éleket tartalmazó körutat. Definíáljuk $\bar{\mathbf{X}}$ -t és $\bar{\mathbf{u}}$ -t a következők szerint:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{1i_2} &= \bar{x}_{i_2i_3} = \dots \bar{x}_{i_n1} = 1, \\ \bar{x}_{ij} &= 0 \text{ a többi indexpárra,} \\ \bar{u}_{i_t} &= t \quad (t = 2, \dots, n) .\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{u}})$ kielégíti (10.2) feltételrendszerét. A feltételek teljesülése a harmadik feltételcsoporttól eltekintve nyilvánvaló. Legyen ezek után $2 \leq i \neq j \leq n$ tetszőleges indexpár. Az $\bar{\mathbf{u}}$ vektor definíciójából következik, hogy $\bar{u}_i - \bar{u}_j \leq n - 2$. Másrészt $\bar{x}_{ij} = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $i = i_r$ és $j = i_{r+1}$ valamely $2 \leq r \leq n$ indexre. De ebben az esetben

$$\bar{u}_i - \bar{u}_j + (n - 1)\bar{x}_{ij} = r - (r + 1) + (n - 1) \leq n - 2 ,$$

azaz a harmadik feltételcsoport feltételei rendre teljesülnek, így $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{u}})$ lehetséges megoldása (10.2)-nek.

A vizsgált modellel kapcsolatban fontos megjegyezni, hogy $\mathbf{C}$ -re vonatkozóan semmiféle kikötést nem tartalmaz. Ez a legáltalánosabb modellje az utazó ügynök problémának, és a jelen fejezetben ennek vizsgálatára szorítkozunk. A következő fejezetben speciális változatokkal is megismerkedünk. Például vizsgáljuk azt a modellt, amelyben $c_{ij} = c_{ji}$ ($1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n$) teljesül, azaz a költségmátrix szimmetrikus. A szimmetria bizonyos alkalmazásokban teljesül. A fentiekben megadott alkalmazásokban, az ügynök mozgásánál, a szegecslő gép karjának mozgásánál feltételezhető a szimmetria, míg a sorrendi ütemezésnél már nem feltétlenül érvényes. (Az utóbbi alkalmazásnál ez azt jelentené, hogy az i -edik termékről a j -edik termék gyártására történő átállás ugyanannyi költséggel jár, mint a j -edik termékről az i -edik termék gyártására történő átállás, ami általában nem igaz.)

Sajnos az utazó ügynök probléma különböző formalizálásai nem eredményeztek előrelépést a probléma megoldásában. 1976-ban bizonyítást nyert a [?] dolgozatban, hogy az általános utazó ügynök probléma az NP-teljes

feladatok osztályához tartozik, így $P \neq NP$ esetén nem létezik hatékony (az n polinomjával korlátozható időigényű) eljárás a feladat megoldására. Ezért különböző branch-and-bound eljárások kerültek kidolgozásra az optimális körút meghatározására, és számos heurisztikus algoritmust készítettek közelítő optimumértéket biztosító lehetséges megoldások meghatározására. Az ilyen megoldásokat szokásos *szuboptimális megoldásnak* is nevezni.

A továbbiakban mi is felépítünk egy Branch-and-Bound eljárást, majd ezt követően néhány heurisztikus eljárást ismertetünk a következő fejezetben. Mindezekhez szükségesek bizonyos előkészületek.

Vizsgáljuk ezek után a (10.1) feladatot. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az ügynök az 1-gyel jelzett városból indul. Ekkor $n - 1$ számú városba mehet, majd $n - 2$ -be, és így tovább. Ebből az következik, hogy a lehetséges megoldások száma $(n - 1)!$. Viszont így rögtön adódik, hogy a (10.1) feladatnak mindig létezik optimális megoldása. Ezzel kapcsolatban célszerű megjegyezni, hogy amennyiben az i -edik városból nem vezetett út a j -edik városba, akkor ezt a modellben egy W hosszúságú fiktív úttal helyettesítettük. Így, ha optimumértékként W adódik, akkor ez azt jelenti, hogy a városok közötti úthálózat olyan, amely nem teszi lehetővé a körbejárást, azaz a gyakorlati problémának nincs lehetséges megoldása.

Vegyük észre, hogy a (10.1) feladat feltételrendszere csak n -től függ. Így a $\mathbf{C}^{n \times n}$ költségmátrix egyértelműen meghatározza a feladatot. Ennek alapján a (10.1) feladatra a $TSP(\mathbf{C})$ jelöléssel fogunk hivatkozni. Itt az angol *Traveling Salesman Problem* név rövidítését használjuk, mely a témakör irodalmában igen széles körben elterjedt.

A továbbiakban az egyszerűbb tárgyalás érdekében az $\bar{\mathbf{X}}$ mátrixot *körútnak* nevezzük, ha minden $\bar{x}_{ij} = 1$ -re véve az (i, j) éleket, az így képezett élek az n -szögpontú teljes gráfban irányított kört alkotnak.

Most ismételten használjuk a 3.2. fejezetben bevezetett mátrixok ekvivalenciáját.

A tekintett reláció és a TSP kapcsolatát adja meg a következő állítás.

10.1. segédteétel. *Ha $\mathbf{C}^{n \times n} \sim \mathbf{D}^{n \times n}$, akkor a $TSP(\mathbf{C})$ és $TSP(\mathbf{D})$ feladatok optimális megoldásai megegyeznek.*

Bizonyítás. Mivel mindkét feladatnak létezik optimális megoldása, ezért az állítás korrekt. Másrészt a tekintett két feladat feltételrendszere azonos, ezért a lehetséges megoldások halmaza közös, amelyet jelöljön L . Továbbá

jelölje a $TSP(\mathbf{C})$ és $TSP(\mathbf{D})$ feladatok célfüggvényét rendre $z_{\mathbf{C}}$ és $z_{\mathbf{D}}$. Megmutatjuk, hogy van olyan γ konstans, amelyre $z_{\mathbf{C}}(\bar{\mathbf{X}}) = z_{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{X}}) + \gamma$ teljesül tetszőleges $\bar{\mathbf{X}}$ lehetséges megoldásra. Valóban, mivel $\mathbf{C} \sim \mathbf{D}$, ezért vannak olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n$ konstansok, hogy $c_{ij} = d_{ij} + \alpha_i + \beta_j$ teljesül bármely $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ indexpárra. De akkor

$$\begin{aligned} z_{\mathbf{C}}(\bar{\mathbf{X}}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij} + \alpha_i + \beta_j) \bar{x}_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \bar{x}_{ij} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} + \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^n \bar{x}_{ij}. \end{aligned}$$

