7. Gyakorlat

F1 Egy vállalat a heti termelését kamionokkal szállítja a központi raktárba. A kamionforgalmat úgy korlátozzák, hogy minden városból pontosan egy másik városba mehetnek egy irányba a kamionok. (A központi raktárba mindenhonnan el lehet jutni). A vállalat azokból a városokból, amelyekbe nem lehet máshonnan eljutni, kamionokat indít, a többi városból nem. A kamionok a központi raktárban befejezik a szállítást nem mennek további kört. Minden kamionnak ugyanaz a C a kapacitása.

Minden városban ahol a kamion átmegy vehet fel további árut, amíg a kapacitása engedi. A feladat meghatározni a minimális számát a kamionoknak amivel meg lehet oldani a szállítást.

Megold Minden P városra jelölje $a(P)$ az árumennyiséget, amelyet a városból el kell szállítani, jelölje $A(P)$ a teljes árumennyiséget, amelyet a P városon át kell szállítani, beleértve azt is, amit P-ből. Legyen $SZ(P)$ a minimális száma a kamionoknak, amivel P-ig meg lehet oldani a szállítást, beleértve a P-ből szállítandó mennyiséget is. Legyenek $P_1, \ldots, P_k$ azok a városok, amelyekből közvetlenül lehet P-be menni. Ekkor az $A(P)$ és $SZ(P)$ függvényekre a következő rekurziók teljesülnek.

$$A(P) = \sum_{i=1}^{k} A(P_i) + a(P)$$

$$SZ(P) = \max\{\sum_{i=1}^{k} SZ(P_i), \lceil A(P_i)/C \rceil\}.$$

A rekurziók alapján megadható a rekurzív algoritmus, amely kiszámolja az $SZ(K)$ értéket, ahol K a központi raktár.

F2 Adott golyóknak egy halmaza, amely k_1 darab kék p_1 darab piros és z_1 darab zöld golyót tartalmaz. Egy játékos a következő lépéseket teheti:

- Elvehet egyszerre két piros és három zöld golyót.
- Elvehet egyzserre három piros és két kék golyót.
- Elvehet egyszerre három kék és két zöld golyót.

A kérdés az, hogy elérheti -e, hogy néhány lépés után az asztalon k_2 darab kék p_2 darab piros és z_2 darab zöld golyó legyen, ha igen minimálisan hány lépést kell tegyen? Reprezentáljuk a feladatot egy gráffal!

Megold A gráf pontjai az x, y, z egész számhármasok, amelyekre $k_1 \geq x \geq k_2$, $p_1 \geq y \geq p_2$, $z_1 \geq z \geq z_2$. Egy ilyen pont azt az asztalt reprezenzálja, amelyen x kék, y piros és z zöld pont van. Az élek azt adják meg ha egy pontnak megfelelő asztalból megkapható egy másik, így az x, y, z pont szomszédjai $x, y-2, z-3$, $x-2, y-3, z$ és $x-3, y, z-2$. A feladat, hogy megállapítsuk van -e a k_1, p_1, z_1 pontból a k_2, p_2, z_2 pontba út és ha van, akkor határozzuk meg a minimális hosszút. Ezt megtehetjük úgy, hogy a kiindulási pontból végrehajtunk egy szélességi keresést a gráfon, amely eljárást akkor hagyjuk abba, amit elértük a k_2, p_2, z_2 pontot.

Fontos megjegyeznünk, hogy ebben az esetben minden lehetséges út hossza ugyanakkora, mivel az asztalon levő golyók száma minden lépésben 5-tel csökken.

F3. Adott egy sziget ahol 42 kaméleon lakik. A kaméleonok három színt vehetnek fel piros, kék és zöld. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, akkor megijednek és mindkettő átváltoztatja a színét a harmadik színre. A szigeten a kiindulási időpontban 13,14,15 darab piros zöld és kék kaméleon van.

Adjunk meg egy algoritmust, amely megadja, hogy van -e a találkozásoknak olyan sorozata, amelyet követően minden kaméleon színe ugyanaz lesz, és ha van megad egy minimális hosszú ilyen sorozatot.

Igazoljuk az algoritmus nélkül, hogy ebből a kindulási helyzetből nem érhetjük el, hogy minden kaméleonnak ugyanaz legyen a színe.

Megold: Reprezentáljuk a feladatot egy gráffal! A gráf pontjai az (x, y, z) számhármasok, ahol minden komponens nemnegatív egész és $x + y + z = 42$. Az élek a lehetséges átváltozásoknak felelnek meg. Tehát (x, y, z)-nek három szomszédja lesz $(x-1, y-1, z+2)$, $(x-1, y+2, z-1)$, $(x+2, y-1, z-1)$. A feladat, hogy meghatározzuk van -e a gráfban a $(13, 14, 15)$ pontból a $(42, 0, 0)$, $(0, 42, 0)$, $(0, 0, 42)$ pontok valamelyikébe út, és ha vannak ilyen utak adjunk meg egy legrövidebbet. Ekkor is egy szélességi keresést kell végrehajtani a $(13, 14, 15)$ pontból kiindulva, amelyet akkor hagyunk abba, ha a $(42, 0, 0)$, $(0, 42, 0)$, $(0, 0, 42)$ pontok valamelyikét elértük.

Az algoritmus használata nélkül az invariáns keresés módszerével igazolható az állítás. Vegyük észre, hogy a megengedett lépések során az $(x-y, y-z, x-z)$ számok hárommal való osztásmaradéka nem változik. (Azaz ez a tulajdonság a megengedett lépésekre nézve invariáns.) Kezdetben, ezen osztásmaradékok $(2, 2, 1)$, és minden kívánt végállapotban $(0, 0, 0)$, így a végállapotok egyike sem érhető el.

Megjegyzés Az F2, F3 feladatoknál használt módszer minden olyan esetben használható, ahol azt kell eldönteni, hogy valamilyen kiindulási konfigurációból eljuthatunk -e végkonfigurációk valamelyikébe valamely lépések alapján. Ekkor a gráfban a csúcsok a lehetséges konfigurációk, él megy két csúcs között ha közvetlenül egy lépéssel át lehet lépni az egyik konfigurációból a másikba. A gráfon egy szélességi bejárást kell végrehajtanunk, ez megadja a legrövidebb utat is.