Mélységi keresés

Ez az algoritmus a gráf pontjait járja be, eredményképpen egy mélységi feszítőerdőt ad vissza az Apa függvény által, és megadja az egyes pontok érkezési és elhagyási idejét is.

```
Melykeres(G)
 for(u in G)
    szin(u):=feher
    Apa(u):=0
 ido:=0
 for(u in G)
    if szin(u)=feher
      Then MBejar(u)

MBejar(u)
 szin(u):=szurke
 ido:=ido+1
 d(u):=ido
 for(v in Kiel(G,u))
    if szin(v)=feher
       Then apa(v):=u
            MBejar(v)
 szin(u):=fekete
 ido:=ido+1
 f(u):=ido
```

1. táblázat. A keresés során kapott értékek

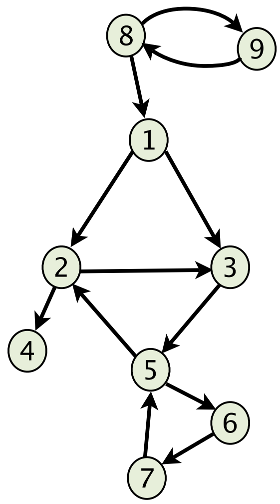
pont	1	2	3	4	5	6	7	8	9
apa	0	1	2	2	3	5	6	0	8
d	1	2	3	11	4	5	6	15	16
f	14	13	10	12	9	8	7	18	17

Az élek osztályozása

- Faélek: (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 7), (2, 4), (8, 9)
- Visszaélek: (5, 2), (7, 5), (9, 8)
- Előreélek: (1, 3)
- Keresztélek: (8, 1).

Az algoritmus egy mélységi feszítő erdőt (MFE) ad eredményül, a csúcshalmaz V az élek pedig $F = \{(p,q) : Apa(q) = p\}$.

Tétel (Zárójelezési tétel) Mélységi keresést alkalmazva a G = (V,E) gráfra, a következő három feltétel közül pontosan az egyik teljesül minden u és v pontra:



1. ábra.

- A $[d(u), f(u)]$ és $[d(v), f(v)]$ intervallumok diszjunktak és az u és v pontok egyike sem leszármazottja a másiknak a MFE-ben.

- $[d(v), f(v)] \subseteq [d(u), f(u)]$ és v leszármazottja u-nek a MFE-ben.

- $[d(u), f(u)] \subseteq [d(v), f(v)]$ és u leszármazottja v-nek a MFE-ben.

Bizonyítás. Legyen d(u) < d(v).

- Ha $d(v) < f(u)$, akkor v elérésekor u színe szürke volt, tehát v leszármazottja MFE-ben u-nak. Továbbá, v-t előbb elhagyjuk, mielőtt visszatérnénk u-hoz, tehát $f(v) < f(u)$.

- Ha $d(v) > f(u)$, akkor $d(u) < f(u) < d(v) < f(v)$, tehát a két intervallum diszjunkt. Ebből következik, hogy mind u, mind v elérésekor a másik nem lehetett szürke, tehát nem leszármazottjai egymásnak MFE-ben.

Következmény. A v pont akkor és csak akkor leszármazottja az u pontnak MFE-ben, ha $d(u) < d(v) < f(v) < f(u)$

Tétel (Fehér út tétel) Minden v pont akkor és csak akkor leszármazottja az u pontnak MFE-ben, ha a d(u) időben (u elérésekor) van csupa fehér pontokon át haladó $u \rightsquigarrow v$ út G-ben.

Bizonyítás

- Tegyük fel, hogy van $u \rightsquigarrow v$ az MFE-ben. Ekkor ennek tetszőleges w pontjára $d(u) < d(w)$, tehát w fehér a d(u) időben.