Mivel $\bar{\mathbf{X}}$ lehetséges megoldás, ezért $\sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = 1$ és $\sum_{i=1}^n \bar{x}_{ij} = 1$. De akkor

$$z_{\mathbf{C}}(\bar{\mathbf{X}}) = z_{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{X}}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j.$$

Most legyen $\gamma = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j$. Akkor a $z_{\mathbf{C}}(\bar{\mathbf{X}}) = z_{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{X}}) + \gamma$ egyenlethez jutunk, amely teljesül bármely $\bar{\mathbf{X}}$ lehetséges megoldásra. Ez pontosan azt jelenti, hogy a lehetséges megoldások halmazán a két célfüggvény csak egy additív konstansban tér el egymástól, amiből nyilvánvalóan következik az állítás.

10.1. következmény. *Az optimális megoldás meghatározását illetően elegendő olyan $TSP(\mathbf{C})$ feladatok vizsgálatára szorítkoznunk, amelyekre $\mathbf{C} \geq 0$ teljesül.*

A fenti következmény alapján a továbbiakban minden hivatkozás nélkül feltételezzük, hogy a vizsgált feladatok célfüggvényegyütthatói rendre nem-negatívak.

A (10.1) feladattal kapcsolatosan azt is észrevehetjük, hogy amennyiben a harmadik feltételcsoporttól eltekintünk, úgy a 3.2. fejezetben megismert hozzárendelési feladathoz jutunk. Ebből viszont következik, hogy (10.1) tetszőleges $\bar{\mathbf{X}}$ lehetséges megoldása egyben lehetséges megoldása a $\mathbf{C}$ költség-mátrixú $A(\mathbf{C})$ hozzárendelési feladatnak is. Jelölje (10.1) lehetséges megoldásainak halmazát L , $A(\mathbf{C})$ lehetséges megoldásainak halmazát S . Akkor $L \subseteq S$, és így

$$\min\{z(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in S\} \leq \min\{z(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in L\}.$$

A kapott egyenlőtlenségből nyilvánvalóan adódnak a következők:

- (i) ha $\bar{\mathbf{X}}$ optimális megoldása $A(\mathbf{C})$ -nek és $\bar{\mathbf{X}}$ körút, akkor $\bar{\mathbf{X}}$ egyben optimális megoldása $TSP(\mathbf{C})$ -nek is,
- (ii) ha $\bar{\mathbf{X}}$ optimális megoldása $A(\mathbf{C})$ -nek, akkor $z(\bar{\mathbf{X}})$ alsó korlátja a $TSP(\mathbf{C})$ feladat optimumértékének.

A továbbiakban olyan speciális hozzárendelési feladatok használunk, melyekre kikötjük, hogy bizonyos változóknak 0 értéket, a változók egy másik csoportjának 1 értéket kell felvennie. Ismét I és J jelöli azon változók indexeinek a halmazát, amelyekről kikötjük, hogy értékük 1 illetve 0. Ezen speciális hozzárendelési feladatok jelölésére az $(A(\mathbf{C}), I, J)$ jelölést fogjuk használni.

A $TSP(\mathbf{C})$ és $A(\mathbf{C})$ feladatok kapcsolatának demonstrálására tekintsük a következő feladatokat.

10.1. példa

Vizsgáljuk az alábbi költségmátrixú 6 városos $TSP(\mathbf{C})$ feladatot, ahol az $i \rightarrow i$ típusú utak kizárására a c_{ii} együtthatókat rendre W -nek választottuk. (W -ként például használhatjuk az $1 + n \cdot \max\{c_{ij} : 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n, i \neq j\}$ értéket is.)

	1	2	3	4	5	6
1	W	6	11	6	16	19
2	5	W	16	13	21	9
3	8	12	W	22	18	11
4	20	18	27	W	22	15
5	10	22	11	25	W	18
6	16	10	17	30	10	W

Oldjuk meg a megfelelő $A(\mathbf{C})$ hozzárendelési feladatot a 3.2. fejezetben megismert magyar módszerrel.

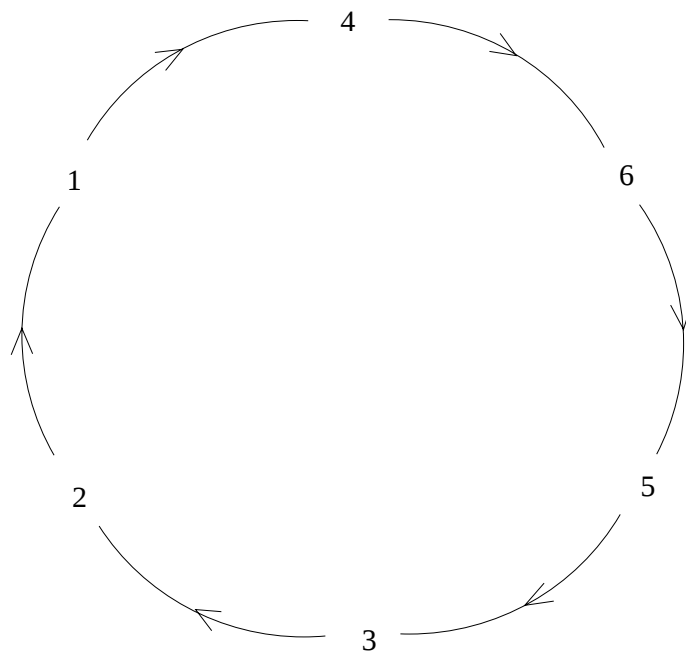
A magyar módszer által szolgáltatott utolsó mátrix a következő:

W	0	8	0^*	10	16
0^*	W	10	4	12	3
0	0^*	W	10	6	2
6	0	12	W	4	0^*
0	8	0^*	11	W	7
10	0	10	20	0^*	W

Így az $A(\mathbf{C})$ hozzárendelési feladat optimális megoldása az alábbi módon definiált $\bar{\mathbf{X}}$ mátrix:

$\bar{x}_{14} = 1$, $\bar{x}_{21} = 1$, $\bar{x}_{32} = 1$, $\bar{x}_{46} = 1$, $\bar{x}_{53} = 1$, $\bar{x}_{65} = 1$ és $\bar{x}_{ij} = 0$ a többi indexpárra.

