

Online migrációs ütemezési modellek

Az online migrációs modellekben a régebben ütemezett munkák is átütemezhetők valamilyen korlátozott mértékben az új munka ütemezése mellett. Ez csökkentheti a versenyképességi hányadost, a csökkenés természetesen függ attól milyen mennyiségben engedünk munkákat átütemezni.

Különböző modellek vannak arra miként mérjük az átütemezés mennyiségét. A szigorú modellben egy algoritmust β migrációs hányadosúnak nevezünk, ha minden lépésben legfeljebb az aktuális munka méretének β -szorosát ütemezi át. Az amortizált modellben β migrációs azokat az algoritmusokat nevezzük, amelyekre mindig igaz, hogy az adott időpontig átütemezett teljes töltés legfeljebb β -szorosa az eddig érkezett töltésnek.

Tétel Azonos gépekre egy 1-versenyképes migrációs algoritmusra a migrációs hányados $\Omega(m)$.

Vegyük az inputot, ami két i/m méretű munkát tartalmaz minden $i = 1, \dots, m - 1$ -re. Az optimális megoldásban két gépen $(m - 1)/m$ méretű munka van egyedül és a többi gépen párba állítva a munkák elérik az $(m - 1)/m$ értéket. Ezt követően érkezzen egy 1 méretű munka. Ekkor az optimális megoldásban ez a munka lesz egyedül, és az $1/m$ és $(m - 1)/m$ munkák lesznek párba. Kiszámítva az átütemezéshez szükséges mozgást adódik a tétel.

Fill1 algoritmus

Amikor egy új munka j érkezik, akkor az alábbi lehetőségekből vegyük azt, ami minimalizálja a maximális befejezési időt.

- Rakjuk a munkát a legkisebb töltéssel rendelkező gépre.
- Legyen i az a gép, ahol minimális a maximális munka. Vegyük el erről a gépről a munkákat, addig amíg az elvett munkák összmérete nagyobb nem lesz, mint $2p_j$. Utána rendeljük j -t ehhez a géphez, a többi munkát pedig osszuk szét a Lista algoritmus szerint.

Tétel Fill1 $3/2 - 1/2m$ -versenyképes, és a migrációs hányadosa 2.

A migrációs hányadosra vonatkozó korlát nyilvánvaló.

A versenyképességet a munkák száma szerinti indukcióval igazoljuk. A legfeljebb $OPT/2$ méretű munkákat kicsinek nevezzük a többi nagynak. Ha az új munka kicsi, akkor az első esetben szereplő mohó döntés egy jó megoldást ad. Ha az új munka nagy, akkor legfeljebb $m - 1$ régi nagy munka van, így a másik esetben választott gépen nincs nagy munka. Tehát az újraütemezett munkák, mind kicsik, így teljesül az állítás.

Korlátozott hozzárendelési modell

Ez a független gépek modelljének a speciális esete. A munka végrehajtási ideje minden gépen azonos, ahol a munkát végre lehet hajtani, de minden j_i munka csak a gépek egy E_i részhalmazán végrehajtható. Az online feladatot vizsgáljuk a cél a maximális befejezési idő minializálása.

Tétel A mohó algoritmus $O(\log m)$ -versenyképes.

Tétel Nincs olyan algoritmus, amelynek a versenyképességi hányadosa kisebb, mint $\Omega(\log m)$.

Bizonyítás ötlete Ha két gép van, akkor elsőként egy $(1, 1)$ munka érkezik. Majd az algoritmus döntésétől függően jön $(1, \infty)$ vagy $(\infty, 1)$, és két gépre adódik a 2-es alsó korlát.

Ha négy gép van, akkor az első két munka $(1, \infty, 1, \infty)$ és $(\infty, 1, \infty, 1)$. Feltehetjük, hogy az algoritmus az első két gépen ütemezi ezeket. Az offline optimum az utolsó kettőn fogja. Ekkor egy $(1, 1, \infty, \infty)$ munka jön, majd az algoritmus döntésétől függően $(1, \infty, \infty, \infty)$ vagy $(\infty, 1, \infty, \infty)$. Így az optimális költség 1 az online költség 3.

A fenti ötlettel megduplázva a gépek számát tudjuk 1-el növelni az alsó korlátot, így jön ki az $\Omega(\log m)$.

Migrációs változat

Feltesszük, hogy ismerjük az optimumot (ez a feltevés elhagyható egy konstans szorzót veszítve versenyképességben). A továbbiakban $\ell(j)$ jelöli a j gép aktuális töltését.

Legyen J_i az érkező munka

1. rendeljük J_i -t ahhoz az M_j , géphez amire $j = \text{ARGMIN}\{\ell(j) \mid M_j \in E_i\}$
2. ezt követően, amíg van olyan J_t munka az M_j gépen, amihez van olyan $M_{j'} \in E_t$ amire $\ell(j) \geq \ell(j') + (1 + \varepsilon)OPT$ addig rakjuk át J_t -t M_j -ről $M_{j'}$ -re.

Lemma Az amortizált migrációs faktor legfeljebb $3\lambda/\varepsilon$, ahol λ az algoritmus versenyképessége.

Lemma Az algoritmus $O(\log(m)/\log \log(m))$ -versenyképes.

Lemma 1 bizonyítása

- Legyen $\Phi := \sum_j \ell(j)^2$ a potenciál.
- Belátható, hogy a potenciálfüggvény összesen legfeljebb $3\lambda OPT \sum_{1 \leq t \leq n} p_t$ mértékben nő.
- Amikor egy p_t munkát átrakunk egy kisebb töltésű gépre a potenciál legalább $\varepsilon p_t OPT$ mennyiséget csökken.
- Mivel a függvény nemnegatív az eljárás végén ezért a Lemma adódik.

Lemma 2 bizonyítása

- Tegyük fel, hogy a maximális töltés a migrációs lépés után $C \cdot OPT$, legyen egy ilyen töltéssel rendelkező gép v .
- Legyen $S_0 = v$ és S_1 azon gépek halmaza, ahol a v -hez rendelt munkák végrehajthatóak. Majd minden $i \geq 2$ esetén S_i legyen azon gépek halmaza, amiket nem tartalmaz az $S_0 \cup S_1 \cdots \cup S_{i-1}$ halmaz és amelyeken valamely munka végrehajtható az $S_0 \cup S_1 \cdots \cup S_{i-1}$ halmazban levő gépekhez rendelték közül. Jelölje S_i méretét n_i .
- Igazolható, hogy a töltés legalább $(C - i(1 + \varepsilon))OPT$ az S_i halmaz gépein.
- Szintén igazolható, hogy $n_i \geq \prod_{j=1}^i (C - j(1 + \varepsilon))$ minden $C - 1 \geq i \geq 1$ -re.
- Ezen észrevételek alapján a $\sum_{i=1}^{C-1} n_i \leq m$ képletből adódik a versenyképességre vonatkozó korlát.