További forgalomirányítási és szervezési játékok

1. Nematomi forgalomirányítási játék

A forgalomirányítási játékban adott egy hálózat, ami egy irányított $G = (V, E)$ gráf. A gráfban megengedjük, hogy két pont között több él is vezessen. Továbbá adottak $(s_1, t_1, r_1), \ldots, (s_k, t_k, r_k)$ igények, amik arra vonatkoznak, hogy a hálózatban szállítsunk el r_i adatmennyiséget az s_i pontból a t_i pontba. A továbbiakban P_i jelöli az s_i-ből t_i-be vezető utak halmazát. A forgalom költségét az élekhez rendelt költségfüggvények adják meg, minden élhez definiált egy $c_e(x)$ nemnegatív, folytonos, monoton növekvő költségfüggvény, amely azt adja meg mekkora az élen a késedelem, ha az élen átmenő forgalom x. Tehát egy forgalomirányítási játékot egy (G, r, c) hármas definiál.

A nematomi játékban az egyes igények nem egy-egy játékosnak felelnek meg, hanem minden igényhez nagyon sok játékos tartozik, az egyes játékosok által igényelt adatmennyiség tetszőlegesen kicsi lehet. Ennek megfelelően az r_i adatmennyiséget tetszőlegesen szétoszthatjuk a P_i halmazba eső utakon. A játék egy megoldása egy hálózati folyam lesz, ahol minden élre megadjuk az élen átmenő adatmennyiséget (ami az élen átmenő utakhoz rendelt adatmennyiségek összege).

A Nash egyensúlyi helyzet definiálásához jelölje egy tetszőleges f folyamra az e élen átmenő teljes adatmennyiséget f_e. Ekkor az él késedelemi költsége $c_e(f_e)$. Továbbá egy P út költsége $c_P(f) = \sum_{e \in P} c_e(f_e)$ az útra eső élek összköltsége. Egy folyam Nash egyensúly, ha egyik játékosnak sem éri meg változtatni az általa választott útvonalon, feltéve, hogy a többi játékos nem változtat, azaz P_i egyetlen kiválasztott útjáról sem érdemes áttérni egy kis résznek egy másik P_i-beli útra. Ez a c_e függvények folytonossága miatt az alábbi formális definícióhoz vezet.

Definíció Egy (G, r, c) nematomi forgalomirányítási játékra egy f folyam Nash egyensúly, ha minden i-re minden olyan $P, P' \in P_i$ útra, ahol P-hez adatforgalom van rendelve $c_P(f) \leq c_{P'}(f)$.

A Nash egyensúly egy öncélú egyensúlyi helyzet, amelyben minden játékos csak a saját célját veszi figyelembe. A szociális optimum ezzel szemben egy koordinált megoldás, amely a teljes költséget minimalizálja. A forgalomirányítási játékban egy folyam teljes költségét a $\sum_{e \in E} f_e \cdot c_e(f_e)$ összeg adja meg (az adott e élen a késedelem $c_e(f_e)$ és ezt f_e adatmennyiség, azaz játékos szenvedi el). Tehát az optimális folyam az, ami ezt a célfüggvényt minimalizálja. Az anarchia és a stabilitás ára azt vizsgálja mennyivel kaphatunk jobb eredményt a koordinált optimális megoldásban, mint a koordinálatlan Nash egyensúlyban.

Definíció Egy (forgalomirányítási) játékban az anarchia ára a Nash egyensúlyi helyzetekben számolt teljes költségeknek és a szociális optimum teljes költségének a hányadosának a maximuma.

Definíció Egy (forgalomirányítási) játékban a stabilitás ára a Nash egyensúlyi helyzetekben számolt teljes költségeknek és a szociális optimum teljes költségének a hányadosának a minimuma.

Pigou példa Vegyük a hálózatot, ahol két él van s és t között, a felső él költsége 1, az alsó él költsége x. Egy egységnyi adatmennyiséget küldünk át a nematomi forgalomirányítási játékban s és t között. Ha egy folyamban valamennyi ε mennyiséget küldünk a felső élen, akkor ott a költség 1, alul a költség $1-\varepsilon$, tehát a folyam nem Nash egyensúly. Így az egyetlen egyensúlyi helyzet, ha a teljes forgalom az alsó élen megy. Ennek teljes költsége 1. Igazolható, hogy a szociális optimum a forgalom felét a felső, felét az alsó élen küldi. Ennek teljes költsége $1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1/2 = 3/4$. Tehát erre a példára mind az anarchia mind pedig a stabilitás ára 4/3.