A megfelelő élek az alábbi körutat eredményezik:



10.1. ábra. A 10.1. példa optimális megoldása.

Következésképp, $\bar{\mathbf{X}}$ a $TSP(\mathbf{C})$ feladatnak is optimális megoldása. Az optimum értéke:

$$z(\bar{\mathbf{X}}) = c_{14} + c_{21} + c_{32} + c_{46} + c_{53} + c_{65} = 59 .$$

Sajnos a megfelelő hozzárendelési feladat optimális megoldása nem minden esetben eredményez körutat. Ez a helyzet az alábbi E. Balastól származó, a [?] munkában demonstrációs célokra használt feladat esetén is.

10.2. példa

Tekintsük a következő költségmátrixú 8 városos *TSP* feladatot.

$$\begin{pmatrix} W & 2 & 11 & 10 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 6 & W & 1 & 8 & 8 & 4 & 6 & 7 \\ 5 & 12 & W & 11 & 8 & 12 & 3 & 11 \\ 11 & 9 & 10 & W & 1 & 9 & 8 & 10 \\ 11 & 11 & 9 & 4 & W & 2 & 10 & 9 \\ 12 & 8 & 5 & 2 & 11 & W & 11 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 10 & 9 & 12 & W & 3 \\ 7 & 10 & 10 & 10 & 6 & 3 & 1 & W \end{pmatrix}$$

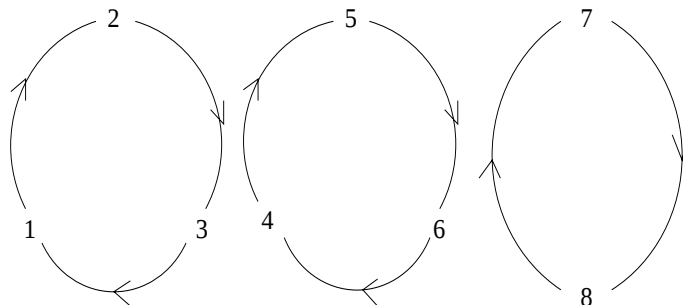
Rendre kivonva a 2, 1, 3, 1, 2, 2, 3, 1 sorminimumokat, majd az előálló $\bar{\mathbf{C}}$ mátrix első oszlopára a 2 oszlopminimumot, a kapott $\mathbf{C}^{(0)}$ mátrixban oszlopfolytonosan kijelölve a független 0-rendszert, a következő mátrixhoz jutunk:

$$\begin{pmatrix} W & 0^* & 9 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & W & 0^* & 7 & 7 & 3 & 5 & 6 \\ 0^* & 9 & W & 8 & 5 & 9 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 9 & W & 0^* & 8 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 7 & 2 & W & 0^* & 8 & 7 \\ 8 & 6 & 3 & 0^* & 9 & W & 9 & 7 \\ 5 & 8 & 9 & 7 & 6 & 9 & W & 0^* \\ 4 & 9 & 9 & 9 & 5 & 2 & 0^* & W \end{pmatrix}$$

A kapott független 0-rendszer n -elemű, és így a hozzárendelési feladatra a következő optimális megoldást kapjuk: $\bar{x}_{12} = \bar{x}_{23} = \bar{x}_{31} = \bar{x}_{45} = \bar{x}_{56} = \bar{x}_{64} = \bar{x}_{78} = \bar{x}_{87} = 1$ és $\bar{x}_{ij} = 0$ a többi indexpárra.

$$z(\bar{\mathbf{X}}) = c_{12} + c_{23} + c_{31} + c_{45} + c_{56} + c_{64} + c_{78} + c_{87} = 17$$

A megfelelő élek a 10.2. ábrán megadott részkörutakat eredményezik.



10.2. ábra. A hozzárendelési feladat megoldásával adódó részkörutak.

Annak ellenére, hogy a hozzárendelési feladat optimális megoldása nem eredményezett körutat, bizonyos információkat nyerhetünk $A(\mathbf{C})$ optimumából. Nevezetesen, (ii) alapján $z(\bar{\mathbf{X}}) = 17$ alsó korlátja az optimumértéknek.

Ezen korlát élességét illetően igen érdekes E. Balas és P. Toth [?] számítógépes kísérlete. Az említett kutatók 400 problémát generáltak a vizsgálathoz. Minden feladatnál egyenletes eloszlás mellett véletlenszerűen választottak feladatméretet az $50 \leq n \leq 250$ tartományból, valamint célfüggvényegyütthatókat az 1 és 100 vagy az 1 és 1000 közé eső egészekből. Az ilyen módon előállított feladatokra rendre meghatározták az optimális körút költségét és a megfelelő hozzárendelési feladat optimumát. A kapott értékekre képezve az átlagokat, azt kapták, hogy a hozzárendelési feladatok optimumainak az átlaga 99.2%-a az utazó ügynök problémák optimumai átlagának. A vizsgálati adatok egy olyan tendenciát is mutattak, hogy n növelésével egyre élesebbé válik a korlát.

A következőkben egy $B\&B$ eljárást építünk fel az utazó ügynök probléma megoldására, amelyben a korlátozó függvény definiálására a fentiekben vázolt, az $A(\mathbf{C})$ és $TSP(\mathbf{C})$ feladatok közti kapcsolatot fogjuk kihasználni. Az eljárás felépítését a 7. fejezetnek megfelelően végezzük. Feltételezzük, hogy a $\mathbf{C}$ mátrixban $c_{ii} = W$, $(i = 1, \dots, n)$ teljesül.

