1. feladat Az egyensúly algoritmus viselkedése: Tekintsük a kétdimenziós Euklideszi teret, mint metrikus teret. A pontok (x, y) valós számpárokból állnak, két (a, b) és (c, d) pontnak a távolsága $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$. Legyen két szerverünk, kezdetben a $(0, 0)$ és $(1, 1)$ pontokban. A kérések sorozata legyen az $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(1, 4)$ pontsorozat. Hajtsuk végre az EGYENSULY algoritmust!

Megold: A kiindulási állapotban $D_1 = D_2 = 0$, $s_1 = (0, 0)$, $s_2 = (1, 1)$. Az első kérés az $(1, 4)$ pontban van. Ekkor $D_1 + d((0, 0), (1, 4)) = \sqrt{17} > D_2 + d((1, 1), (1, 4)) = 3$, így a második szervert használjuk és a kérés kiszolgálása után $D_1 = 0, D_2 = 3$, $s_1 = (0, 0)$, $s_2 = (1, 4)$ teljesül. A második kérés után $D_1 + d((0, 0), (2, 4)) = \sqrt{20} > D_2 + d((1, 4), (2, 4)) = 3 + 1 = 4$, így ismét a második szervert használjuk, és a kérés kiszolgálása után $D_1 = 0, D_2 = 4$, $s_1 = (0, 0)$, $s_2 = (2, 4)$ teljesül. A harmadik kérésnél $D_1 + d((0, 0), (1, 4)) = \sqrt{17} < D_2 + d((2, 4), (1, 4)) = 4 + 1 = 5$, így az első szervert használjuk és a kérés kiszolgálása után $D_1 = \sqrt{17}, D_2 = 4$, $s_1 = (1, 4)$, $s_2 = (2, 4)$ teljesül.

2. feladat Legyen a metrikus tér egy egyenes. Tegyük fel, hogy három szerverünk van, s_1, s_2, s_3 amelyek az egyenes $0, 1, 2$ pontjaiban helyezkednek el. Hajtsuk végre a Dupla Lefedő (DL) algoritmust a 4, 2 pontsorozatra.

Megold: Az első kérésnél DL a legközelebbi s_3 szervert küldi a kérés kiszolgálására. A többi szerver helye nem változik, a költség 2 és a kérés kiszolgálása után a szerverek a $0, 1, 4$ pontokban lesznek. A második kérésnél DL a legközelebbi s_2 szervert küldi a kérés kiszolgálására, de mivel a kérés másik oldalán is van szerver, ezért s_3 is megtesz egy egységnyi utat a kérés felé, így a költség 2 és a kérés kiszolgálása után a szerverek a $0, 2, 3$ pontokban lesznek.

3. feladat Igazoljuk, hogy a lapozási probléma (a weblapletöltés speciális esete, amelynél minden lapra $c(p) = s(p) = 1$) a k-szerver feladat speciális esete.

Megold: Legyen a metrikus tér egy uniform (bármely két különböző pont távolsága 1) tér, amelyben a pontok a lehetséges lapok. A memória celláit feleltessük meg a szervereknek, a szerver mindig azon a ponton van, amely lap az adott cellában szerepel. Könnyen látható, hogy az így kapott speciális k-szerver feladat ekvivalens a lapozási problémával.

4. feladat Igazoljuk, hogy a mohó algoritmus, ami minden kérést a legközelebbi szerverrel szolgál ki, nem versenyképes két szerver esetén az egyenesen.

Megold: Legyenek a szerverek kezdetben az A és B pontokban. A pontokat valós számokkal azonosítjuk. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $A < B$. Legyen $C = B + (B - A)/2$. A kérések sorozata legyen $(C, B)^n$. Ekkor a mohó algoritmus minden kérést a második szerverrel szolgál ki, így a költsége $2n(B-A)/2$. Másrészt bármely n esetén az optimális megoldás költsége legfeljebb $3(B - A)/2$, az első kérést az első szerverrel kiszolgálva többet nem kell mozogni. Következésképp a $MOHO(I)/OPT(I)$ hányados végtelenhez tart, ahogy n tart a végtelenbe.

