4. Gyakorlat

F1. Egy társaság hierarchikus rendszerben dolgozik, azaz a fönök beosztott reláció egy fát alkot. A társaság egy fogadást szervez. Minden alkalmazotthoz hozzá van rendelve egy kedélyességi mérték. A parti résztvevőit, úgy akarják kiválasztani, hogy egyetlen alkalmazottnak se legyen ott a közvetlen főnöke és az összkedélyesség a maximális legyen.

- Adjunk megy egy dinamikus programozási algoritmust a meghívandók listájának elkészítésére!

- Miként érhetjük el, hogy a vállalat főnöke biztos kapjon meghívást?

Megold. Legyen $k(P)$ a P dolgozóhoz rendelt kedélyességi érték! Bontsuk részproblémákra a feladatot. Minden P pontra a hierarchia fájában vegyük ugyanezt a problémát. Jelölje $F(P)$ azt a maximális összkedélyességet, ami elérhető abban a partiban, amit a P gyökerű részfában szereplő pontokból állítunk össze. (Azaz a P által vezetett részlegből.) Ekkor ez a függvény rekurzívan a következőképpen állítható elő:

A levelekben $F(P) = k(P)$. Amennyiben egy pont nem levél, akkor két lehetőséget kell megvizsgálnunk.

Ha P-t nem hívjuk meg a partira, akkor a P fiaiból induló részfákra nincs semmi kikötésünk. Adódik, hogy ekkor $F(P) = \sum_{Q \text{ fia } P-\text{nek}} F(Q)$.

Ha P-t meghívjuk a partira, akkor P fiai nem jöhetnek, de fiúk fiaiból (unokákból) induló részfákra nincs semmi kikötésünk, egyszerűen adódik, hogy ekkor $F(P) = k(p) + \sum_{Q \text{ unoka } P-\text{nek}} F(Q)$.

Tehát a rekurzió:

$F(P) = \max\{\sum_{Q \text{ fia} P-\text{nek}} F(Q), k(p) + \sum_{Q \text{ unoka } P-\text{nek}} F(Q)\}$.

A rekurzió alapján a pontokhoz tartozó értékek megfelelő sorrendben történő kitöltésével megkapjuk egy dinamikus programozási eljárással az optimális értéket. Azok a megfelelő sorrendek, amelyekben mindenki megelőzi az apját. Ilyen sorrendet kaphatunk egy szint szerinti bejárás sorrendjének a megfordításával.

Az optimális megoldás visszafejthető, ha az eljárás során mindig megjegyezzük, hogy az optimális megoldás tartalmazza -e a gyökeret.

Két módszer is megadható annak biztosítására, hogy a vállalat főnöke biztos meghívást nyerjen. Megtehetjük, hogy a feladatot, csak a főnök unokáira oldjuk meg, és a kapott megoldások uniója plussz a főnök lesz a módosított probléma megoldása. Egy másik lehetőség, hogy a főnök kedélyességét átállítjuk egy nagyon nagy értékre ezzel biztosítva, hogy felkerül a feladat optimális megoldásában a meghívottak listájára.

F2. Egy adott hátizsákba tárgyakat akarunk pakolni. Minden tárgynak van egy fontossági értéke (f_i), és egy súlya (s_i), a hátizsákba maximum összesen S súlyt pakolhatunk. Az s_i és S értékek egészek. Szeretnénk úgy választani tárgyakat, hogy az összfontosság maximális legyen. Tehát feladatunk, hogy kiválasszuk a tárgyaknak olyan halmazai közül, amelyekre az összsúly nem haladja meg S-t azt, amelyre maximális az összfontosság. Adjunk meg egy dinamikus programozási eljárást a feladat megoldására!

Megold. Jelölje n a tárgyak számát! Definiáljuk az $F(i, W)$ függvényt, minden $i = 1, \ldots, n$, $W = 1, \ldots, S$ értékre. Ez a függvény azon hátizsák probléma optimális függvényértékét adja meg, amelyben a tárgyak listája az első i tárgyat tartalmazza, és a hátizsák mérete W. Amennyiben W értéke negatív a függvény értéke $-\infty$.

Ekkor a kezdeti értékekre $F(1, W) = f_1$, ha $s_1 \leq W$ és 0 különben. Másrészt a következő rekurzió teljesül:

$$F(i+1, W) = \max\{F(i, W), f_{i+1} + F(i, W - s_{i+1})\}.$$

A rekurzió valóban fennáll. A részprobléma optimális megoldásában vagy szerepel az $i+1$-edik tárgy vagy nem, és ezen két eset maximuma adja az optimális célfüggvényértéket. Amennyiben $W - s_{i+1}$ negatív a függvényérték $F(i, W)$ lesz.

A fentiek alapján egy négyzetes táblázatkitöltéssel megkaphatjuk az optimális célfüggvényértéket. Egy optimális megoldást megkapunk visszafejtéssel, ha egy $V(i, W)$ táblázatban számon tartjuk, hogy az $F(i, W)$ érték kiszámításakor az i tárgy szerepelt -e az optimum esetén.

Megjegyzés. A hátizsák probléma többdimenziós változata is teljesen hasonlóan megoldható. A többdimenziós változatban a súlykorláton kívül egyéb korlátok is vannak. A rekurziónál a második esetben az egyéb korlátokban beálló változást is figyelembe kell venni.