I. Az Ω halmaz megadása

Legyen Ω a $\{0, 1\}$ feletti $n \times n$ mátrixok halmaza. Nyilvánvaló, hogy $L \subseteq \Omega$, továbbá $|\Omega| = 2^{n^2}$, így Ω rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal.

II. A φ szétválasztási és a g korlátozó függvények megadása

Elsőként a függvényeket az Ω halmazon definiáljuk. Legyen $g(\Omega)$ az

$A(\mathbf{C})$ hozzárendelési feladat optimumértéke. A $\varphi(\Omega)$ definiálásához pedig különböztessük meg az alábbi két esetet.

(a) Ha $A(\mathbf{C})$ optimális megoldása körút, akkor ez optimális megoldása a $TSP(\mathbf{C})$ feladatnak is. Így $\bar{z}$ felveszi az optimumértéket és Ω nem lesz élő levél, azaz $\Omega \notin F_0$. De akkor nem kell a φ függvényt az Ω halmazon definiálni.

(b) Ha az $A(\mathbf{C})$ feladat $\bar{\mathbf{X}}$ optimális megoldása nem körút, akkor $\bar{\mathbf{X}}$ diszjunkt részkörökből áll. Legyen ezek közül az $(i_1, i_2), \dots, (i_{k-1}, i_k), (i_k, i_1)$ éleket tartalmazó részkörút minimális elemszámú, és tekintsük a következő halmazokat:

$$\begin{aligned}\Omega^{(0)} &= \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega \ \& \ x_{i_1 i_2} = \dots = x_{i_k i_1} = 1\}, \\ \Omega^{(1)} &= \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega \ \& \ x_{i_1 i_2} = 0\}, \\ \Omega^{(2)} &= \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega \ \& \ x_{i_2 i_3} = 0 \ \& \ x_{i_1 i_2} = 1\}, \\ &\vdots \\ \Omega^{(k)} &= \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega \ \& \ x_{i_k i_1} = 0 \ \& \ x_{i_1 i_2} = \dots = x_{i_{k-1} i_k} = 1\}.\end{aligned}$$

Egyszerűen beláthatók a következők:

- (1) az $\Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(k)}$ halmazok a felbontandó halmaznak (jelenleg Ω) egy valódi osztályozását alkotják,
- (2) bármely $1 \leq i \leq k$ indexre az $\Omega^{(i)}$ definíciójában 1 értékkel szereplő változóknak megfelelő élekből álló gráf nem tartalmaz részkörutat,
- (3) $\Omega^{(0)} \cap L = \emptyset$.

Definiáljuk $\varphi(\Omega)$ -t a következők szerint. Legyen

$$\varphi(\Omega) = \{\Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(k)}\}.$$

A φ függvény definícióját úgy fogjuk kiterjeszteni, hogy az (1),(2),(3) tulajdonságok érvényben maradjanak. A továbbiakban az osztályozások osztályainak leírására azt a technikát fogjuk használni, hogy az I, J halmazokban megadjuk azon változók indexeit, amelyek értéke rögzített. Például $\Omega^{(2)} = \Omega_{I,J}$, ahol $I = \{(i_1, i_2)\}$, $J = \{(i_2, i_3)\}$. A rögzített értékű változókat *kötött változóknak*, a többi változót pedig *szabad változóknak* fogjuk nevezni $\Omega_{I,J}$ -re vonatkozóan. Végül speciálisan azokat az osztályokat, amelyekről tudjuk, hogy nem tartalmaznak körutat (Ω felbontásánál $\Omega^{(0)}$), lássuk el *-gal.

Ezek után kiterjesztjük a φ és g függvények értelmezését.

A g korlátozó függvény definiálásához tekintsük a $B\&B$ -fában valamely élő levél leszármazottját. Ha a tekintett osztály *-gal lett ellátva, akkor g

rendelje ehhez a részhalmazhoz a W korlátot. Ellenkező esetben jelölje a tekintett osztályt $\Omega_{I,J}$. Ekkor az $(A(\mathbf{C}), I, J)$ hozzárendelési feladat bármely lehetséges megoldása eleme $\Omega_{I,J}$ -nek, továbbá bármely olyan körút, amelyben az I -ben szereplő indexekre a változók értéke 1, valamint a J -ben szereplő indexekre a változók értéke 0, lehetséges megoldása $(A(\mathbf{C}), I, J)$ -nek. Viszont így az $(A(\mathbf{C}), I, J)$ feladat $\tilde{z}$ optimumértékére

$$\tilde{z} \leq \min\{z(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in L \cap \Omega_{I,J}\}$$

teljesül, amennyiben $L \cap \Omega_{I,J} \neq \emptyset$. Ennek alapján definiáljuk $g(\Omega_{I,J})$ -t a következők szerint:

$$g(\Omega_{I,J}) = \begin{cases} (A(\mathbf{C}), I, J) \text{ optimuma,} & \text{ha } |\Omega_{I,J}| > 1, \\ z(\bar{\mathbf{X}}), & \text{ha } \Omega_{I,J} = \{\bar{\mathbf{X}}\} \text{ és } \bar{\mathbf{X}} \text{ körút,} \\ W & \text{különben.} \end{cases}$$

