Játékelméleti modellek II.

1. Kiegészítés a játékelméleti első részhez

Tétel Egyforma gépek esetén a koordinációs hányados legfeljebb $2-2/(m+1)$ ha csak a tiszta stratégiákon vesszük a Nash egyensúlyokat.

Bizonyítás Vegyünk egy Nash egyensúlyi helyzetet, az általánosság mesgzorítása nélkül feltehetjük, hogy az első gépen a legnagyobb a töltés. Legyen ezen a gépen a töltés L. Ha ezen a gépen csak egy munka van, akkor nyilván $L \leq OPT$ teljesül. Tehát feltehetjük, hogy legalább két munka van a gépen, legyen a legkisebb mérete x, nyilván $x \leq L/2$. Másrészt Nash egyensúlyi helyzetben vagyunk, így ennek az x méretű munkának sehova sem érdemes átmennie. Ebből az következik, hogy a többi gépen a töltés legalább $L-x$. Ekkor összegezve a gépek töltéseire kapott korlátokat következik, hogy $\sum_{i=1}^{n} p_i \geq L+(m-1)(L-x) \geq L+(m-1)L/2$. Átrendezve ezt az egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} p_i/m \geq (m+1)L/(2m)$, amiből felhasználva az $OPT \geq \sum_{i=1}^{n} p_i/m$ egyenlőtlenséget adódik, hogy $L \leq (2-2/(m+1))OPT$.

Megjegyzés: A korlát éles mindig található Nash egyensúly, aminél a hányados $2-2/(m+1)$. Az $m=2$ esetben ez könnyen látható, ha az egyik gépen két 1 méretű munka van, a másikon két 2 méretű, akkor az egy Nash egyensúlyi helyzet 4 költséggel, míg az optimális költség nyilvánvalóan 3.

A fentiekben felső korlátokat láttunk be a legrosszabb Nash egyensúly hatékonyságára. Felmerül a kérdés, hogy mindig létezik -e ilyen Nash egyensúly, illetve az is, hogy mikeént kapható meg egy ilyen. Az alábbi állítás ad erre a kérdésre választ az általánosabb hasonló gépek (az i-dik M_i gép sebessége s_i) modellben.

Tétel Az LPT algoritmus által adott megoldás mindig Nash egyensúly a tiszta stratégiák felett hasonló gépek esetén.

Bizonyítás Az állítást teljes indukcióval igaoljuk. Az első munkát oda rakjuk, ahol leghamarabb véget ér, így ez nyilván Nash egyensúly. Tegyük fel, hogy k munkát már ütemeztünk és most jön a $(k+1)$-edik munka. Jelölje M_r azt a gépet, ahova a munkát rajtuk. Igazoljuk, hogy ezen munka ütemezése után is fennáll a Nash egyensúly. A $(k+1)$-edik munkának nem éri meg másik gépre átmenni, mivel azt arra a gépre raktuk, ahol elsőként véget ért. Azon munkáknak, akik nem M_r-en vannak ütemezve szintén nem éri meg más gépre átmenni, hiszen az indukciós feltevés alapján eddig nem érte meg, és egyetlen gépen sem lett kisebb a töltés. Tehát csak azokat a régebbi munkákat kell vizsgálnunk, akik az M_r gépen vannak. Ha egy ilyen i munka átmegy egy M_q $q \neq r$ gépre, amin a töltés T, akkor ott a befejezési ideje $T + p_i/s_q$ lesz. Másrészt az LPT algoritmus nagyság szerint csökkenő sorrendben ütemezi a munkákat, így $T + p_i/s_q \geq T + p_i/s_{k+1}$, azaz ez a befejezési idő nem kisebb, mint a $k+1$-edik munka befejezési ideje lenne az M_q gépen. Viszont az a befejezési idő nem kisebb, mint a töltés az M_r gépen mivel a $k+1$-edik munkát az LPT M_r-re rakta. Ezzel beláttuk, hoyg ezen munkáknak sem érdemes gépet váltani, azaz igazoltuk, hogy a kapott ütemezés Nash egyensúly.

