Példa Adott egy $n \times n$-es sakktábla. Az $(1,1)$ mezőn áll egy huszár. Határozzuk meg eljuthat -e az (u,v) mezőre, ha igen adjunk meg egy legkevesebb lépésből álló utat! Adjunk algoritmust, ami megoldja a feladatot.

Megoldás Konstruáljunk a feladathoz egy gráfot. A gráf csúcsai (a lehetséges konfigurációk) a sakktábla mezői, két n-nél nem nagyobb pozitív koordinátából álló vektorok. Két csúcs össze van kötve, ha a huszár átléphet egyikből a másikba. Tehát az (x,y) szomszédjai az $(x-1,y+2)$, $(x-1,y-2)$, $(x+1,y+2)$, $(x+1,y-2)$, $(x+2,y-1)$, $(x+2,y+1)$, $(x-2,y-1)$, $(x-2,y+1)$ párosok közül azok, amelyekben mindkét koordináta pozitív és nem nagyobb, mint n. A feladat megtalálni a legrövidebb utat az $(1,1)$ pontból az (u,v) pontba. Ezt egy szélességi kereséssel, amit az $(1,1)$ pontból indítunk a fenti gráfban megtaláljuk.

Megjegyzés Ha adott mezők egy T halmaza, ahova nem léphet, akkor is hasonlóan oldható meg a feladat. Ez esetben csak a megengedett mezők a gráf pontjai.

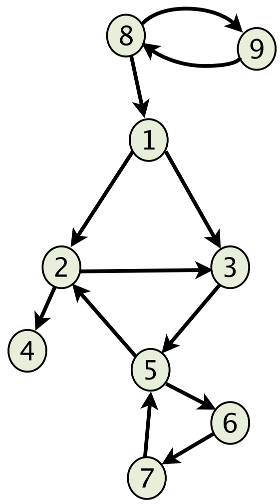
Mélységi keresés

Ez az algoritmus a gráf pontjait járja be, eredményképpen egy mélységi feszítőerdőt ad vissza az Apa függvény által. A pontok bejártságát színekkel kezeljük, fehér= érintetlen, szürke=megkezdett, fekete=befejezett.

```
Melykeres(G)
 for(u in V)
   {szin(u):=feher
    Apa(u):=0}
 for(u in V)
    {if szin(u)=feher
      then MBejar(u)}

MBejar(u)
 szin(u):=szurke
 for(v in Kiel(G,u))
    {if szin(v)=feher
       Then {Apa(v):=u
             MBejar(v)}}
 szin(u):=fekete
```

- MBejar(1)
- szín(1):=szürke
- Apa(2):=1
- MBejar(2)
- szín(2):=szürke
- Apa(3):=2
- MBejar(3)
- szín(3):=szürke
- Apa(5):=3
- MBejar(5)



1. ábra.

- szín(5):=szürke
- Apa(6):=5
- MBejar(6)
- szín(6):=szürke
- Apa(7):=6
- MBejar(7)
- szín(7):=szürke
- MBejar(7) vége, mert 5 már nem fehér
- szín(7):=fekete
- MBejar(6) vége
- szín(6):=fekete
- MBejar(5) vége
- szín(5):=fekete
- MBejar(3) vége

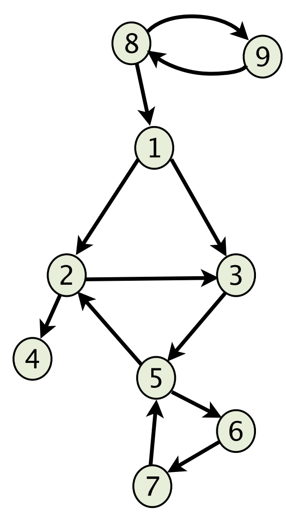
- szín(3):=fekete
- Apa(4):=2
- MBejar(4)
- szín(4):=szürke
- MBejar(4) vége
- szín(4):=fekete
- MBejar(2) vége
- szín(2):=fekete
- MBejar(1) vége
- szín(1):=fekete
- MBejar(8)
- szín(8):=szürke
- Apa(9):=8
- MBejar(9)
- szín(9):=szürke
- MBejar(9) vége
- szín(9):=fekete
- MBejar(8) vége
- szín(8):=fekete

Mélységi keresés kibővítve

Az algoritmus elemzéséhez és egyes alkalmazásainak helyességének bizonyításához hasznos, ha minden pontra definiáljuk a d elérési és f elhagyási idejét.

```
MelykeresBovit(G)
 for(u in G)
   {szin(u):=feher
    Apa(u):=0}
 ido:=0
 for(u in G)
    {if szin(u)=feher
      then MBejarBovit(u)}
MBejarBovit(u)
 szin(u):=szurke
 ido:=ido+1
```

```
d(u):=ido
for(v in Kiel(G,u))
   {if szin(v)=feher
      Then {Apa(v):=u
            MBejarBovit(v)}}
szin(u):=fekete
ido:=ido+1
f(u):=ido
```



2. ábra.