A φ függvény definíciójának kiterjesztéséhez tekintsük a $B\&B$ -fa egy élő $\Omega_{I,J}$ levelét. Mivel $\Omega_{I,J}$ élő levél, ezért $|I| + |J| < n^2 - n$, $(A(\mathbf{C}), I, J)$ optimuma kisebb, mint W , továbbá $(A(\mathbf{C}), I, J)$ optimális megoldása nem körút. (Ellenkező esetben a levél lezárásra kerülne.) De akkor $(A(\mathbf{C}), I, J)$ optimális megoldása diszjunkt részkörutak uniója. Válasszunk ezen részkörutak közül egy minimális elemszámút. Jelölje K a választott részkörúthoz tartozó változók indexeinek a halmazát. Akkor K nemüres halmaz, $K \cap J = \emptyset$, és a (2) tulajdonság miatt $K \not\subseteq I$. Legyen $K \setminus I = \{(i_1, j_1), \dots, (i_r, j_r)\}$. Mivel $(K \setminus I) \cap J = \emptyset$ és $(K \setminus I) \cap I = \emptyset$, ezért bármely $x_{i_s j_s}$ ($1 \leq s \leq r$) változó szabad változó lesz $\Omega_{I,J}$ -re vonatkozóan. Képezzük ezek után a következő halmazokat:

$$\begin{aligned} \Omega_{I_0, J_0} &= \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega_{I,J} \ \& \ x_{i_1 j_1} = \dots = x_{i_r j_r} = 1\}, \\ \Omega_{I_1, J_1} &= \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega_{I,J} \ \& \ x_{i_1 j_1} = 0\}, \\ \Omega_{I_2, J_2} &= \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega_{I,J} \ \& \ x_{i_2 j_2} = 0 \ \& \ x_{i_1 j_1} = 1\}, \\ &\vdots \\ \Omega_{I_r, J_r} &= \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega_{I,J} \ \& \ x_{i_r j_r} = 0 \ \& \ x_{i_1 j_1} = \dots = x_{i_r j_r} = 1\}. \end{aligned}$$

Mivel $x_{i_t j_t}$ ($1 \leq t \leq r$) szabad változók $\Omega_{I,J}$ -re vonatkozóan, ezért a fenti halmazok az $\Omega_{I,J}$ halmaznak egy valódi osztályozását alkotják. Nyilvánvaló, hogy $\Omega_{I_0, J_0} \cap L = \emptyset$, ugyanis Ω_{I_0, J_0} minden eleme tartalmazza a kiválasztott minimális elemszámú részkörutat, mint részgráfot. Most legyen $0 \leq t \leq r$ tetszőleges egész. Jelölje $\mathcal{G}_t = (N, E_t)$ azt a gráfot, amelyre $(i, j) \in E_t$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(i, j) \in I_t$, ahol $N = \{1, \dots, n\}$.

Ekkor $\mathcal{G}_0$ tartalmazza a kiválasztott minimális elemszámú részkörutat és más részkörutat nem tartalmaz. Másrészt bármely $1 \leq t \leq r$ indexre $\mathcal{G}_t$ előállítható $\mathcal{G}_0$ -ból úgy, hogy $\mathcal{G}_0$ egyetlen részkörútjából elhagyunk egy vagy több élet. De akkor $\mathcal{G}_t$ nem tartalmaz részkörutat. Ez pontosan azt jelenti, hogy az Ω_{I_t, J_t} -ben 1 értékkel rögzített változóknak megfelelő élek nem alkotnak részkörutat bármely $1 \leq t \leq r$ indexre. Következésképp, a definiált halmazok rendelkeznek az (1),(2),(3) tulajdonságokkal. Legyen ezek után

$$\varphi(\Omega_{I, J}) = \{\Omega_{I_0, J_0}, \Omega_{I_1, J_1}, \dots, \Omega_{I_r, J_r}\}.$$

A φ és g függvények definíciójából következik, hogy rendelkeznek a kívánt tulajdonságokkal.

III. Faépítési stratégia

Azt a korábban már megismert stratégiát fogjuk alkalmazni, miszerint egy minimális korláttal rendelkező levelet választunk a faépítés során.

A $B\&B$ eljárás demonstrálására tekintsük az előzőekben vizsgált feladatot. Készítsünk egy lehetséges megoldást az $x_{12}^{(0)} = 1, x_{23}^{(0)} = 1, \dots, x_{n1}^{(0)} = 1$ értékadásokkal. A megoldáshoz tartozó célfüggvényérték 38. Így tudunk kezdeti értéket adni $\mathbf{X}^*$ -nak és $\bar{z}$ -nak.

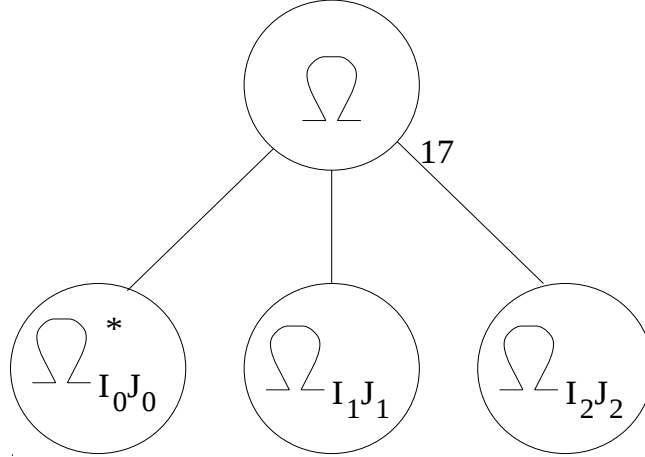
A $g(\Omega)$ korlát meghatározásához a megfelelő hozzárendelési feladatot kell megoldanunk. Ezt már megtettük. Azt kaptuk, hogy az optimális megoldás három részkörút uniója, melyek az $(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 5), (5, 6), (6, 4), (7, 8), (8, 7)$ éleket tartalmazzák, és az optimum értéke 17. Így $F_0 = \{\Omega\}$ és $g(\Omega) = 17$. Alkalmazzuk Ω -ra a φ szétválasztási függvényt:

$$\Omega_{I_0, J_0} = \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega \ \& \ x_{78} = x_{87} = 1\},$$

$$\Omega_{I_1, J_1} = \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega \ \& \ x_{78} = 0\},$$

$$\Omega_{I_2, J_2} = \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega \ \& \ x_{87} = 0 \ \& \ x_{78} = 1\}.$$

Mivel a $(7, 8), (8, 7)$ élekből álló részkörutat Ω_{I_0, J_0} minden eleme tartalmazza, ezért $\Omega_{I_0, J_0} \cap L = \emptyset$. Lássuk el az Ω_{I_0, J_0} halmazt $*$ -gal. Ábrázolva az eddig létrejött $B\&B$ -fát, a következő fát kapjuk.



