1. Online forgalomirányítás

A számítógépes hálózatok esetén az egyes kommunikációs csatornák túltelítettsége a számítógépes forgalom nagymértékű lassulásához és információk elvesztéséhez vezethet. Ezért a számítógépes hálózatok elméletének egyik legalapvetőbb feladata a forgalom szabályozása. A forgalom szabályozásának témakörébe tartozik a forgalomirányítás is, mely során azt kell meghatároznunk, hogy az egyes üzenetek az üzenet küldőjétől a címzetthez milyen útvonalon jussanak el, mely közbenső állomásokon keresztül. A számítógépes hálózatok esetén nincs teljes információnk az összes jelenlegi és jövőbeli üzenetről, amely a rendszerbe kerül, így valóban egy on-line problémáról van szó. Az alábbiakban a forgalomirányítás problémájának két on-line modelljét mutatjuk be, amely modellek nem csak a számítógépes hálózatok modellezésére alkalmasak, hanem általánosabb forgalomirányítási problémák tanulmányozására is.

A matematikai modell

A hálózatot egy gráf reprezentálja és minden e élnek van egy $u(e)$ maximális felhasználható sávszélessége, az élek számát m-el jelöljük. A feladat az, hogy sorban kérések érkeznek, a j-edik kérés egy $(s_j, t_j, r_j, d_j, b_j)$ vektor, a feladat pedig az s_j pontból a t_j pontba egy kiválasztott úton r_j sávszélességet lefoglalni d_j időtartamra a kérés megjelenésétől kezdve. Amennyiben a kérést elfogadjuk, a nyereség b_j. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy $d_j = \infty$ minden j kérés esetén. A feladat on-line, ami azt jelenti, hogy a kérés időpontjában nem tudunk semmit a későbbi kérésekről. Két különböző modellt ismertetünk.

Terhelést kiegyensúlyozó modell: Ebben a modellben minden kérést el kell fogadni és a célfüggvény az élek túltelítettségének - ami a hozzájuk rendelt teljes sávszélességnek és a megengedett maximális felhasználható sávszélességnek a hányadosa - a maximumának a minimalizálása.

Nyereség maximalizáló modell: Ebben a modellben visszautasíthatunk kéréseket, a teljes sávszélesség egyetlen élen sem lehet nagyobb, mint a megengedett maximális sávszélesség, a cél az elfogadott kérésekhez rendelt nyereségek összegének maximalizálása.

Az alábbiakban ismertetjük az exponenciális algoritmust. Az algoritmus pontos megfogalmazásához és elemzéséhez szükségünk lesz az alábbi jelölésekre. Minden elfogadott i kérésre a kéréshez lefoglalt utat P_i jelöli. Legyen A az algoritmus által elfogadott kérések halmaza. Ekkor az $l_e(j) =$

$(\sum_{i\in A, i<j, e\in P_i} r_i)/u(e)$ érték azt adja meg, hogy a j-edik kérés előtt az e-n keresztül lefoglalt sávszélesség a megengedett sávszélességnek mekkora része.

Az exponenciális algoritmusok alapötlete, hogy minden élhez egy $l_e(j)$-ben exponenciális költséget rendelnek, és minimális költségű utat választanak. Az alábbiakban részletesen ismertetjük és elemezzük az exponenciális algoritmust a nyereségmaximalizáló modellre.

EXP algoritmus a nyereség modellre:

Egy j kérés elbírálása:

1. Legyen $c_e(j) = \mu^{l_e(j)}$, ahol μ egy a feladat paramétereitől függő konstans.

2. Vegyük azt a P_j utat s_j és t_j között, amelyre

$$C(P_j) = \sum_{e\in P_j} \frac{r_j}{u(e)} c_e(j)$$

minimális.

3. Ha $C(P_j) \leq 2mb_j$, akkor elfogadjuk a kérést és P_j-n foglaljuk le a sávszélességet, ha nem, akkor visszautasítjuk.

Megjegyzés Amennyiben az algoritmusból csak az 1 és 2 lépéseket hajtjuk végre és minden kérést elfogadunk, akkor a terhelést kiegyensúlyozó modellre kapjuk meg az exponenciális algoritmust.