- MBejarBovit(1)
- szín(1):=szürke
- d(1)=1
- Apa(2):=1
- MBejarBovit(2)
- szín(2):=szürke
- d(2)=2
- Apa(3):=2

- MBejarBovit(3)
- szín(3):=szürke
- d(3)=3
- Apa(5):=3
- MBejarBovit(5)
- szín(5):=szürke
- d(5)=4
- Apa(6):=5
- MBejarBovit(6)
- szín(6):=szürke
- d(6)=5
- Apa(7):=6
- MBejarBovit(7)
- szín(7):=szürke
- d(7)=6
- MBejarBovit(7) vége, mert 5 már nem fehér
- szín(7):=fekete
- f(7)=7
- MBejarBovit(6) vége
- szín(6):=fekete
- f(6)=8
- MBejarBovit(5) vége
- szín(5):=fekete
- f(5)=9
- MBejarBovit(3) vége
- szín(3):=fekete
- f(3)=10
- Apa(4):=2
- MBejarBovit(4)

- szín(4):=szürke
- d(4)=11
- MBejarBovit(4) vége
- szín(4):=fekete
- f(4)=12
- MBejarBovit(2) vége
- szín(2):=fekete
- f(2)=13
- MBejarBovit(1) vége
- szín(1):=fekete
- f(1)=14
- MBejarBovit(8)
- szín(8):=szürke
- d(8)=15
- Apa(9):=8
- MBejarBovit(9)
- szín(9):=szürke
- d(9)=16
- MBejarBovit(9) vége
- szín(9):=fekete
- f(9)=17
- MBejarBovit(8) vége
- szín(8):=fekete
- f(8)=18

1. táblázat. A keresés során kapott értékek

pont	1	2	3	4	5	6	7	8	9
apa	0	1	2	2	3	5	6	0	8
d	1	2	3	11	4	5	6	15	16
f	14	13	10	12	9	8	7	18	17

Az algoritmus egy mélységi feszítő erdőt (MFE) ad eredményül, a csúcshalmaz V az élek pedig $F = \{(p,q) : Apa(q) = p\}$.

Tétel (Zárójelezési tétel) Mélységi keresést alkalmazva a G = (V,E) gráfra, a következő három feltétel közül pontosan az egyik teljesül minden u és v pontra:

- A $[d(u), f(u)]$ és $[d(v), f(v)]$ intervallumok diszjunktak és az u és v pontok egyike sem leszármazottja a másiknak a MFE-ben.
- $[d(v), f(v)] \subseteq [d(u), f(u)]$ és v leszármazottja u-nak a MFE-ben.
- $[d(u), f(u)] \subseteq [d(v), f(v)]$ és u leszármazottja v-nek a MFE-ben.

Bizonyítás. Legyen d(u) < d(v).

- Ha $d(v) < f(u)$, akkor v elérésekor u színe szürke volt, tehát v leszármazottja MFE-ben u-nak. Továbbá, v-t előbb elhagyjuk, mielőtt visszatérnénk u-hoz, tehát $f(v) < f(u)$.
- Ha $d(v) > f(u)$, akkor $d(u) < f(u) < d(v) < f(v)$, tehát a két intervallum diszjunkt. Ebből következik, hogy mind u, mind v elérésekor a másik nem lehetett szürke, tehát nem leszármazottjai egymásnak MFE-ben.

Következmény. A v pont akkor és csak akkor leszármazottja az u pontnak MFE-ben, ha $d(u) < d(v) < f(v) < f(u)$

Tétel (Fehér út tétel) Minden v pont akkor és csak akkor leszármazottja az u pontnak MFE-ben, ha a d(u) időben (u elérésekor) van csupa fehér pontokon át haladó $u \rightsquigarrow v$ út G-ben.