10.3. ábra. Az eddig meghatározott B&B fa.

Ezek után a korlátok meghatározásával folytatódik az algoritmus. Definíció szerint $g(\Omega_{I_0, J_0}) = W$. A $g(\Omega_{I_1, J_1})$ korlát meghatározásához az $(A(\mathbf{C}), I_1, J_1)$ hozzárendelési feladatot kell megoldanunk. Mivel $\mathbf{C} \sim \mathbf{C}^{(0)}$, ezért szorítkozhatunk az $(A(\mathbf{C}^{(0)}), I_1, J_1)$ feladat megoldására. Ez azért praktikus, mert $\mathbf{C}^{(0)}$ -ban ki van jelölve egy n -elemű független 0-rendszer, amelyből $n - 1$ darab független 0-t fel tudunk használni $(A(\mathbf{C}^{(0)}), I_1, J_1)$ megoldása során, mint induló független 0-rendszert. Ennek következtében a magyar módszer egyetlen láncképzéssel véget ér. Mivel $I_1 = \emptyset$ és $J_1 = \{(7, 8)\}$, ezért $\mathbf{C}^{(0)}$ -ban a $c_{78}^{(0)}$ együttthatót kell csak W -re változtatnunk. Az előálló új költségmátrix a megőrzött független 0 elemekkel, valamint a magyar módszer befejeztével kapott mátrix a következő:

$$\begin{pmatrix} W & 0^* & 9 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & W & 0^* & 7 & 7 & 3 & 5 & 6 \\ 0^* & 9 & W & 8 & 5 & 9 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 9 & W & 0^* & 8 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 7 & 2 & W & 0^* & 8 & 7 \\ 8 & 6 & 3 & 0^* & 9 & W & 9 & 7 \\ 5 & 8 & 9 & 7 & 6 & 9 & W & W \\ 4 & 9 & 9 & 9 & 5 & 2 & 0^* & W \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} W & 0 & 12 & 11 & 9 & 8 & 7 & 0^* \\ 3 & W & 0^* & 7 & 7 & 3 & 5 & 0 \\ 0^* & 6 & W & 8 & 5 & 9 & 0 & 2 \\ 8 & 5 & 9 & W & 0^* & 8 & 7 & 3 \\ 7 & 6 & 7 & 2 & W & 0^* & 8 & 1 \\ 8 & 3 & 3 & 0^* & 9 & W & 9 & 1 \\ 0 & 0^* & 4 & 2 & 1 & 4 & W & W \\ 4 & 6 & 9 & 9 & 5 & 2 & 0^* & W \end{pmatrix}$$

A tekintett $(A(\mathbf{C}^{(0)}), I_1, J_1)$ hozzárendelési feladat optimális megoldása: $x_{18}^{(1)} = x_{23}^{(1)} = x_{31}^{(1)} = x_{45}^{(1)} = x_{56}^{(1)} = x_{64}^{(1)} = x_{72}^{(1)} = x_{87}^{(1)} = 1$ és $x_{ij}^{(1)} = 0$ a többi indexekre.

Az optimum értéke $z(\mathbf{X}^{(1)}) = 28$, így $g(\Omega_{I_1, J_1}) = 28$. Az optimális megoldás nem körút, hanem az $(1, 8), (8, 7), (7, 2), (2, 3), (3, 1)$ és a $(4, 5), (5, 6), (6, 4)$ éleket tartalmazó részkörutak uniója.

A $g(\Omega_{I_2, J_2})$ korlát meghatározásához az $(A(\mathbf{C}^{(0)}), I_2, J_2)$ feladatot fogjuk megoldani. Mivel $I_2 = \{(7, 8)\}$ és $J_2 = \{(8, 7)\}$, ezért $c_{87}^{(0)}$ és $c_{7t}^{(0)}$ ($t = 1, \dots, 7$), $c_{s8}^{(0)}$ ($s = 1, \dots, 8; s \neq 7$) együtthatókat W -re változtatjuk. Az előálló feladat költségmátrixa a megőrzött független 0-rendszerrel, valamint a magyar módszer végén kapott mátrix a következő:

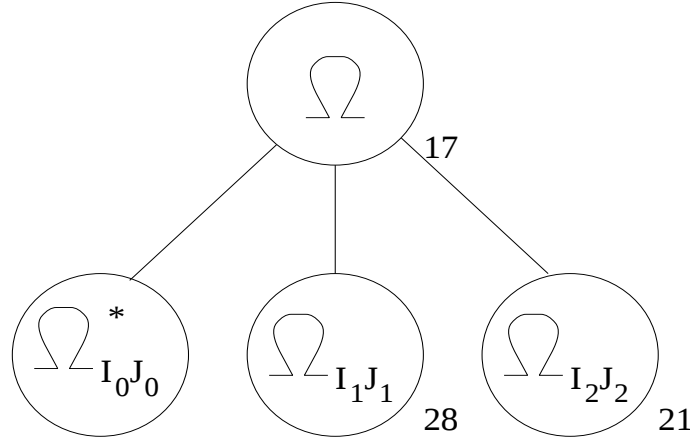
$$\begin{pmatrix} W & 0^* & 9 & 8 & 6 & 5 & 4 & W \\ 3 & W & 0^* & 7 & 7 & 3 & 5 & W \\ 0^* & 9 & W & 8 & 5 & 9 & 0 & W \\ 8 & 8 & 9 & W & 0^* & 8 & 7 & W \\ 7 & 9 & 7 & 2 & W & 0^* & 8 & W \\ 8 & 6 & 3 & 0^* & 9 & W & 9 & W \\ W & W & W & W & W & W & W & 0^* \\ 4 & 9 & 9 & 9 & 5 & 2 & W & W \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} W & 0^* & 9 & 8 & 6 & 5 & 2 & W \\ 1 & W & 0^* & 7 & 7 & 3 & 3 & W \\ 0 & 11 & W & 10 & 7 & 11 & 0^* & W \\ 6 & 8 & 9 & W & 0^* & 8 & 5 & W \\ 5 & 9 & 7 & 2 & W & 0^* & 6 & W \\ 6 & 6 & 3 & 0^* & 9 & W & 7 & W \\ W & W & W & W & W & W & W & 0^* \\ 0^* & 7 & 7 & 7 & 3 & 0 & W & W \end{pmatrix}$$

A tekintett $(A(\mathbf{C}^{(0)}), I_2, J_2)$ feladat optimális megoldása:

$x_{12}^{(2)} = x_{23}^{(2)} = x_{37}^{(2)} = x_{45}^{(2)} = x_{56}^{(2)} = x_{64}^{(2)} = x_{78}^{(2)} = x_{81}^{(2)} = 1$ és $x_{ij}^{(2)} = 0$ a többi változóra.

