Minimális feszítőfák

Legyen $G = (V,E,c)$, $c : E \to R^+$ egy súlyozott irányítatlan gráf. Terjesszük ki a súlyfüggvényt a $T \subseteq E$ élhalmazokra: $C(T) = \sum_{(u,v)\in T} c(u,v)$

Az F = (V,T) gráf minimális feszitőfája G-nek, ha

- F feszitőfája G-nek, és
- C(T) minimális

Legyen $A \subseteq F$ valamely (V,F) minimális feszítőfára, és $(u,v) \in E$.
Definíció (u,v) biztonságos él A-ra nézve, ha $A \cup \{(u,v)\}$ is része valamely minimális feszítőfának.

Elvi algoritmus
$A := \emptyset$
While A nem feszítőfa
    (u,v) biztonságos él keresése;
    $A := A \cup \{(u,v)\}$

Definíció: A G = (V,E) gráf vágása: $(S,V \setminus S)$, ahol $S \subseteq V$;

Definíció: $(u,v) \in E$ keresztél az $(S,V \setminus S)$ vágásra, ha $u \in S$ és $v \in V \setminus S$, vagy $u \in V \setminus S$ és $v \in S$. Az $(S,V \setminus S)$ vágás elkerüli az $A \subseteq E$ élhalmazt, ha A-ban nincs keresztél.

Definíció: (u,v) könnyű él az $(S,V \setminus S)$ vágásra, ha a legkisebb c-értékű (súlyú) keresztél.

Tétel: Ha A része a G = (V,E,c) valamely minimális feszítőfájának és elkerüli az $(S,V \setminus S)$ vágást, továbbá (u,v) könnyű él az $(S,V \setminus S)$ vágásra, akkor (u,v) biztonságos él A-ra nézve.

Bizonyítás: Legyen T = (V,F) egy olyan minimális feszítőfa, amelyre $A \subseteq F$. Ha $(u,v) \in F$, akkor az állítás nyilvánvaló.

Ha $(u,v) \notin F$, akkor (u,v)-t hozzá véve az F éleihez kört kapunk. Mivel u és v az S vágás különböző oldalán vannak, ezért van a körben egy másik (x,y) keresztél. Ekkor az $F' := F \setminus \{(x,y)\} \cup \{(u,v)\}$ élhalmaz is feszítőfája lesz G-nek. Továbbá $c(u,v) \le c(x,y)$ miatt $C(F') \le C(F)$, így szintén minimális.

Kruskal algoritmusa

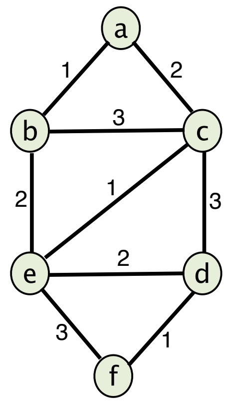
Kruskal(G,w)
 Letesit(A: halmaz)
 for $(v \in V)$
    $Halmazt - Keszit(v)$
 rendezzük E éleit w szerint növekvő sorrendbe
 for $(u,v) \in E$ esetén a súly szerinti sorrendben
    If $Halmazt - Keres(u) \neq Halmazt - Keres(v)$
        $A := A \cup \{(u,v)\}$
        Egyesít(u,v)

Megvalósítás: Unio Holvan adattípussal.

Helyesség: Az általános tétel alapján, vágásnak olyan vágást használva, ahol az egyik halmaz az u-tartalmazó részfa az aktuális feszítő erdőből.

Futási idő: $O(|E| \cdot \log |V|)$
Példa
A Kruskal algoritmus a következő sorrendben választja be az éleket:
$(a,b),(c,e),(d,f),(a,c),(d,e),$

Prím algoritmusa



1. ábra.

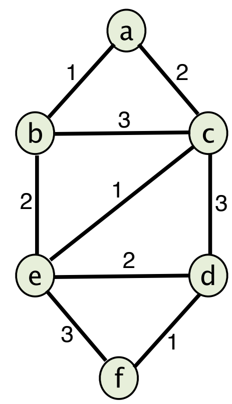
```
Prim(G,c,r)
 for(v in V)
     {d(v):=INF
     Apa(v):=0
     Bent(v):=0}
 d(r):=0
 Letesit(Q: ModPrisor)
 for(v in V)
    SorBa(Q,v)
 while(Elemszam(Q)>0)
   {SorBol(Q,u)
    Bent(u):=1
    for(v in KiEl(G,u))
        {If (Bent(v)=0) and (c(u,v)<d(v))
           then {Apa(v):=u
                 d(v):=c(u,v)
                 Modosit(v) }}}
```

Helyesség: Az általános tétel alapján, vágásnak olyan vágást használva, ahol az egyik halmaz azon v pontokat tartalmazza, akikre Bent(v)=1.

Futási idő: $O(|E|+|V|\cdot\log|V|)$

Példa

A Kruskal algoritmus a következő sorrendben választja be az éleket:



2. ábra.