5. feladat Legyen a metrikus tér egy egyenes, és legyenek igények az $1, 5, 9, 11, 13, 15, 16$ pontokban. Tegyük fel, hogy egy kiszolgálót helyezhetünk el, adjuk meg az optimális elhelyezését.

Megold: Vizsgáljuk meg mi történik, ha az elhelyezett kiszolgálót az adott helyéről elmozdítjuk valamely irányba egy kicsi ε távolságra. Ekkor azon igényeknek, akik a mozgatás irányával ellentétes oldalra esnek a kiszolgálótól a költsége nő, a többieké csökken. Tehát, ha a kiszolgáló valamelyik oldalán több igény van, akkor arra az oldalra elmozdítva a kiszolgálót a kiszolgálás költsége csökken. Tehát az optimális megoldásban a kiszolgáló mindkét oldalára ugyanannyi igénynek kell esnie, így a példában a kiszolgálót a 11 pontba kell raknunk.

6. Feladat Vegyük a következő véletlenített algoritmust a síbérlési feladatra (a sí vásárlási ára T egység). Az R algoritmus 1/2 valószínűséggel a 3/4 T időpontig vár és utána vásárol, 1/2 valószínűséggel pedig a T időpontban. Igazoljuk, hogy az algoritmus 15/8-versenyképes.

Megold: Vegyünk egy tetszőleges inputot, jelölje I. Azaz I napig síelünk. Különböztessük meg a következő eseteket.

Ha $I < 3/4T$, akkor az optimális költség I, továbbá R költsége is I mindkét döntés esetén, így az $E(R(I))/OPT(I)$ arány 1.

Ha $3/4T \leq I < T$, akkor az optimális költség I, továbbá R költsége vagy $T+3/4T-1$ vagy I. Tehát $E(R(I)) \leq 1/2 \cdot 7/4 \cdot T + 1/2 \cdot I$. Tehát felhasználva, hogy $I \geq 3/4T$ kapjuk, hogy $E(R(I))/OPT(I) \leq (1/2 \cdot 7/4 \cdot T + 1/2 \cdot I)/I \leq 1/2 \cdot 7/4 \cdot 4/3 + 1/2 = 10/6$.

Ha $T \leq I$, akkor $OPT(I) = T$. Az R algoritmus költsége pedig vagy $T + 3/4T - 1$ vagy $2T - 1$, így $E(R(I)) \leq 1/2 \cdot 7/4 \cdot T + 1/2 \cdot 2 \cdot T = 15/8T$. Következésképpen $E(R(I))/OPT(I) \leq 15/8$.

7 feladat Vegyük azt a hálózatot, amelynek pontjai A, B, C, D, E, irányított élei $(A, B), (B, C), (B, D), (C, D), (C, E), (D, E)$. Tekintsük a következő csomagokat:

- az 1 csomag a 0 időpontban érkezik az A, B, D, E útra
- a 2 csomag az 1 időpontban érkezik a B, D, E útra
- a 3 csomag az 1 időpontban érkezik a B, C, D, E útra
- a 4 csomag a 2 időpontban érkezik a B, D, E útra

Adjuk meg miként viszik át a csomagokat a hálózaton a SIS és LIS sorbaállítási protokollok.

Megold Elsőként vegyük a SIS (shortest in system) protokollt.

- A 0 időpontban 1 átmegy az (A,B) élen.
- Az 1 időpontban 2 átmegy a (B,D) élen (prioritást kap az ugyanarra az élre váró 1 előtt) és 3 átmegy a (B,C) élen.
- A 2 időpontban 4 átmegy (B, D)-n (prioritást kap az ugyanarra az élre váró 1 előtt), 2 átmegy (D,E)-n és 3 átmegy (C, D)-n.
- A 3 időpontban 1 átmegy (B, D)-n és 4 átmegy (D, E)-n (prioritást kap az ugyanarra az élre váró 3 előtt).
- A 4 időpontban 3 átmegy (D, E)-n (prioritást kap az ugyanarra az élre váró 1 előtt).
- Végül az 5 időpontban 1 átmegy (D, E)-n.