Az optimum értéke $z(\mathbf{X}^{(2)}) = 21$, így $g(\Omega_{I_2, J_2}) = 21$. Az optimális megoldás nem körút, hanem az $(1, 2), (2, 3), (3, 7), (7, 8), (8, 1)$, valamint a $(4, 5), (5, 6), (6, 4)$ élekből álló részkörutak uniója.

Az iterációs lépés végén előálló B&B fa a következő:



10.4. ábra. Az iterációs lépés végén kapott B&B fa.

Az élő leveleket tartalmazó halmaz: $F_1 = \{\Omega_{I_1, J_1}, \Omega_{I_2, J_2}\}$. A két osztály közül Ω_{I_2, J_2} -höz tartozik minimális korlát. $(A(\mathbf{C}^{(0)}), I_2, J_2)$ optimális megoldása nem körút, hanem két részkörútból áll. Ezek közül a $(4, 5), (5, 6), (6, 4)$

éleket tartalmazó részkörút a minimális elemszámú. Alkalmazva Ω_{I_2, J_2} -re a φ szétválasztási függvényt, az alábbi osztályokhoz jutunk:

$$\begin{aligned}\Omega_{I_3, J_3} &= \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega_{I_2, J_2} \ \& \ x_{45} = x_{56} = x_{64} = 1\}, \\ \Omega_{I_4, J_4} &= \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega_{I_2, J_2} \ \& \ x_{45} = 0\}, \\ \Omega_{I_5, J_5} &= \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega_{I_2, J_2} \ \& \ x_{56} = 0 \ \& \ x_{45} = 1\}, \\ \Omega_{I_6, J_6} &= \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \in \Omega_{I_2, J_2} \ \& \ x_{64} = 0 \ \& \ x_{45} = x_{56} = 1\}.\end{aligned}$$

Mivel $\Omega_{I_3, J_3} \cap L = \emptyset$, ezért $g(\Omega_{I_3, J_3}) = W$. A $g(\Omega_{I_4, J_4})$ korlát meghatározásához tekintsük az $(A(\mathbf{C}^{(0)}), I_4, J_4)$ hozzárendelési feladatot. Most $I_4 = \{(7, 8)\}$ és $J_4 = \{(8, 7), (4, 5)\}$. Képezve $\mathbf{C}^{(0)}$ -ből a tekintett feladatnak megfelelő költségmátrixot, majd végrehajtva a magyar módszert, az induló és befejező mátrixok a következők lesznek.

$$\begin{pmatrix} W & 0^* & 9 & 8 & 6 & 5 & 4 & W \\ 3 & W & 0^* & 7 & 7 & 3 & 5 & W \\ 0^* & 9 & W & 8 & 5 & 9 & 0 & W \\ 8 & 8 & 9 & W & W & 8 & 7 & W \\ 7 & 9 & 7 & 2 & W & 0^* & 8 & W \\ 8 & 6 & 3 & 0^* & 9 & W & 9 & W \\ W & W & W & W & W & W & W & 0^* \\ 4 & 9 & 9 & 9 & 5 & 2 & W & W \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} W & 0^* & 9 & 8 & 3 & 5 & 4 & W \\ 3 & W & 0^* & 7 & 4 & 3 & 5 & W \\ 0^* & 9 & W & 8 & 2 & 9 & 0 & W \\ 1 & 1 & 2 & W & W & 1 & 0^* & W \\ 7 & 9 & 7 & 2 & W & 0^* & 8 & W \\ 8 & 6 & 3 & 0^* & 6 & W & 9 & W \\ W & W & W & W & W & W & W & 0^* \\ 2 & 7 & 7 & 7 & 0^* & 0 & W & W \end{pmatrix}$$

Az optimális megoldás: $x_{12}^{(4)} = x_{23}^{(4)} = x_{31}^{(4)} = x_{47}^{(4)} = x_{56}^{(4)} = x_{64}^{(4)} = x_{78}^{(4)} = x_{85}^{(4)} = 1$ és $x_{ij}^{(4)} = 0$ a többi indexekre. Az optimális megoldás nem körút. Az optimum értéke $z(\mathbf{X}^{(4)}) = 29$.

$g(\Omega_{I_5, J_5})$ meghatározásához tekintsük az $(A(\mathbf{C}^{(0)}), I_5, J_5)$ hozzárendelési feladatot. Ekkor $I_5 = \{(7, 8), (4, 5)\}$, $J_5 = \{(8, 7), (5, 6)\}$, és a fentieknek megfelelő mátrixok a következők:

$$\begin{pmatrix} W & 0^* & 9 & 8 & W & 5 & 4 & W \\ 3 & W & 0^* & 7 & W & 3 & 5 & W \\ 0^* & 9 & W & 8 & W & 9 & 0 & W \\ W & W & W & W & 0^* & W & W & W \\ 7 & 9 & 7 & 2 & W & W & 8 & W \\ 8 & 6 & 3 & 0^* & W & W & 9 & W \\ W & W & W & W & W & W & W & 0^* \\ 4 & 9 & 9 & 9 & W & 2 & W & W \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} W & 0^* & 8 & 9 & W & 3 & 0 & W \\ 0 & W & 0^* & 9 & W & 2 & 2 & W \\ 0 & 13 & W & 13 & W & 11 & 0^* & W \\ W & W & W & W & 0^* & W & W & W \\ 0^* & 6 & 3 & 0 & W & W & 1 & W \\ 3 & 5 & 1 & 0^* & W & W & 4 & W \\ W & W & W & W & W & W & W & 0^* \\ 0 & 9 & 8 & 10 & W & 0^* & W & W \end{pmatrix}$$

Az optimális megoldás: $x_{12}^{(5)} = x_{23}^{(5)} = x_{37}^{(5)} = x_{45}^{(5)} = x_{51}^{(5)} = x_{64}^{(5)} = x_{78}^{(5)} = x_{86}^{(5)} = 1$ és $x_{ij}^{(5)} = 0$ a többi indexekre. Ez a megoldás körút. Az optimum értéke $z(\mathbf{X}^{(5)}) = 26$.

