

feladat A memóriakártya játékban adott $2n$ lap, amelyekből n darab pár képezhető, amely párokban egyformák a lapok. A játékban lefordítva elhelyezzük a lapokat és utána minden lépésben felfordíthatunk két kártyát. Ha a két kártya egyforma, akkor levesszük őket az asztalról. A játék akkor ér véget, amikor az utolsó kártyát is elvettük, a célunk pedig az, hogy minimalizáljuk az ehhez szükséges lépések számát. A feladat online változatában nem tudjuk előre melyik kártya hol van, az offline változatban pedig ezt tudjuk.

a) Adjunk egy 2 versenyképes algoritmust!

b) Adjunk egy jobb, $2 - 1/n$ -versenyképes algoritmust és igazoljuk, hogy kisebb versenyképességgel rendelkező algoritmus nem adható.

c) Vizsgáljuk meg az algoritmusokat arra a változatra, amelyben ha egy lépésbe egyforma kártyát veszünk fel, akkor nem ér véget a lépés hanem tovább húzhatunk kártyákat, addig, amíg különbözőek nem lesznek.

Megoldás a) Az optimális offline algoritmus minden kártyát ismer, így összesen n lépésben felveszi az n párt. Könnyen adható egy algoritmus, ami legfeljebb $2n$ lépést használ. Elsőként fordítsuk fel az összes kártyát páronként n lépésben. Ezt követően már mindent tudunk így használhatjuk az offline algoritmust a megmaradó kártyákra, azaz összesen legfeljebb $2n$ lépésben a játék véget ért, ami mutatja, hogy 2-versenyképes az algoritmus.

b) Egy lépést kell megspórolni ahhoz, hogy $2 - 1/n$ -versenyképes legyen az algoritmus. Ehhez vegyük észre, hogy amikor az utolsó előtti kártyát felfordítjuk, akkor már tudjuk azt is mi az utolsó, így annak felfordítása helyett már felfordíthatjuk az utolsó előtti kártya párját. Ez azt jelenti, hogy az összes kártya n lépésben történő megismerése után már csak $n - 1$ pár marad, azaz összesen legfeljebb $2n - 1$ lépést kell tennünk.

Most vizsgáljuk meg a szükséges lépések számát. Egyrészt minden algoritmus végrehajt n olyan lépést, amikor levesz egy párt. Nézzük meg, hogy hány olyan lépés lehet szükséges, amikor semmit nem tudunk levenni. Mivel online algoritmusról van szó, ezért az ellenfél minden olyan kártyára, amit eddig nem láttunk tetszőleges még nem látott kártyát adhat. Így megtehetjük, hogy első ismeretlen húzásra mindig egy még nem látott kártyát adunk, utána pedig annak párjaként egy már látott kártya párját. Ezt $n - 1$ -szer ismételtethetjük, hiszen az első húzásnál még nem tudunk másodjára látott kártyának párját adni. Tehát ez még $n - 1$ extra lépés, azaz összesen a legrosszabb esetben bármely algoritmusra szükség lehet $2n - 1$ lépésre.

c) Az előző feladatokhoz képest tulajdonképpen csak a költségek változtak, ebben a modellben a párlevételek után újra húzhatunk, így azokból min-

den lépésben csak az első számít. Így az optimális költség 1, az a) részben leírt algoritmus maximális költsége $n + 1$, azaz az $n + 1$ -versenyképes, a b) részben leírt algoritmus költsége n , így az n versenyképes. Az alsó korlát is kiterjeszthető, hiszen azok a lépések, ahol nem veszünk le kártyát $n - 1$ -en lehetnek és ehhez még legalább egy kártyalevétellel kezdődő lépés hozzájön.