Most vegyük a LIS (longest in system) protokollt.

- A 0 időpontban 1 átmegy az (A,B) élen.
- Az 1 időpontban 1 átmegy a (B,D) élen (prioritást kap az ugyanarra az élre váró 2 előtt) és 3 átmegy a (B,C) élen.
- A 2 időpontban 2 átmegy (B, D)-n (prioritást kap az ugyanarra az élre váró 4 előtt), 1 átmegy (D,E)-n és 3 átmegy (C, D)-n.
- A 3 időpontban 2 átmegy (D, E)-n (a SIS szabály nem állít fel sorrendet 2 és 3 között, így a kisebb indexűt választjuk) és 4 átmegy (B, D)-n.

- A 4 időpontban 3 átmegy (D, E)-n (prioritást kap az ugyanarra az élre váró 4 előtt).
- Végül az 5 időpontban 4 átmegy (D, E)-n.

8 feladat Vegyük azt a hálózatot, amelynek pontjai A, B, C, D, E, irányított élei $(A, B), (B, C)$, (C, D), (D, E). Tekintsük a következő csomagokat:

- az 1 csomag a 0 időpontban érkezik az A, B, C útra
- a 2 csomag a 0 időpontban érkezik a B, C, D útra
- a 3 csomag az 1 időpontban érkezik a B, C, D útra
- a 4 csomag az 1 időpontban érkezik a C, D, E útra

Adjuk meg miként viszik át a csomagokat a hálózaton az NTG és FTG sorbaállítási protokollok.

Megold Elsőként vegyük az NTG (nearest to go) protokollt.

- A 0 időpontban 1 átmegy az (A,B) és 2 átmegy a (B,C) élen.
- Az 1 időpontban 1 átmegy a (B,C) élen (prioritást kap az ugyanarra az élre váró 3 előtt) és 2 átmegy a (C,D) élen (prioritást kap az ugyanarra az élre váró 4 előtt)
- A 2 időpontban 3 átmegy (B, C)-n és 4 átmegy (C, D)-n.
- Végül a 3 időpontban 3 átmegy (C, D)-n és 4 átmegy (D, E)-n.

Most vegyük az FTG (furthest to go) protokollt.

- A 0 időpontban 1 átmegy az (A,B) és 2 átmegy a (B,C) élen.
- Az 1 időpontban 3 átmegy a (B,C) élen (prioritást kap az ugyanarra az élre váró 1 előtt) és 4 átmegy a (C,D) élen (prioritást kap az ugyanarra az élre váró 3 előtt)
- A 2 időpontban 1 átmegy (B, C)-n, 2 átmegy (C, D)-n (az FTG szabály nem állít fel sorrendet 2 és 3 között, így a kisebb indexűt választjuk) és 4 átmegy (D, E)-n.

- Végül a 3 időpontban 3 átmegy (C, D)-n.

9. Feladat Keressünk domináló sorokat és oszlopokat a következő mátrixjátékban, és ezek segítségével egyszerűsítsük a játékot.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & 9 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 7 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Megoldás A harmadik oszlopot dominálja az ötödik oszlop, így a harmadik oszlop törölhető, a kapott mátrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Az új mátrixban a negyedik sor dominálja a második sort, így a második sor törölhető, a kapott mátrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 & -3 \\ 6 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Az első oszlopot dominálja a harmadik, ezért az első oszlop törölhető, a kapott mátrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A harmadik sort dominálja a második, ezért a harmadik sor törölhető, a kapott mátrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

A harmadik oszlopot dominálja a második, ezért a harmadik oszlop törölhető, a kapott mátrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

10. Feladat Igazoljuk, hogy egy 2×2 mátrixjáték esetén, ha van nyeregpont, akkor a játék egyszerűsíthető 1×1 méretűre dominanciák alapján.