$(a,b),(c,e),(d,f),(a,c),(d,e),$

A Prim algoritmus sorrendje
$(a,b),(a,c),\ (c,e),\ (d,e),(d,f).$

Maximális párosítás páros gráfokra

A $G=(V,E)$ gráfot párosnak nevezzük, ha V csúcshalmaza felosztható két diszjunkt részre V_1-re és V_2-re úgy, hogy minden él ezen két halmaz között fut.

Az E élhalmaz $M \subseteq E$ részhalmaza G egy párosítása, ha a $G' = (V,M)$ gráfban minden pont foka legfeljebb egy. Egy párosítás maximális ha a lehető legtöbb élet tartalmazza.

A megoldandó probléma: Adott egy $G=(V_1,V_2,E)$ páros gráf. Határozzuk meg egy maximális párosítását.

Legyen G egy gráf, és M a G egy párosítása. Egy G-beli utat M-alternáló útnak hívunk, ha felváltva tartalmaz M-beli és nem M-beli éleket.

Legyen M a G egy párosítása. Ekkor azokat az M-alternáló utakat, melynek egyik végpontja sincs benne a párosításban, M-re nézve javító útnak nevezzük.

Tétel Legyen $G=(V,E)$ egy tetszőleges gráf és M egy párosítása. Ha M-re nézve nincs javító út G-ben, akkor M a G gráfnak egy maximális párosítása.

Javító út keresése páros gráfokban alternáló erdővel

- gyökérelemek: V_1 azon pontjai, melyeket M nem fed le, vagyis a párosítatlan pontok.

- az erdők páratlan szintjei: V_2 azon még nem vizsgált pontjai, melyek egy M-en kívüli éllel elérhetőek az előző szintről
- az erdők páros szintjei: V_1 azon még nem vizsgált pontjai, melyek egy M-beli éllel elérhetőek az előző szintről

Tétel A $G = (V_1, V_2, E)$ páros gráfban akkor es csak akkor van az M párosításra nézve javító út, ha az M-hez tartozó alternáló erdőben páratlan szinten van párosításon kívüli pont.

Bizonyítás: Ha van ilyen, akkor az erdőben van út.

Tegyük fel, hogy $v_0, v_1, \ldots, v_k$ egy alternáló út, és $v_0 \in V_1$ egy párosításon kívüli pont.

i szerinti indukcióval megmutatható, hogy minden v_i bekerül az erdőbe.

Tehát az út utolsó pontja is bekerül, de az V_1-beli, így csak páratlan szintre kerülhet.

Stabil párosítások

Adott n fiú és n lány és minden fiú és lány rangsort állít fel az általa elfogadhatónak talált partnerek között.

Egy házasítás stabil, ha nincs olyan blokkoló pár, akik jobban kedvelik egymást, mint jelenlegi házastársaikat.

A leánykérő algoritmus

- Minden fiú, aki aktuálisan pár nélkül van minden lépésben ajánlatot tesz a számára legjobban tetsző lánynak

- Ha egy lány több ajánlatot kap, a legjobbat tartsa meg feltételesen, a többit utasítsa vissza véglegesen

Tétel Az algoritmus stabil párosítást ad.
http://mathsite.math.berkeley.edu/smp/smp.html

Maximális folyam probléma

Legyen $G = (V, E)$ gráf, s, t különböző csúcsok a forrás és a nyelő, c az éleken értelmezett nemnegatív kapacításfüggvény.

Legyen (V, E, s, t, c) egy hálózat, az $f : E \to Z$ folyam, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$ teljesül minden élre
- $\sum_{(u,v)\in E} f(u, v) = \sum_{(v,w)\in E} f(v, w)$ teljesül bármely $v \in V\{s, t\}$-re

A cél a $\sum_{(s,v)\in E} f(s, v)$ összeg maximalizálása.

Maradékhálózat: Adott gráf és folyam mellett definiálhatjuk a maradékhálózatot (V, E', s, t, m), ahol

- Minden $uv \in E$ élre, ha $f(uv) < c(uv)$, betesszük uv-t az E'-be, $m(uv) = c(uv) - f(uv)$, és az uv élet előre élnek jelöljük.
- Minden $uv \in E$ élre, ha pozitív (azaz $f(uv) > 0$), betesszük a vu fordított élet az E'-be, $m(vu) = f(uv)$, és a vu élet vissza élnek jelöljük.

Ford Fulkerson algoritmusa

- Megkonstruáljuk a maradékhálózatot. Keresünk benne egy s, t utat.
- Ha nincs ilyen út véget ér az algoritmus, az aktuális folyam maximális.

- Ha van s,t út, akkor az út előre élein növeljük a vissza éleken csökkentjük a folyam értékét, egy Δ értékkel, amely a maximális érték, amivel ez megtehető.

Kiskérdések ZH utáni hétre

- Kruskal algoritmus
- Prím algoritmus
- Ford Fulkerson algoritmus
- Stabil párosítási probléma és lánykérő algoritmus