- Tegyük fel, hogy van olyan $u = v_1 \dots v_k = v$ út, hogy minden v_i fehér a d(u) időben, de v nem lesz leszármazottja u-nak MFE-ben. Feltehetjük, hogy $\forall i < k$-ra v_i leszármazottja lesz u-nak az MFE-ben. Mivel v_{k-1} leszármazottja u-nak, ezért $f(v_{k-1}) < f(u)$. De $d(u) < d(v) < f(v_{k-1})$, így $d(u) < d(v) < f(v_{k-1}) < f(u)$, tehát v leszármazottja u-nak MFE-ben.

Élek osztályozása

- Faél: $(u,v) \in E$ faél, ha bekerül a MFE élei közé, azaz $Apa(v) = u$.
- Visszaél: $(u,v) \in E$ visszaél, ha u leszármazottja v-nek a MFE-ben.
- Előreél: $(u,v) \in E$ előre-él, ha v leszármazottja u-nek a MFE-ben és nem faél.
- Keresztél: Minden más esetben $(u,v) \in E$ keresztél.

Tulajdonságok

- $(u,v) \in E$ akkor és csak akkor faél, ha az (u,v) él vizsgálatakor v színe fehér.
- $(u,v) \in E$ akkor és csak akkor visszaél ha az (u,v) él vizsgálatakor v színe szürke.
- $(u,v) \in E$ akkor és csak akkor előre-él ha az (u,v) él vizsgálatakor v színe fekete és $d(u) < d(v)$.
- $(u,v) \in E$ akkor és csak akkor keresztél ha az (u,v) él vizsgálatakor v színe fekete és $d(u) > d(v)$.

Tétel Ha G irányítatlan gráf, akkor bármely mélységi keresésre minden éle vagy fa-él, vagy vissza-él.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $(u,v) \in E$ és $d(u) < d(v)$. Mivel $v \in Ki(G,u)$, ezért valamikor végrehajtódik az (u,v) él vizsgálata, és ekkor Szin(u)=Szurke. Milyen lehet v színe?

- Szin(v) = Feher : Ekkor (u,v) faél lesz.
- Szin(v) = Szurke : Ekkor (u,v) visszaél lesz.
- Szin(v) = Fekete : Nem lehet, mert ez azt jelentené, hogy $f(v) < d(u)$.

Topologikus rendezés

Definíció Egy G =(V,E) irányított gráf topologikus rendezésén a V pontjainak egy olyan $v_1, v_2, \dots, v_n$ $(n = |V|)$ felsorolását értjük, amelyre teljesül, hogy minden $(u,v) \in E$ élre, u előbb van a felsorolásban, mint v.

Lemma A G = (V,E) irányított gráfnak akkor és csak akkor van topologikus rendezése, ha G körmentes.

Lemma A G = (V,E) irányított gráfban akkor és csak akkor van kör, ha van vissza-éle.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van egy (u,v) visszaél. Ekkor hozzávéve az (u,v) visszaélt az MFE-ben levő $v \rightsquigarrow u$ úthoz, egy kört kapunk G-ben.

Tegyük fel, hogy $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k = v_1$ egy kör, továbbá a kör pontjai közül v_1-et érjük el először a mélységi bejárás során. Ekkor a $d(v_1)$ időben van csupa fehér pontokon át haladó $v_1 \rightsquigarrow v_k$ út. A fehér út tétel miatt v_k leszármazottja lesz a v_1-nek a MFE-ben, tehát (v_k, v_1) visszaél lesz.

Tétel Ha a G irányított gráf körmentes, akkor pontjainak minden olyan $v_1, \dots, v_n$ felsorolása, amelyre $f(v_i) > f(v_{i+1})$, $i = 1, \dots, n-1$ G egy topologikus rendezése lesz bármely mélységi bejárással kiszámított f elhagyási függvényre.

Bizonyítás Legyen $(u,v) \in E$ tetszőleges él.

- Ha $d(u) < d(v)$, azaz u-t előbb érjük el, mint v-t, akkor a fehér út tétel miatt v leszármazottja lesz u-nak a MFE-ben, tehát $d(u) < d(v) < f(v) < f(u)$.
- Tegyük fel, hogy $d(u) > d(v)$, azaz v-t előbb érjük el, mint u-t. Mivel nincs $v \rightsquigarrow u$ út G-ben, ezért v-t befejezzük, mielőtt u-t elérnénk, tehát $f(v) < d(u) < f(u)$.