2. Forgalomirányítási (nematomi) játék

Ebben a modellben az ütemezett forgalomban résztvevő játékosok késedelmét egy bonyolultabb modellben vizsgáljuk. A forgalomirányítási játékban adott egy hálózat, ami egy irányított $G = (V, E)$ gráf. A gráfban megengedjük, hogy két pont között több él is vezessen. Továbbá adottak $(s_1, t_1, r_1), \ldots, (s_k, t_k, r_k)$ igények, amik arra vonatkoznak, hogy a hálózatban szállítsunk el r_i adatmennyiséget az s_i pontból a t_i pontba. A továbbiakban P_i jelöli az s_i-ből t_i-be vezető utak halmazát. A forgalom költségét az élekhez rendelt költségfüggvények adják meg, minden élhez definiált egy $c_e(x)$ nemnegatív, folytonos, monoton növekvő költségfüggvény, amely azt adja meg mekkora az élen a késedelem, ha az élen átmenő forgalom x. Tehát egy forgalomirányítási játékot egy (G, r, c) hármas definiál.

A nematomi játékban az egyes igények nem egy-egy játékosnak felelnek meg, hanem minden igényhez nagyon sok játékos tartozik, az egyes játékosok által igényelt adatmennyiség tetszőlegesen kicsi lehet. Ennek megfelelően az r_i adatmennyiséget tetszőlegesen szétoszthatjuk a P_i halmazba eső utakon. A játék egy megoldása egy hálózati folyam lesz, ahol minden élre megadjuk az élen átmenő adatmennyiséget (ami az élen átmenő utakhoz rendelt adatmennyiségek összege).

A Nash egyensúlyi helyzet definiálásához jelölje egy tetszőleges f folyamra az e élen átmenő teljes adatmennyiséget f_e. Ekkor az él késedelemi költsége $c_e(f_e)$. Továbbá egy P út költsége $c_P(f) = \sum_{e \in P} c_e(f_e)$ az útra eső élek összköltsége. Egy folyam Nash egyensúly, ha egyik játékosnak sem éri meg változtatni az általa választott útvonalon, feltéve, hogy a többi játékos nem változtat, azaz P_i egyetlen kiválasztott útjáról sem érdemes áttérni egy kis résznek egy másik P_i-beli útra. Ez a c_e függvények folytonossága miatt az alábbi formális definícióhoz vezet.

Definíció Egy (G, r, c) nematomi forgalomirányítási játékra egy f folyam Nash egyensúly, ha minden i-re minden olyan $P, P' \in P_i$ útra, ahol P-hez adatforgalom van rendelve $c_P(f) \leq c_{P'}(f)$.

A Nash egyensúly egy öncélú egyensúlyi helyzet, amelyben minden játékos csak a saját célját veszi figyelembe. A szociális optimum ezzel szemben egy koordinált megoldás, amely a teljes költséget minimalizálja. A forgalomirányítási játékban egy folyam teljes költségét a $\sum_{e \in E} f_e \cdot c_e(f_e)$ összeg adja meg (az adott e élen a késedelem $c_e(f_e)$ és ezt f_e adatmennyiség, azaz játékos szenvedi el). Tehát az optimális folyam az, ami ezt a célfüggvényt minimalizálja. Az anarchia és a stabilitás ára azt vizsgálja mennyivel kaphatunk jobb eredményt a koordinált optimális megoldásban, mint a koordinálatlan Nash egyensúlyban.

Definíció Egy (forgalomirányítási) játékban az anarchia ára a Nash egyensúlyi helyzetekben számolt teljes költségeknek és a szociális optimum teljes költségének a hányadosának a maximuma.

