

Feladat Számoljuk ki az alábbi mátrixjáték értékét, és a két játékos optimális mixelt stratégiáit.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Megold: Legyen az A játékos (sorok között választó) mixelt stratégiája az $(x_1, 1 - x_1)$ vektor (x_1 valószínűséggel választja az első, x_2 valószínűséggel választja a második stratégiáját), a B játékos (oszlopok között választó) mixelt stratégiája az $(y_1, 1 - y_1)$ vektor (y_1 valószínűséggel választja az első, y_2 valószínűséggel választja a második stratégiáját). Ekkor az A játékos által biztosan elérhető nyereség

$$\max_{x_1} \min_{y_1} \{2x_1y_1 + 4x_1(1 - y_1) + 5(1 - x_1)y_1 + 3(1 - x_1)(1 - y_1)\}.$$

Átrendezve

$$\max_{x_1} \min_{y_1} \{y_1(2x_1 + 5(1 - x_1)) + (1 - y_1)(4x_1 + 3(1 - x_1))\}.$$

Rögzített x_1 mellett a minimum vagy $y_1 = 0$ vagy $y_1 = 1$ esetén jön elő, így a nyereség átírható a következő alakba

$$\max_{x_1} \min \{5 - 3x_1, 3 + x_1\}.$$

Tehát egy monoton csökkenő és egy monoton növekvő függvény minimumaként kapott függvényt maximalizálunk. Ilyenkor a maximumhely a két függvény közös pontja, azaz az $5 - 3x_1 = 3 + x_1$ egyenlet megoldása. Tehát az optimális mixelt stratégiája az A játékosnak $1/2$ valószínűséggel választja mindkét tiszta stratégiáját, a játék értéke pedig $5 - 3x_1 = 3 + x_1 = 7/2$.

A B játékos által biztosítható minimális veszteség

$$\min_{y_1} \max_{x_1} \{2x_1y_1 + 4x_1(1 - y_1) + 5(1 - x_1)y_1 + 3(1 - x_1)(1 - y_1)\}.$$

Átrendezve

$$\min_{y_1} \max_{x_1} \{x_1(2y_1 + 4(1 - y_1)) + (1 - x_1)(5y_1 + 3(1 - y_1))\}.$$

Rögzített y_1 mellett a maximum vagy $x_1 = 0$ vagy $x_1 = 1$ esetén jön elő, így a veszteség átírható a

$$\min_{y_1} \max\{4 - 2y_1, 3 + 2y_1\}.$$

Tehát egy monoton csökkenő és egy monoton növekvő függvény maximumaként kapott függvényt minimalizálunk. Ilyenkor a minimumhely a két függvény közös pontja, azaz a $4 - 2y_1 = 3 + 2y_1$ egyenlet megoldása. Tehát az optimális mixelt stratégiája az B játékosnak $1/4$ valószínűséggel választja az első tiszta stratégiáját $3/4$ valószínűséggel amásodikat, a játék értékére itt is megkapjuk a $4 - 2y_1 = 3 + 2y_1 = 7/2$ értéket.