Elvi algoritmus

- A mélységi keresés algoritmusát hajtsuk végre a gráfra.
- Az egyes csúcsok elhagyásakor beszúrjuk őket egy láncolt lista elejére.
- A csúcsok láncolt listája adja meg a rendezési sorrendet.

Az algoritmus futási ideje megegyezik a mélységi keresésével, azaz $\theta(V+E)$. (Feltéve, hogy a ki iteráció lineáris időben megvalósítható.)

Erősen összefüggő komponensek

Definíció $u \sim v$ ha van $u \rightsquigarrow v$ út és $v \rightsquigarrow u$ út is a gráfban.

Lemma A $\sim$ reláció egy ekvivalencia reláció, így egy osztályozást definiál.

Definíció A $\sim$ reláció által definiált osztályozás osztályai a gráf erősen összefüggő komponensei. Azaz egy u pontot tartalmazó erősen összefüggő komponens: $C(u) = \{v \in V : u \sim v\}$.

Definíció A G = (V,E) gráf transzponáltja: $G^T = (V, E^T)$, ahol $E^T = \{(p,q) : (q,p) \in E\}$.

Elvi algoritmus

- 1. Számítsuk ki a MELYKERES algoritmussal az f(u) elhagyási értékeket.
- 2. A G^T transzponált gráfra alkalmazzuk a MELYKERES eljárást úgy, hogy a pontokra a MBEJÁR eljárást f szerint csökkenő sorrendben hívjuk.
- 3. A 2. pontban az egy mélységi feszítőfába kerülő pontok alkotnak egy erősen összefüggő komponenst.

Megvalósítás: A 2-es pontban nem rendezést hajtunk végre az f értékek szerint, hanem a pontokat a befejezésük időpontjában berakjuk egy verembe, és abból vesszük a pontokat a második bejárásnál.

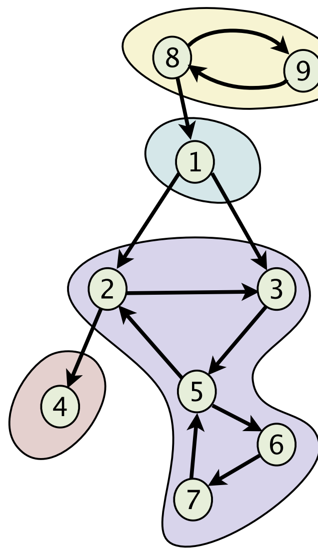
Példa:

2. táblázat. Az első bejárás során kapott értékek

pont	1	2	3	4	5	6	7	8	9
apa	0	1	2	2	3	5	6	0	8
d	1	2	3	11	4	5	6	15	16
f	14	13	10	12	9	8	7	18	17

3. táblázat. Az második bejárás során kapott értékek

pont	1	2	3	4	5	6	7	8	9
apa	0	0	5	0	2	7	5	0	8
d	5	7	9	17	8	12	11	1	2
f	6	16	10	18	15	13	14	4	3



2. ábra.

Komponensek: (8,9), (1), (2,5,3,7,6), (4)

Helyesség

Terjesszük ki a d és f függvényeket V részhalmazaira, $U \subseteq V$:

$d(U) = \min_{u \in U}\{d(u)\}$

$f(U) = \max_{u \in U}\{f(u)\}$

Lemma Legyen C és C' a G = (V,E) irányított gráf két különböző erősen összefüggő komponense. Továbbá, $u, v \in C$ és $u', v' \in C'$. Ha létezik $u \rightsquigarrow u'$ út, akkor nem létezhet $v' \rightsquigarrow v$ út.

Lemma Legyen C és C' a G = (V,E) irányított gráf két különböző erősen összefüggő komponense. Ha létezik olyan (u, v) él, hogy $u \in C$ és $v \in C'$, akkor $f(C) > f(C')$.