Definíció Egy (forgalomirányítási) játékban a stabilitás ára a Nash egyensúlyi helyzetekben számolt teljes költségeknek és a szociális optimum teljes költségének a hányadosának a minimuma.

Pigou példa Vegyük a hálózatot, ahol két él van s és t között, a felső él költsége 1, az alsó él költsége x. Egy egységnyi adatmennyiséget küldünk át a nematomi forgalomirányítási játékban s és t között. Ha egy folyamban valamennyi ε mennyiséget küldünk a felső élen, akkor ott a költség 1, alul a költség $1-\varepsilon$, tehát a folyam nem Nash egyensúly. Így az egyetlen egyensúlyi helyzet, ha a teljes forgalom az alsó élen megy. Ennek teljes költsége 1. Igazolható, hogy a szociális optimum a forgalom felét a felső, felét az alsó élen küldi. Ennek teljes költsége $1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1/2 = 3/4$. Tehát erre a példára mind az anarchia mind pedig a stabilitás ára $4/3$.

Braess paradoxon Vegyük a hálózatot, ahol négy pont van s, u, v, t és négy él (s, u), (s, v), (u, t), (v, t). Az élek költségfüggvényei $c_{(s,u)} = c_{(v,t)} = x$ és $c_{(s,v)} = c_{(u,t)} = 1$. Egy egységnyi adatmennyiséget küldünk át a nematomi forgalomirányítási játékban s és t között. Az egyetlen Nash egyensúly az, hogy a forgalom fele a felső úton (s, u, t) a másik fele az alsó úton (s, v, t) megy, ekkor mindkét lehetséges úton egyenlő a késedelem. Az egyensúlyban mindkét úton $1 + 1/2$ a késedelem, így a teljes költség $3/2$.

Most vegyünk fel egy új 0 költségű (u, v) élet a hálózatba. Ekkor az egyetlen Nash egyensúly a teljes forgalmat az s, u, v, t úton küldi. Az új él miatt a régi Nash egyensúly nem egyensúlyi helyzet, mert abban az s, u, v, t út költsége 1, ami kisebb, mint a használt utak költsége. Az úton a késedelem 2, és a teljes késedelem is 2. Tehát a 0 költségű él felvétele növelte a Nash egyensúly költségét.

A megoldás létezésének vizsgálatához felhasználhatóak a marginális költségfüggvények. Egy $c_e(x)$ élköltséghez a marginális élfüggvény $x \cdot c_e(x)$ deriváltja, azaz ${c^*}_e(x) = (x \cdot c_e(x))'$. A marginális célfüggvényekre teljesül a következő érdekes összefüggés.

Marginális élköltségek lemmája Legyen (G, r, c) egy olyan nematomi játék, amelyben minden e élre $x \cdot c_e(x)$ konvex és folytonosan differenciálható. Ekkor egy f^* folyam akkor és csak akkor szociális optimum a (G, r, c) játékra nézve, ha Nash egyensúly a (G, r, c^*) játékra nézve, ahol c^* a marginális költségfüggvényeket jelöli.

A lemma alapján (a vizsgált költségeket véve a marginális célfüggvényeknek és az integrált értékek minimumát keresve) igazolható a következő tétel.

Unicitás és egzisztencia tétel Legyen (G, r, c) egy nematomi forgalomirányítási játék. Ekkor

- A játéknak van legalább egy Nash egyensúlyi helyzete.
- Ha f és f' Nash egyensúlyi helyzetek, akkor $c_e(f_e) = c_e(f'_e)$ teljesül minden e élre.

Irodalom

[1] T. Roughgarden, Routing Games, Chapter 18 in Algorithmic Game Theory, 2007

`http://theory.stanford.edu/~tim/papers/rg.pdf`

[2] T. Roughgarden and E. Tardos, Introduction to the Inefficiency of Equilibria, Chapter 17 in Algorithmic Game Theory, 2007.

`http://theory.stanford.edu/~tim/papers/ineff.pdf`