Megold: Legyen a mátrix játéka

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a nyeregpont az első sor első eleme, aminek értéke a. Ekkor a nyeregpont definíciója alapján $a \leq b$ és $a \geq c$. Különböztessük meg a következő két esetet:

- Tegyük fel, hogy $d \leq b$. Ekkor $c \leq a$, $d \leq b$, így az első sor dominálja a másodikat, azaz a második sor törölhető. A maradék 1×2-es mátrixban az első oszlop a domináns, így a második törölhető.
- Tegyük fel, hogy $b \leq d$. Ekkor $c \leq a$, $a \leq b$, így $c \leq d$ is fennáll. Másrészt ekkor az első oszlop dominálja a másodikat, azaz a második oszlop törölhető. A maradék 2×1-es mátrixban az első sor a domináns, így a második törölhető.

11. feladat Adjunk meg egy olyan mátrixjátékot, amelynek van nyeregpontja, de a játék nem egyszerűsíthető dominanciák alapján.

Megold: A következő játék 3-dik sorának első eleme nyeregpont, de a játék nem egyszerűsíthető:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 5 & 9 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

12.Feladat Számoljuk ki az alábbi mátrixjáték értékét, és a két játékos optimális mixelt stratégiáit.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Megold: Legyen az A játékos (sorok között választó) mixelt stratégiája az $(x_1, 1 - x_1)$ vektor (x_1 valószínűséggel választja az első, x_2 valószínűséggel választja a második stratégiáját), a B játékos (oszlopok között választó) mixelt stratégiája az $(y_1, 1 - y_1)$ vektor (y_1 valószínűséggel választja az első,

y_2 valószínűséggel választja a második stratégiáját). Ekkor az A játékos által biztosan elérhető nyereség

$$\max_{x_1}\min_{y_1}\{2x_1y_1+4x_1(1-y_1)+5(1-x_1)(y_1)+3(1-x_1)(1-y_1)\}.$$

Átrendezve

$$\max_{x_1}\min_{y_1}\{y_1(2x_1+5(1-x_1))+(1-y_1)(4x_1+3(1-x_1))\}.$$

Rögzített x_1 mellett a minimum vagy $y_1=0$ vagy $y_1=1$ esetén jön elő, így a nyereség átírható a következő alakba

$$\max_{x_1}\min\{5-3x_1,3+x_1\}.$$

Tehát egy monoton csökkenő és egy monoton növekvő függvény minimumaként kapott függvényt maximalizálunk. Ilyenkor a maximumhely a két függvény közös pontja, azaz az $5-3x_1=3+x_1$ egyenlet megoldása. Tehát az optimális mixelt stratégiája az A játékosnak 1/2 valószínűséggel választja mindkét tiszta stratégiáját, a játék értéke pedig $5-3x_1=3+x_1=7/2$.

A B játékos által biztosítható minimális vesztesség

$$\min_{y_1}\max_{x_1}\{2x_1y_1+4x_1(1-y_1)+5(1-x_1)(y_1)+3(1-x_1)(1-y_1)\}.$$

Átrendezve

$$\min_{y_1}\max_{x_1}\{x_1(2y_1+4(1-y_1))+(1-x_1)(5y_1+3(1-y_1))\}.$$

Rögzített y_1 mellett a maximum vagy $x_1=0$ vagy $x_1=1$ esetén jön elő, így a vesztesség átírható a

$$\min_{y_1}\max\{4-2y_1,3+2y_1\}.$$

Tehát egy monoton csökkenő és egy monoton növekvő függvény maximumaként kapott függvényt minimalizálunk. Ilyenkor a minimumhely a két függvény közös pontja, azaz a $4-2y_1=3+2y_1$ egyenlet megoldása. Tehát az optimális mixelt stratégiája az B játékosnak 1/4 valószínűséggel választja az első tiszta stratégiáját 3/4 valószínűséggel amásodikat, a játék értékére itt is megkapjuk a $4-2y_1=3+2y_1=7/2$ értéket.