Braess paradoxon Vegyük a hálózatot, ahol négy pont van s, u, v, t és négy él (s, u), (s, v), (u, t), (v, t). Az élek költségfüggvényei $c_{(s,u)} = c_{(v,t)} = x$ és $c_{(s,v)} = c_{(u,t)} = 1$. Egy egységnyi adatmennyiséget küldünk át a nematomi forgalomirányítási játékban s és t között. Az egyetlen Nash egyensúly az, hogy a forgalom fele a felső úton (s, u, t) a másik fele az alsó úton (s, v, t) megy, ekkor mindkét lehetséges úton egyenlő a késedelem. Az egyensúlyban mindkét úton $1 + 1/2$ a késedelem, így a teljes költség 3/2.

Most vegyünk fel egy új 0 költségű (u, v) élet a hálózatba. Ekkor az egyetlen Nash egyensúly a teljes forgalmat az s, u, v, t úton küldi. Az új él miatt a régi Nash egyensúly nem egyensúlyi helyzet, mert abban az s, u, v, t út költsége 1, ami kisebb, mint a használt utak költsége. Az úton a késedelem 2, és a teljes késedelem is 2. Tehát a 0 költségű él felvétele növelte a Nash egyensúly költségét.

A megoldás létezésének vizsgálatához felhasználhatóak a marginális költségfüggvények. Egy $c_e(x)$ élköltséghez a marginális élfüggvény $x \cdot c_e(x)$ deriváltja, azaz ${c^*}_e(x) = (x \cdot c_e(x))'$. A marginális célfüggvényekre teljesül a következő érdekes összefüggés.

Marginális élköltségek lemmája Legyen (G, r, c) egy olyan nematomi játék, amelyben minden e élre $x \cdot c_e(x)$ konvex és folytonosan differenciálható. Ekkor egy f^* folyam akkor és csak akkor szociális optimum a (G, r, c) játékra nézve, ha Nash egyensúly a (G, r, c^*) játékra nézve, ahol c^* a marginális költségfüggvényeket jelöli.

A lemma alapján (a vizsgált költségeket véve a marginális célfüggvényeknek és az integrált értékek minimumát keresve) igazolható a következő tétel.

Unicitás és egzisztencia tétel Legyen (G, r, c) egy nematomi forgalomirányítási játék. Ekkor

- A játéknak van legalább egy Nash egyensúlyi helyzete.
- Ha f és f' Nash egyensúlyi helyzetek, akkor $c_e(f_e) = c_e(f'_e)$ teljesül minden e élre.

2. Atomi forgalomirányítási játék

Az atomi forgalomirányítási játék hasonló a nematomi játékhoz, a különbség az, hogy az egyes igények egy játékost és az ahhoz tartozó sávszélességigényt jelentik nem pedig sok játékos összeségét. Ennek megfelelően egy kérés kiszolgálásához egy úton kell a teljes r_i sávszélességet lefoglalni, és nem lehet szétosztani több út között. Itt csak tiszta stratégiákat vizsgálunk, nem engedjük meg, hogy a játékos több út között válasszon bizonyos valószínűséggel. Ennek megfelelően a szociális optimumban is csak olyan megoldásokat vizsgálunk, amelyek az i játékosra egy adott útvonalon foglalják le az r_i sávszélességet és a Nash egyensúly fogalma is változik.

Definíció Egy (G, r, c) atomi forgalomirányítási játékra egy f folyam Nash egyensúly, ha minden i-re és $P' \in P_i$ útra, $c_P(f) \leq c_{P'}(f')$, ahol P az f-ben az i által választott út, és f' az a folyam, amelyet úgy kapunk f-ből, hogy az i játékos választását kicseréljük P-ről P'-re.

Példa: Vegyünk egy kétirányú háromszöget, amelynek csúcsai u, v, w az élekhez rendelt költségfüggvények. $c_{(v,u)} = c_{(w,u)} = 0$ és $c_{(u,v)} = c_{(u,w)} = c_{(v,w)} = c_{(w,v)} = x$. A játékban négy játékos van, mindenki 1 adatmennyiséget akar átküldeni, a következő kezdő és célpontokkal $u \to v$, $u \to w$, $w \to v$, $v \to w$. Az optimális stratégia, ami Nash egyensúlyi helyzet is, ha minden játékos a közvetlen élet választja. Ekkor minden élen a késedelem 1, a teljes költség 4. Másrészt egyszerűen látszik, hogy az is egy Nash egyensúly, ha mindenki két élen keresztül küldi a forgalmat az (u, w, v), (u, v, w), (w, u, v) és (v, u, w) utakon. Ennek a költsége 10, így azt kapjuk, hogy erre a példára az anarchia ára 10/4.

