1. Feladat Vegyük 3 linkre és 3 játékosra a terheléselosztásos játékot, ahol mindhárom játékos 1 adatmennyiséget akar átküldeni, és mindhárom linknek a sebessége 1. Igazoljuk, hogy a koordinációs hányados legalább 51/27, felhasználva azt a Nash egyensúlyt, amelyben mindhárom játékos 1/3 valószínűséggel választja az összes linket.

Megold A szociális optimumban az i-edik játékos az i-edik linket használja, és a költség 1. Vizsgáljuk meg az adott Nash egyensúlyra az $E(\max C_i)$ értéket. A $\max C_i = 1$ eset akkor áll fenn, ha mindhárom játékos különböző linket választ, ez a 27 lehetséges kiválasztás (mindhárom játékosnak 3 lehetősége van) közül $6 = 3!$ esetben áll fenn, tehát $Pr(\max C_i = 1) = 6/27$. A $\max C_i = 3$ eset akkor áll fenn, ha mindhárom játékos ugyanazt a linket választja, ennek a valószínűsége minden linkre 1/27, így $Pr(\max C_i = 3) = 3/27$. Mivel a maximum 3 lehetséges értéket vehet fel, ezért $Pr(\max C_i = 2) = 18/27$. Következésképpen $E(\max C_i) = 1 \cdot \frac{6}{27} + 2 \cdot \frac{18}{27} + 3 \cdot \frac{3}{27} = \frac{51}{27}$.

2. Feladat Vegyük 3 linkre és 4 játékosra a terheléselosztásos játékot, ahol mindhárom játékos 1 adatmennyiséget akar átküldeni, és mindhárom linknek a sebessége 1. Igazoljuk, hogy a koordinációs hányados legalább 192/162, felhasználva azt a Nash egyensúlyt, amelyben mindhárom játékos 1/3 valószínűséggel választja az összes linket.

Megold A szociális optimumban valamelyik linket két játékosnak kell használnia, így a költség 2. Vizsgáljuk meg az adott Nash egyensúlyra az $E(\max C_i)$ értéket. A $\max C_i = 4$ eset akkor áll fenn, ha mind a 4 játékos ugyanazt linket választja, ez a 81 lehetséges kiválasztás (mind a négy játékosnak 3 lehetősége van) közül 3 esetben áll fenn, tehát $Pr(\max C_i = 4) = 3/81$. A $\max C_i = 3$ eset akkor áll fenn, ha pontosan három játékos választja ugyanazt a linket. Ennek a valószínűsége egy adott linkre 8/81, mivel négyféleképpen választható ki melyik 3 játékos választja ezt a linket, és a kimaradó játékos a fennmaradó két másik link közül választhat. Tehát mivel 3 lehetőség van a linkre, amelyen az adatmennyiség 3, ezért $Pr(\max C_i = 3) = 24/81$. Mivel a maximum 3 lehetséges értéket vehet fel, ezért $Pr(\max C_i = 2) = 54/81$. Következésképpen $E(\max C_i) = 2 \cdot \frac{54}{81} + 3 \cdot \frac{24}{81} + 4 \cdot \frac{3}{81} = \frac{192}{81}$.

3. Feladat Határozzuk meg a marginális élköltségekre vonatkozó lemma alapján a Pigou féle példa optimális megoldását.

Megold A marginális élköltség az e élen $xc_e(x)$ függvény deriváltja, így a Pigou példa esetén a felső élen $x' = 1$, az alsó élen $(x^2)' = 2x$. Ezen élköltségek mellett a Nash egyensúly az, amelyben mindkét élen ugyanaz a költség, azaz az az állapot, amikor az adatmennyiség fele a felső élen, fele az alsó élen megy. Következésképpen az eredeti hálózati játéknak ez az optimális megoldása.