Bizonyítás

- Tegyük fel, hogy van $u \rightsquigarrow v$ az MFE-ben. Ekkor ennek tetszőleges w pontjára $d(u) < d(w)$, tehát w fehér a d(u) időben.
- Tegyük fel, hogy van olyan $u = v_1 \ldots v_k = v$ út, hogy minden v_i fehér a d(u) időben, de v nem lesz leszármazottja u-nak MFE-ben. Feltehetjük, hogy $\forall i < k$-ra v_i leszármazottja lesz u-nak az MFE-ben. Mivel v_{k-1} leszármazottja u-nak, ezért $f(v_{k-1}) < f(u)$. De $d(u) < d(v) < f(v_{k-1})$, így $d(u) < d(v) < f(v_{k-1}) < f(u)$, tehát v leszármazottja u-nak MFE-ben.

Élek osztályozása

- Faél: $(u, v) \in E$ faél, ha bekerül a MFE élei közé, azaz $Apa(v) = u$.
- Visszaél: $(u, v) \in E$ visszaél, ha u leszármazottja v-nek a MFE-ben.
- Előreél: $(u, v) \in E$ előreél, ha v leszármazottja u-nek a MFE-ben és nem faél.
- Keresztél: Minden más esetben $(u, v) \in E$ keresztél.

Példa az élek osztályozására

- Faélek: (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 7), (2, 4), (8, 9)
- Visszaélek: (5, 2), (7, 5), (9, 8)
- Előreélek: (1, 3)

- Keresztélek: (8, 1).

Tulajdonságok

- $(u,v) \in E$ akkor és csak akkor faél, ha az (u,v) él vizsgálatakor v színe fehér.
- $(u,v) \in E$ akkor és csak akkor visszaél ha az (u,v) él vizsgálatakor v színe szürke.
- $(u,v) \in E$ akkor és csak akkor előre-él ha az (u,v) él vizsgálatakor v színe fekete és $d(u) < d(v)$.
- $(u,v) \in E$ akkor és csak akkor keresztél ha az (u,v) él vizsgálatakor v színe fekete és $d(u) > d(v)$.

Tétel Ha G irányítatlan gráf, akkor bármely mélységi keresésre minden éle vagy faél, vagy visszaél.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $(u,v) \in E$ és $d(u) < d(v)$. Mivel $v \in Ki(G,u)$, ezért valamikor végrehajtódik az (u,v) él vizsgálata, és ekkor Szin(u)=Szurke. Milyen lehet v színe?

- Szin(v) = Feher : Ekkor (u,v) faél lesz.
- Szin(v) = Szurke : Ekkor (u,v) visszaél lesz.
- Szin(v) = Fekete : Nem lehet, mert ez azt jelentené, hogy $f(v) < d(u)$.

Topologikus rendezés

Definíció Egy G =(V,E) irányított gráf topologikus rendezésén a V pontjainak egy olyan $v_1, v_2, \dots, v_n$ $(n = |V|)$ felsorolását értjük, amelyre teljesül, hogy minden $(u,v) \in E$ élre, u előbb van a felsorolásban, mint v.

Lemma A G = (V,E) irányított gráfnak akkor és csak akkor van topologikus rendezése, ha G körmentes.

Lemma A G = (V,E) irányított gráfban akkor és csak akkor van kör, ha van visszaéle.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van egy (u,v) visszaél. Ekkor hozzávéve az (u,v) visszaélt az MFE-ben levő $v \rightsquigarrow u$ úthoz, egy kört kapunk G-ben.

Tegyük fel, hogy $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k = v_1$ egy kör, továbbá a kör pontjai közül v_1-et érjük el először a mélységi bejárás során. Ekkor a $d(v_1)$ időben van csupa fehér pontokon át haladó $v_1 \rightsquigarrow v_k$ út. A fehér út tétel miatt v_k leszármazottja lesz a v_1-nek a MFE-ben, tehát (v_k, v_1) visszaél lesz.

Tétel Ha a G irányított gráf körmentes, akkor pontjainak minden olyan $v_1, \dots, v_n$ felsorolása, amelyre $f(v_i) > f(v_{i+1})$, $i = 1, \dots, n-1$ G egy topologikus rendezése lesz bármely mélységi bejárással kiszámított f elhagyási függvényre.

Bizonyítás Legyen $(u,v) \in E$ tetszőleges él.

- Ha $d(u) < d(v)$, azaz u-t előbb érjük el, mint v-t, akkor a fehér út tétel miatt v leszármazottja lesz u-nak a MFE-ben, tehát $d(u) < d(v) < f(v) < f(u)$.
- Tegyük fel, hogy $d(u) > d(v)$, azaz v-t előbb érjük el, mint u-t. Mivel nincs $v \rightsquigarrow u$ út G-ben, ezért v-t befejezzük, mielőtt u-t elérnénk, tehát $f(v) < d(u) < f(u)$.