Bizonyítás nélül megjegyezzük, hogy az atomi forgalomirányítási játék esetén előfordulhat, hogy egy játékban tiszta stratégiák mellett nincs Nash egyensúly. Másrészt bizonyos speciális esetekben igazolható Nash egyensúly létezése, amint azt az alábbi bizonyítás nélkül vett tételek mutatják.

Tétel Legyen (G, r, c) egy olyan atomi forgalomirányítási játék, amelyben minden r_i egyenlő egy adott pozitív R konstanssal. Ekkor (G, r, c)-nek van legalább egy Nash egyensúlyi helyzete.

Tétel Legyen (G, r, c) egy olyan atomi forgalomirányítási játék, amelyben minden $c_e = a_e x + b_e$ valamilyen nemnegatív a_e és b_e értékekre. Ekkor (G, r, c)-nek van legalább egy Nash egyensúlyi helyzete.

3. Shapley féle hálózatépítő játék

A Shapley féle hálózatépítő játék esetén adott egy irányított G gráf, és az élek mindegyikének van egy c_e nemnegatív költsége. Továbbá adott k játékos az i-dik játékos az s_i pontból a t_i pontba akar csomagokat szállítani, ehhez egy utat választ ki a gráfban a két pont között. Miután minden játékos kiválasztja a saját P_i utját, vesszük a kiválasztott hálózatot, ami $\cup_i P_i$. A megkonstruált hálózat költsége a benne levő élek költségeinek összege. Feltesszük, hogy ez a költség a felhasználás arányában oszlik meg a játékosok között, azaz ha egy játékosra P_i tartalmaz egy e élet, akkor a játékos c_e/f_e értéket fizet érte, ahol f_e azon játékosok száma, akik olyan utat választottak, amelyek tartalmazzák az e élet. A játékban a tiszta stratégiákat vizsgáljuk. Nash egyensúly egy olyan útválasztása a játékosoknak, ahol egyik játékos sem tudja csökkenteni a költségét, ha másik utat választ. A szociális optimum a minimális költségű részgráf, amelyben minden játékos kérése kielégíthető.

Példa az anarchia árára: Vegyünk egy két pontból s, t-ből álló hálózatot, amelyeket két párhuzamos (s, t) él köt össze, ahol a felső él költsége k az alsó él költsége $1 + \varepsilon$. A játékban egy Nash egyensúlyi helyzet, ha minden játékos a drágább felső élet választja. Ekkor mindenki 1 költséget kap a teljes k költségből, így ha valaki áttérne a másik élre és azt egyedül fizetné, akkor növekedne a költsége. Az optimális megoldásban mindenki az alsó élet választja és a költség $1+\varepsilon$. Megjegyezzük ez is egy Nash egyensúly. Tehát a példán az anarchia ára tetszőlegesen közel eshet k-hoz, a stabilitás ára viszont 1.

Az alábbi példa mutatja, hogy a stabilitás árára sem adható a játékosok számától független konstans felső korlát.

Példa a stabilitás árára: Vegyünk egy $k+2$ pontból $s_1, \ldots, s_k, t, v$ álló hálózatot a következő élekkel. Minden $i = 1, \ldots, k$-ra megy egy (s_i, t) él $1/i$ költséggel, továbbá (s_i, v) él 0 költséggel, végül egy (v, t) él $1+\varepsilon$ költséggel. Az i-edik játékos s_i-ből akar t-be csomagot küldeni. Ekkor a szociális optimumban az i-edik játékos az s_i, v, t utat választja és a teljes hálózat költsége $1+\varepsilon$. Másrészt ez nem Nash egyensúly. Egyszerűen látható, hogy egyetlen olyan útválasztás sem lehet Nash egyensúly, amelyben valahány játékos használja a (v, t) élet. Tegyük fel, hogy i játékos használja az élet, ekkor fejenként $(1+\varepsilon)/i$ a költségük. Viszont közülük a legnagyobb azonosítójú játékos esetén a közvetlen t-be vezető út költsége legfeljebb $1/i$, így megéri neki inkább azt az utat választani. Tehát az egyetlen Nash egyensúlyi helyzet az,a miben minden játékos a közvetlen utat választja, és ennek költsége $\sum_{i=1}^{k} 1/i \approx \log k$.

Irodalom

[1] T. Roughgarden, Routing Games, Chapter 18 in Algorithmic Game Theory, 2007

`http://theory.stanford.edu/~tim/papers/rg.pdf`

[2] T. Roughgarden and E. Tardos, Introduction to the Inefficiency of Equilibria, Chapter 17 in Algorithmic Game Theory, 2007.

`http://theory.stanford.edu/~tim/papers/ineff.pdf`