4. Feladat A nemlineáris Pigou feladatban szintén két él van s és t között, a felső él költsége 1, az alsó él költsége x^p. Egy egységnyi adatmennyiséget küldünk át az osztható forgalomirányítási játékban s és t között. Határozzuk meg a Nash egyensúlyi helyzetet, és a marginális élköltségekre vonatkozó lemma alapján az optimális megoldást.

Megold: Miként a lineáris Pigou példában itt is fennáll, hogy ha bármekkorra adatmennyiséget a felső élen küldünk, akkor abból egy kis részt átrakva az alsó részre, annak a költsége csökken (1 helyett valami 1-nél kisebb érték lesz). Tehát egyetlen Nash egyensúlyi helyzet van, amelyben a teljes forgalmat az alsó élen küldjük, ennek költsége $1 \cdot 1^p = 1$. Az optimális megoldás megadásához számoljuk ki a marginális élköltségeket. A felső élen ez $x' = 1$, az alsó élen ez $(x \cdot x^d)' = (d+1)x^d$. Ezen élköltségek mellett a Nash egyensúly az, amelyben mindkét élen ugyanaz a költség, azaz az az állapot, amikor az adatmennyiség $1-(1/(d+1))^{1/d}$ a felső élen, $(1/(d+1))^{1/d}$ az alsó élen megy. Következésképpen az eredeti hálózati játéknak ez az optimális megoldása. Megjegyezzük, hogy az alsó élen az átküldött mennyiség 1-hez tart, ha d tart a végtelenbe, viszont a költsége 0-hoz. Ebből adódik, hogy az anarchia ára tartani fog a végtelenhez.

5. Feladat Vegyük a hálózatot, ahol két él van s és t között, a felső él költsége 1, az alsó él költsége $2x$. Egy egységnyi adatmennyiséget küldünk át az osztható forgalomirányítási játékban s és t között. Határozzuk meg a Nash egyensúlyi helyzetet, és a marginális élköltségekre vonatkozó lemma alapján az optimális megoldást.

Megold Nash egyensúly akkor áll fenn, ha a két élen megegyeznek a költségek, ellenkező esetben a drágább élről megérné átváltani a felhasználóknak. Tehát a Nash egyensúlyban az adatmennyiség fele a felső élen, fele az alsó élen megy. Az optimális megoldás meghatározásához vegyük a marginális költségeket, a felső élen $x' = 1$ az alsó élen $(2x^2)' = 4x$. A Nash egyensúlyi helyzetben a költségek megegyeznek, így a forgalom negyed megy az alsó élne, a forgalom 3/4 része megy a felső élen. Tehát ez az eredeti játékban az optimális megoldás, aminek költsége $3/4 \cdot 1 + 1/4 \cdot 1 = 1$.

6. Feladat Vegyük a hálózatot, ahol két él van s és t között, a felső él költsége $2x$, az alsó él költsége x^2. Egy egységnyi adatmennyiséget küldünk át az osztható forgalomirányítási játékban s és t között. Határozzuk meg a Nash egyensúlyi helyzetet, és a marginális élköltségekre vonatkozó lemma alapján az optimális megoldást.

Megold A Nash egyensúlyi helyzetben a két párhuzamos élen megegyezik a költség (különben a kisebb költségű élről megérné váltani). Tehát az $x+y=1$ és $2x=y^2$ egyenletekből álló egyenletrendszert kell megoldanunk. Ennek megoldása $x=2-\sqrt{3}$ és $y=\sqrt{3}-1$, tehát a Nash egyensúlyban a forgalom $2-\sqrt{3}$-ad része megy a felső élen és a $\sqrt{3}-1$-ed része az alsó élen. Az optimális megoldáshoz számoljuk ki a marginális költségeket, ez a felső élen $(2x^2)'=4x$ az alsó élen $(x^3)'=3x^2$. A marginális költségek Nash egyensúlyához az $x+y=1$ és $4x=3y^2$ egyenletrendszert kell megoldanunk. Ennek megoldása $x=1/3$ és $y=2/3$, így az optimális megoldásban a forgalom $1/3$ része megy a felső és $2/3$ része az alsó élen.