Elvi algoritmus

- A mélységi keresés algoritmusát hajtsuk végre a gráfra.
- Az egyes csúcsok elhagyásakor beszúrjuk őket egy láncolt lista elejére.

- A csúcsok láncolt listája adja meg a rendezési sorrendet.

Az algoritmus futási ideje megegyezik a mélységi keresésével, azaz $\theta(V+E)$. (Feltéve, hogy a ki iteráció lineáris időben megvalósítható.)

Erősen összefüggő komponensek

Definíció $u \sim v$ ha van $u \rightsquigarrow v$ út és $v \rightsquigarrow u$ út is a gráfban.

Lemma A $\sim$ reláció egy ekvivalencia reláció, így egy osztályozást definiál.

Definíció A $\sim$ reláció által definiált osztályozás osztályai a gráf erősen összefüggő komponensei. Azaz egy u pontot tartalmazó erősen összefüggő komponens: $C(u) = \{v \in V : u \sim v\}$.

Definíció A G = (V,E) gráf transzponáltja: $G^T = (V, E^T)$, ahol $E^T = \{(p,q) : (q,p) \in E\}$.

Definíció Egy G = (V,E) gráf komponensgráfjának hívjuk azt a gráfot, amelynek csúcsai az erősen összefüggő komponensek, és C komponensből akkor vezet él egy D komponensbe, ha C valamely pontjából G-ben vezet él D valamely pontjába.

Lemma A komponensgráf körmentes.

Példa EOK komponensek használatára

Feladat: Egy faluban minden emberre ismert azoknak a halmaza, akiknek továbbmondja az általa megismert pletykát. Határozzuk meg a falu legtitoktartóbb emberét, azaz olyan embert, akinek elmondva egy hírt a legkevesebb emberhez jut el a pletyka!

Megoldás: Definiáljunk egy irányított gráfot (a falu pletyka gráfját): a pontok az emberek A-ból megy él B-be, ha A elmondja B-nek a pletykát. A gráfban a feladat olyan pont keresése, amelybol a legkevesebb pontba vezet út.

A megoldást a következő (elvi) algoritmus szolgáltatja - határozzuk meg az erősen összefüggő komponensek komponensgráfját - vegyük azokat a komponenseket, amelyekből a komponensgráfban nem vezet ki él - a legkisebb elemszámú ilyen komponensből válasszunk ki egy pontot.

Másik példa

Feladat: Az előző faluban szeretnénk megnyerni a választásokat. Ehhez a politikai ellenfelekről rágalmakat akarunk elterjeszteni. Viszont a lehető legkevesebb emebernek akarjuk személyesen mi elmondnai ezeket. Így a cél egy minimális elemszámú halmazát találni az embereknek, akiktől mindenkihez eljut a pletyka.

Megoldás: Definiáljunk egy irányított gráfot (a falu pletyka gráfját): a pontok az emberek A-ból megy él B-be, ha A elmondja B-nek a pletykát. A gráfban a feladat olyan pont keresése, amelybol a legkevesebb pontba vezet út.

A megoldást a következő (elvi) algoritmus szolgáltatja - határozzuk meg az erősen összefüggő komponensek komponensgráfját - vegyük azokat a komponenseket, amelyekbe a komponensgráfban nem vezet él - minden ilyen komponensből válasszunk ki egy pontot.

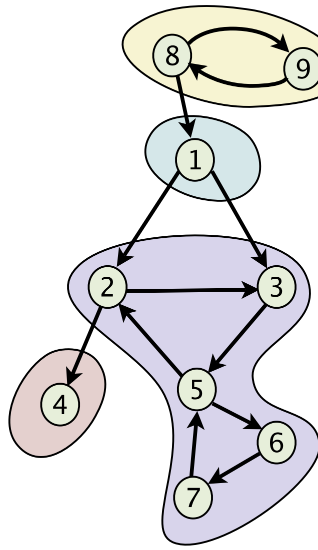
Elvi algoritmus

- 1. Számítsuk ki a MELYKERES algoritmussal az f(u) elhagyási értékeket.
- 2. A G^T transzponált gráfra alkalmazzuk a MELYKERES eljárást úgy, hogy a pontokra a MBEJÁR eljárást f szerint csökkenő sorrendben hívjuk.
- 3. A 2. pontban az egy mélységi feszítőfába kerülő pontok alkotnak egy erősen összefüggő komponenst.