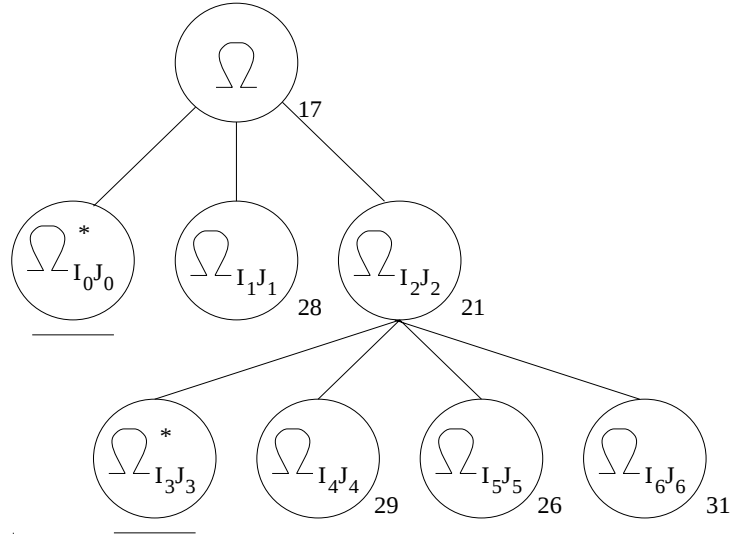
Végül határozzuk meg a $g(\Omega_{I_6, J_6})$ korlátot. Most $I_6 = \{(7, 8), (4, 5), (5, 6)\}$ és $J_6 = \{(8, 7), (6, 4)\}$. Akkor az előzőeknek megfelelően az induló és befejező mátrixok a következők:

$$\begin{pmatrix} W & 0^* & 9 & 8 & W & W & 4 & W \\ 3 & W & 0^* & 7 & W & W & 5 & W \\ 0^* & 9 & W & 8 & W & W & 0 & W \\ W & W & W & W & 0^* & W & W & W \\ W & W & W & W & W & 0^* & W & W \\ 8 & 6 & 3 & W & W & W & 9 & W \\ W & W & W & W & W & W & W & 0^* \\ 4 & 9 & 9 & 9 & W & W & W & W \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} W & 0^* & 9 & 1 & W & W & 2 & W \\ 1 & W & 0 & 0^* & W & W & 3 & W \\ 0 & 11 & W & 3 & W & W & 0^* & W \\ W & W & W & W & 0^* & W & W & W \\ W & W & W & W & W & 0^* & W & W \\ 3 & 3 & 0^* & W & W & W & 4 & W \\ W & W & W & W & W & W & W & 0^* \\ 0^* & 7 & 7 & 0 & W & W & W & W \end{pmatrix}$$

Így a tekintett feladat optimális megoldása:

$x_{12}^{(6)} = x_{24}^{(6)} = x_{37}^{(6)} = x_{45}^{(6)} = x_{56}^{(6)} = x_{63}^{(6)} = x_{78}^{(6)} = x_{81}^{(6)} = 1$ és $x_{ij}^{(6)} = 0$ a többi indexekre. A megoldás körút, az optimum értéke $z(\mathbf{X}^{(6)}) = 31$.

A korlátok meghatározása során két körutat is kaptunk, az $\mathbf{X}^{(5)}$ és $\mathbf{X}^{(6)}$ körutakat rendre 26 és 31 célfüggvényértékekkel. Így $\mathbf{X}^*$ és $\bar{z}$ értékeit aktualizálva, $\mathbf{X}^*$ új értéke $\mathbf{X}^{(5)}$ és $\bar{z}$ új értéke 26. Ekkor a megfelelő B&B fa a következő:



10.5. ábra. Az előállított B&B fa.

Mivel $\bar{z} = 26$ nem nagyobb egyik alsó korlátnál sem, ezért a fa valamennyi levele lezárásra kerül, azaz $F_2 = \emptyset$. Így a tekintett utazó ügynök probléma optimális megoldása $\mathbf{X}^{(5)}$, az optimum értéke pedig 26.

Az utazó ügynök probléma megoldására igen sok $B\&B$ eljárás kidolgozásra került. Ezek alapvetően a korlátozó függvényben, a szétválasztási függvényben, valamint a felbontandó levél kiválasztásának stratégiájában különböznek egymástól.

A hozzárendelési feladat felhasználását a korlát meghatározására számos szerző alkalmazta, többek között a [?], [?], [?], [?], [?], [?] dolgozatok tartalmazznak olyan eljárásokat, amelyekben a korlátozó függvény definiálása a tárgyaltakhoz hasonlóan történik. A szétválasztási függvényt illetően azonos technikát alkalmaztak a [?], [?], [?] munkákban közölt eljárásoknál. Ennek a módszernek egy olyan módosítása került bevezetésre a [?] dolgozatban, amelynél nem egy minimális elemszámú részkörutat választunk, hanem a részkörutak közül azt, amely minimális számú szabad változót fog eredményezni. (Ezzel csökken az aktuális $B\&B$ -fában az adott szögponthoz tartozó leszármazottak száma.)

Más elven működő $B\&B$ eljárások is kidolgozásra kerültek, melyeket itt nem érintünk. A különböző technikák egy igen jó, összefoglaló tárgyalása megtalálható a [?] könyvben.