13. Feladat Vegyük 3 linkre és 3 játékosra a terheléselosztásos játékot, ahol mindhárom játékos 1 adatmennyiséget akar átküldeni, és mindhárom linknek a sebessége 1. Igazoljuk, hogy a koordinációs hányados legalább 51/27, felhasználva azt a Nash egyensúlyt, amelyben mindhárom játékos 1/3 valószínűséggel választja az összes linket.

Megold A szociális optimumban az i-edik játékos az i-edik linket használja, és a költség 1. Vizsgáljuk meg az adott Nash egyensúlyra az $E(\max C_i)$ értéket. A $\max C_i = 1$ eset akkor áll fenn, ha mindhárom játékos különböző linket választ, ez a 27 lehetséges kiválasztás (mindhárom játékosnak 3 lehetősége van) közül $6 = 3!$ esetben áll fenn, tehát $Pr(\max C_i = 1) = 6/27$. A $\max C_i = 3$ eset akkor áll fenn, ha mindhárom játékos ugyanazt a linket választja, ennek a valószínűsége minden linkre 1/27, így $Pr(\max C_i = 3) = 3/27$. Mivel a maximum 3 lehetséges értéket vehet fel, ezért $Pr(\max C_i = 2) = 18/27$. Következésképpen $E(\max C_i) = 1 \cdot \frac{6}{27} + 2 \cdot \frac{18}{27} + 3 \cdot \frac{3}{27} = \frac{51}{27}$.

14. Feladat Vegyük 3 linkre és 4 játékosra a terheléselosztásos játékot, ahol mindhárom játékos 1 adatmennyiséget akar átküldeni, és mindhárom linknek a sebessége 1. Igazoljuk, hogy a koordinációs hányados legalább 192/162, felhasználva azt a Nash egyensúlyt, amelyben mindhárom játékos 1/3 valószínűséggel választja az összes linket.

Megold A szociális optimumban valamelyik linket két játékosnak kell használnia, így a költség 2. Vizsgáljuk meg az adott Nash egyensúlyra az $E(\max C_i)$ értéket. A $\max C_i = 4$ eset akkor áll fenn, ha mind a 4 játékos ugyanazt linket választja, ez a 81 lehetséges kiválasztás (mind a négy játékosnak 3 lehetősége van) közül 3 esetben áll fenn, tehát $Pr(\max C_i = 4) = 3/81$. A $\max C_i = 3$ eset akkor áll fenn, ha pontosan három játékos választja ugyanazt a linket. Ennek a valószínűsége egy adott linkre 8/81, mivel négyféleképpen választható ki melyik 3 játékos választja ezt a linket, és a kimaradó játékos a fennmaradó két másik link közül választhat. Tehát mivel 3 lehetőség van a linkre, amelyen az adatmennyiség 3, ezért $Pr(\max C_i = 3) = 24/81$. Mivel a maximum 3 lehetséges értéket vehet fel, ezért $Pr(\max C_i = 2) = 54/81$. Következésképpen $E(\max C_i) = 2 \cdot \frac{54}{81} + 3 \cdot \frac{24}{81} + 4 \cdot \frac{3}{81} = \frac{192}{81}$.

15. Feladat Határozzuk meg a marginális élköltségekre vonatkozó lemma alapján a Pigou féle példa optimális megoldását.

Megold A marginális élköltség az e élen $xc_e(x)$ függvény deriváltja, így a Pigou példa esetén a felső élen $x' = 1$, az alsó élen $(x^2)' = 2x$. Ezen élköltségek mellett a Nash egyensúly az, amelyben mindkét élen ugyanaz a költség, azaz az az állapot, amikor az adatmennyiség fele a felső élen, fele az alsó élen megy. Következésképpen az eredeti hálózati játéknak ez az optimális megoldása.