Bizonyítás. Ha $d(C) < d(C')$, akkor legyen $x \in C$, amelyre d(x) minimális, azaz az elsőnek elért pont C-ben. Ekkor bármely $w \in C'$ pontra a d(x) időben létezik csupa fehér pontokon át haladó $x \rightsquigarrow w$ út. Tehát a fehér út tétel miatt C és C' minden pontja leszármazottja lesz x-nek a MFE-ben, amiből adódik az állítás.

Ha $d(C) > d(C')$, akkor legyen $y \in C'$, amelyre d(y) minimális, azaz az elsőnek elért pont C'-ben. Ekkor belőle mindenki elérhető fehér pontokon C'-ben, így $f(y) = f(C')$. Mivel van (u, v) él, ezért nem lehet C' egyetlen pontjából sem eljutni C-beli pontba, így y-ból sem. Tehát $f(y)$ időben C minden pontja fehér, tehát $f(w) > f(y)$ minden $w \in C$.

Következmény Legyen C és C' a G=(V,E) irányított gráf két különböző erősen összefüggő komponense. Ha létezik olyan $(u, v) \in G^T$ él, hogy $u \in C$ és $v \in C'$, akkor $f(C) < f(C')$.

Helyesség

Tétel Az algoritmus az erősen összefüggő komponenseket adja meg.

Bizonyítás Legyenek G erősen összefüggő komponensei $C(r_1), \ldots, C(r_k)$, ahol $f(r_1) > f(r_2) > \cdots > f(r_k)$ és $f(r_i) = f(C(r_i))$, i = 1,...,k.

Legyen továbbá $F(r_i)$, $(i = 1, \ldots, k)$ a második bejárás során kapott r_i-gyökerű mélységi feszítőfa pontjainak halmaza. Ekkor $C(r_i) = F(r_i)$. A bizonyítást i-szerinti indukcióval adható meg. Tegyük fel, hogy az első i-1 komponensre az állítás igaz. Ekkor $C(r_i - 1)$ bejárása után egy $MBejar(r_i)$ hívás következik a transzponált gráfban. Mivel $f(r_i) = f(C(r_i))$, ezért a fehér út tétel miatt (G^T -ben alkalmazva a második bejárásra) $C(r_i)$ minden pontja bekerül $F(r_i)$-be. Másrészt a fenti következmény miatt minden él, amely $C(r_i)$-ből kivezet, csak olyan C' komponensbeli pontba vezethet, amelyre $f(C) > f(C(r_i))$, és ezeket már korábban bejárta az algoritmus.

Kiskérdések

- mélységi keresés
- mélységi keresés végrehajtása
- topologikus rendezés és erősen összefüggő komponenskeresés elvi algoritmusai
- erősen összefüggő komponensek megkeresésének végrehajtása, két mélységi kereséssel

Szorgalmi

Erdős szám kiszámítása. Erdős Pál matematikus tuszteletére definálták az Erdős szám fogalmát. Erdős Pál Erdős száma 0, azoknak a matematikusoknak, akiknek van közös cikkük Erdőssel az Erdős számúk 1. Azoknak, akiknek nincs közös cikkük Erdős Pállal, de van közös cikkük olyan matematikussal, akinek az Erdős száma 1, az Erdős száma 2. Általában egy matematikus Erdős száma a társszerzői Erdős számának minimuma +1. Adjunk algoritmust, amely a cikkek adatbázisa alapján (feltételezhetjük, hogy adott egy TÁRS algoritmus, ami minden matematikusra visszaadja a társszerzői halmazát) meghatározza egy adott személy Erdős számát. A futási idő lineáris kell legyen $R+n$-ben, ahol n az adatbázisban a matematikusok száma R pedig a $t(i)$ értékek összege, ahol $t(i)$ az i személy társsszerzőinek száma.

Beküldés: cimreh@inf.u-szeged.hu,
Pszeudókód +magyarázat + futási idő elemzés

- első négy megoldó 8-8 pont
- a második négy megoldó 4-4 pont

A szerzett plusszpontok a vizsga minimumkövetelményébe nem számítanak bele.