Megvalósítás: A 2-es pontban nem rendezést hajtunk végre az f értékek szerint, hanem a pontokat a befejezésük időpontjában berakjuk egy verembe, és abból vesszük a pontokat a második bejárásnál.

Példa:

A transzponált gráfon a Mélykeres eljárásban a pontok sorrendje: $8,9,1,2,4,3,5,6,7$



3. ábra.

2. táblázat. Az első bejárás során kapott értékek

pont	1	2	3	4	5	6	7	8	9
apa	0	1	2	2	3	5	6	0	8
d	1	2	3	11	4	5	6	15	16
f	14	13	10	12	9	8	7	18	17

Komponensek: (8,9), (1), (2,5,3,7,6), (4)

Helyesség

Terjesszük ki a d és f függvényeket V részhalmazaira, $U \subseteq V$:

$d(U) = \min_{u \in U}\{d(u)\}$

$f(U) = \max_{u \in U}\{f(u)\}$

Lemma Legyen C és C' a G = (V,E) irányított gráf két különböző erősen összefüggő komponense. Továbbá, $u, v \in C$ és $u', v' \in C'$. Ha létezik $u \rightsquigarrow u'$ út, akkor nem létezhet $v' \rightsquigarrow v$ út.

Lemma Legyen C és C' a G = (V,E) irányított gráf két különböző erősen összefüggő komponense. Ha létezik olyan (u, v) él, hogy $u \in C$ és $v \in C'$, akkor $f(C) > f(C')$.

Bizonyítás. Ha $d(C) < d(C')$, akkor legyen $x \in C$, amelyre d(x) minimális, azaz az elsőnek elért pont C-ben. Ekkor bármely $w \in C'$ pontra a d(x) időben létezik csupa fehér pontokon át haladó $x \rightsquigarrow w$ út. Tehát a fehér út tétel miatt C és C' minden pontja leszármazottja lesz x-nek a MFE-ben, amiből adódik az állítás.

Ha $d(C) > d(C')$, akkor legyen $y \in C'$, amelyre d(y) minimális, azaz az elsőnek elért pont C'-ben. Ekkor belőle mindenki elérhető fehér pontokon C'-ben, így $f(y) = f(C')$. Mivel van (u, v) él, ezért nem lehet C' egyetlen pontjából sem eljutni C-beli pontba, így y-ból sem. Tehát $f(y)$ időben C minden pontja fehér, tehát $f(w) > f(y)$ minden $w \in C$.

Következmény Legyen C és C' a G=(V,E) irányított gráf két különböző erősen összefüggő komponense. Ha

3. táblázat. Az második bejárás során kapott értékek

pont	1	2	3	4	5	6	7	8	9
apa	0	0	5	0	2	7	5	0	8
d	5	7	9	17	8	12	11	1	2
f	6	16	10	18	15	13	14	4	3

létezik olyan $(u,v) \in G^T$ él, hogy $u \in C$ és $v \in C'$, akkor $f(C) < f(C')$.

Helyesség

Tétel Az algoritmus az erősen összefüggő komponenseket adja meg.

Bizonyítás Legyenek G erősen összefüggő komponensei $C(r_1),\dots,C(r_k)$, ahol $f(r_1) > f(r_2) > \dots > f(r_k)$ és $f(r_i) = f(C(r_i))$, i = 1,...,k.

Legyen továbbá $F(r_i)$, $(i = 1,\dots,k)$ a második bejárás során kapott r_i-gyökerű mélységi feszítőfa pontjainak halmaza. Ekkor $C(r_i) = F(r_i)$. A bizonyítást i-szerinti indukcióval adható meg. Tegyük fel, hogy az első i-1 komponensre az állítás igaz. Ekkor $C(r_i - 1)$ bejárása után egy $MBejar(r_i)$ hívás következik a transzponált gráfban. Mivel $f(r_i) = f(C(r_i))$, ezért a fehér út tétel miatt (G^T -ben alkalmazva a második bejárásra) $C(r_i)$ minden pontja bekerül $F(r_i)$-be. Másrészt a fenti következmény miatt minden él, amely $C(r_i)$-ből kivezet, csak olyan C' komponensbeli pontba vezethet, amelyre $f(C) > f(C(r_i))$, és ezeket már korábban bejárta az algoritmus.

Kiskérdések

- szélességi keresés algoritmusa
- szélességi keresés algoritmusának végrehajtása
- mélységi keresés algoritmusa
- a topologikus rendezés és az erősen összefüggő komponenskeresés elvi algoritmusai