Tétel *Az* EXP *algoritmus* $1/O(\log \mu)$*-versenyképes, ha* $\mu = 4mPB$*, ahol* B *felső korlátja a nyereségeknek, továbbá minden kérésre és élre teljesül*

$$\frac{1}{P} \leq \frac{r(j)}{u(e)} \leq \frac{1}{\log_2 \mu}.$$

Biz Tekintsük kérések egy tetszőleges I inputsorozatát. Jelölje A az EXP algoritmus által elfogadott kérések halmazát, A^* az OPT algoritmus által elfogadott de az EXP algoritmus által elutasított kérések halmazát. Továbbá minden olyan j kérésre, amelyet az OPT algoritmus elfogad, jelölje az OPT által hozzárendelt utat $P_j{}^*$. Az $l_e(j)$ értékekhez hasonlón definiáljuk az $l_e(v) = \sum_{i\in A, e\in P_i} r_i/u(e)$ értéket, amely azt adja meg, hogy az e-n keresztül lefoglalt sávszélesség a megengedett sávszélességnek mekkora része az eljárás végén.

A tétel állítását három lemmán keresztül igazoljuk. A lemmák közül, csak az első lemmát igazoljuk, a másik kettő bizonyítása nem része a tananyagnak.

Lemma *Az* EXP *algoritmus által kapott megoldás lehetséges, azaz egyetlen élen sem lépjük túl a megengedett sávszélességet.*

biz lemma Az állítást indirekt igazoljuk. Tegyük fel, hogy a megengedett sávszélességet az f élen túllépjük. Legyen j az első olyan kérés, amelynek az elfogadásával túlléptük a megengedett sávszélességet.

Mivel minden élre és kérésre, így j-re és f-re is teljesül, hogy $r_j/u(f) \leq 1/\log_2 \mu$ és a j kérés elfogadása után az f élen túllépjük a megengedett sávszélességet, ezért adódik, hogy $l_f(j) > 1 - 1/\log_2 \mu$. Másrészt ekkor az EXP algoritmus második lépésében számolt $C(P_j)$ értékre

$$C(P_j) = \sum_{e \in P_j} \frac{r_j}{u(e)} c_e(j) \geq \frac{r_j}{u(f)} c_f(j) \geq \frac{r_j}{u(f)} \mu^{1-1/\log_2 \mu}.$$

Szintén a tétel feltételei alapján $\frac{r_j}{u(e)} \geq \frac{1}{P}$, továbbá $\mu^{1-1/\log_2 m} = \mu/2$, így a fenti egyenlőtlenség alapján azt kapjuk, hogy

$$C(P) \geq \frac{1}{P} \frac{\mu}{2} = 2mB.$$

Másrészt ezzel az egyenlőtlenséggel ellentmondáshoz jutottunk, hiszen amennyiben a fenti egyenlőtlenség fennáll, akkor EXP visszautasítja a kérést. Mivel ellentmondáshoz jutottunk, ezért a kiinduló feltevésünk hamis kell legyen, azaz a lemma állítását igazoltuk.

lemma *Az* OPT *algoritmus által kapott megoldásra teljesül*

$$\sum_{j \in A^*} b_j \leq \frac{1}{2m} \sum_{e \in E} c_e(v)$$

lemma *Az* EXP *algoritmus által kapott megoldásra teljesül*

$$\frac{1}{2m} \sum_{e \in E} c_e(v) \leq (1 + \log_2 \mu) \sum_{j \in A} b_j.$$

A fenti lemmák alapján könnyen igazolható a tétel állítása.

Az EXP algoritmus nyeresége $\text{EXP}(I) = \sum_{j \in A} b_j$, az OPT algoritmus nyeresége legfeljebb $\sum_{j \in A \cup A^*} b_j$. Következésképpen a fenti lemmák alapján azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{OPT}(I) \le \sum_{j \in A \cup A^*} b_j \le (2 + \log_2 \mu) \sum_{j \in A} b_j \le (2 + \log_2 \mu)\mathrm{EXP}(I),$$

amely egyenlőtlenség igazolja a tétel állítását.