16. Feladat A nemlineáris Pigou feladatban szintén két él van s és t között, a felső él költsége 1, az alsó él költsége x^p. Egy egységnyi adatmennyiséget küldünk át az osztható forgalomirányítási játékban s és t között. Határozzuk meg a Nash egyensúlyi helyzetet, és a marginális élköltségekre vonatkozó lemma alapján az optimális megoldást.

Megold: Miként a lineáris Pigou példában itt is fennáll, hogy ha bármekkorra adatmennyiséget a felső élen küldünk, akkor abból egy kis részt átrakva az alsó részre, annak a költsége csökken (1 helyett valami 1-nél kisebb érték lesz). Tehát egyetlen Nash egyensúlyi helyzet van, amelyben a teljes forgalmat az alsó élen küldjük, ennek költsége $1 \cdot 1^p = 1$. Az optimális megoldás megadásához számoljuk ki a marginális élköltségeket. A felső élen ez $x' = 1$, az alsó élen ez $(x \cdot x^d)' = (d+1)x^d$. Ezen élköltségek mellett a Nash egyensúly az, amelyben mindkét élen ugyanaz a költség, azaz az az állapot, amikor az adatmennyiség $1-(1/(d+1))^{1/d}$ a felső élen, $(1/(d+1))^{1/d}$ az alsó élen megy. Következésképpen az eredeti hálózati játéknak ez az optimális megoldása. Megjegyezzük, hogy az alsó élen az átküldött mennyiség 1-hez tart, ha d tart a végtelenbe, viszont a költsége 0-hoz. Ebből adódik, hogy az anarchia ára tartani fog a végtelenhez.

17. Feladat Vegyük a hálózatot, ahol két él van s és t között, a felső él költsége 1, az alsó él költsége $2x$. Egy egységnyi adatmennyiséget küldünk át az osztható forgalomirányítási játékban s és t között. Határozzuk meg a Nash egyensúlyi helyzetet, és a marginális élköltségekre vonatkozó lemma alapján az optimális megoldást.

Megold Nash egyensúly akkor áll fenn, ha a két élen megegyeznek a költségek, ellenkező esetben a drágább élről megérné átváltani a felhasználóknak. Tehát a Nash egyensúlyban az adatmennyiség fele a felső élen, fele az alsó élen megy. Az optimális megoldás meghatározásához vegyük a marginális költségeket, a felső élen $x' = 1$ az alsó élen $(2x^2)' = 4x$. A Nash egyensúlyi helyzetben a költségek megegyeznek, így a forgalom negyed megy az alsó élne, a forgalom 3/4 része megy a felső élen. Tehát ez az eredeti játékban az optimális megoldás, aminek költsége $3/4 \cdot 1 + 1/4 \cdot 1 = 1$.

18. Feladat Vegyük a hálózatot, ahol két él van s és t között, a felső él költsége $2x$, az alsó él költsége x^2. Egy egységnyi adatmennyiséget küldünk át az osztható forgalomirányítási játékban s és t között. Határozzuk meg a Nash egyensúlyi helyzetet, és a marginális élköltségekre vonatkozó lemma alapján az optimális megoldást.

Megold A Nash egyensúlyi helyzetben a két párhuzamos élen megegyezik a költség (különben a kisebb költségű élről megérné váltani). Tehát az $x+y=1$ és $2x = y^2$ egyenletekből álló egyenletrendszert kell megoldanunk. Ennek megoldása $x = 2-\sqrt{3}$ és $y = \sqrt{3}-1$, tehát a Nash egyensúlyban a forgalom $2-\sqrt{3}$-ad része megy a felső élen és a $\sqrt{3}-1$-ed része az alsó élen. Az optimális megoldáshoz számoljuk ki a marginális költségeket, ez a felső élen $(2x^2)' = 4x$ az alsó élen $(x^3)' = 3x^2$. A marginális költségek Nash egyensúlyához az $x+y=1$ és $4x = 3y^2$ egyenletrendszert kell megoldanunk. Ennek megoldása $x = 1/3$ és $y = 2/3$, így az optimális megoldásban a forgalom $1/3$ része megy a felső és $2/3$ része az alsó élen.