1. Gyakorlat

P1. Vegyük az $1|d_j|\sum L_j$ és $1|d_j|\sum T_j$ modelleket. (Egy gép van a cél a késési illetve a csúszási idők összegének minimalizálása.) A munkák (p_j, d_j) paraméterekkel megadva $p_1 = (4, 15)$, $p_2 = (6, 8)$ $p_3 = (5, 11)$. Adjuk meg az optimális megoldásokat.

Megold: A függvények regulárisak, ezért csak olyan megoldások érdekesek, ahol nincs üres idő, azaz csak a sorrendet kell meghatározni. Ha a sorrend p_1, p_2, p_3, akkor a befejezési idők $4, 10, 15$ és így az L_j értékek $-11, 2, 4$, azaz a célfüggvény -5. Végigszámolva a lehetséges eseteket adódik, hogy az optimális sorrend p_1, p_3, p_2, ahol a $\sum L_j$ érték -6. A $\sum T_j$ esetben az optimális a p_2, p_3, p_1, ahol a célfüggvény 0.

P2. Adjuk meg milyen kapcsolat van a $\sum L_j$ és $\sum C_j$ függvények között!

Megold: Mivel $L_j = C_j - d_j$, ezért $\sum L_j = \sum C_j - \sum d_j$. Viszont $\sum d_j$ az konstans, így a két célfüggvény egy konstansban tér el, azaz ugyanott veszik fel a minimumot.

P3. Vegyük a $Q2||C_{max}$ modellt. (Két különböző gép van a cél a makespan minimalizálása.) A munkák a végrehajtási vektorral vannak megadva $p_1 = (1, 2)$, $p_2 = (1, 2)$ $p_3 = (1, 2)$. Adjuk meg az optimális megoldást.

Megold: A lehetséges eseteket végignézve látszik, hogy az optimális megoldásban két munka az első gépen egy munka a másodikon van, és a makespan 2.

P4. Vegyük az $P2|r_j|C_{max}$ és $P2|r_j|F_{max}$ modelleket. (Két azonos gép van, a munkáknak van érkezési ideje és a cél a makespan illetve a maximális folyási idő minimalizálása.) A munkák (p_j, r_j) paraméterekkel megadva $p_1 = (4, 0)$, $p_2 = (4, 0)$ $p_3 = (5, 2)$. Adjuk meg az optimális megoldásokat.

Megold: A lehetséges eseteket végignézve látszik, hogy az első modell optimális megoldásában p_1 és p_2 van az egyik gépen a $(0, 4)$ és $(4, 8)$ időintervallumokban és p_3 a másodikon a $(2, 7)$ időintervallumban, és a makespan 8.

A második modellben nem ez az optimális megoldás. Ott p_1 és p_2 két külön gépen van a $(0, 4)$ időintervallumban és p_3 valamely gépen a $(4, 9)$ időintervallumban, és a maximális folyási idő 7.

F1. Vegyük $Pn|prmp|C_{max}$ problémát. Igazoljuk, hogy az optimális ütemezés költsége $\max\{\max_{j\in J} p_j, \sum_{j\in J} p_j/n\}$.

Megold: Mivel a megszakítások mellett sem engedett meg egymást átfedő időintervallumokat rendelni a munkákhoz ezért a költség legalább $\max_{j\in J} p_j$. Másrészt minden munkát ütemezni kell, és a gépekre a maximális befejezési idők összege a teljes végrehajtási idő, így azt kapjuk, hogy $\sum_{j\in J} p_j \leq nC_{max}$, amivel igazoltuk, hogy az optimális megoldás költsége legalább a feladatban megadott érték.

Legyen $M = \max\{\max_{j\in J} p_j, \sum_{j\in J} p_j/n\}$. Ütemezzük a munkákat a következőképpen. Kezdjük el az ütemezést az első gépen a 0 időpontnál. Legyen ez az aktuális gép. Utána minden munkára azt a szeletet, ami még elfér az aktuális gépen az M befejezési idő előtt rakjuk az aktuális gépre. Ha egy gépen elértük az M értéket legyen az aktuális gép a következő (akkor még üres gép) az aktuális munka hátralevő részét rakjuk az új aktuális gép aljára a 0 időponttól, majd térjünk rá a következő munkára. A fenti ütemezés nem lépi túl az M maximális befejezési időt, az ütemezés korrektségét a következő két észrevétel igazolja. Nem fedik át egymást ugyanannak a munkának különböző részei, mivel ha egy munkát szétvágtunk, akkor az első része egy gép végén lett ütemezve a második része a következő gép elején, és M nem kisebb, mint a munka végrehajtási ideje. Továbbá elfér az összes munka a gépeken a fenti ütemezésben, mivel amíg van munka, addig minden gépet M magasságig töltünk és nM nem kisebb a végrehajtási idők összegénél.

F2. Adott egy üzem, amely n féle különböző terméket gyárt. Az egyes termékféleségek gyártása időben elkülönül egymástól, és a termékváltásnál a gépeket át kell állítani. Ismeretes tetszőleges termékpárra a gépek átállításának a költsége. Határozzuk meg a termékek termelésének egy olyan sorrendjét, amely mellett a gépek átállításának teljes költsége minimális. Írjuk fel az ütemezési problémát egészértékű programozási feladatként!

Megold: Legyen $x_{ij} = 1$, ha i után j-t hajtjuk végre, egyébként 0. Ekkor a következő modellt írhatjuk fel.

$$\sum_{t=1}^{n} x_{it} = 1 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_{tj} = 1 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{i\in Q} \sum_{j\in \bar{Q}} x_{ij} \geq 1 \quad (\emptyset \neq Q \subset \{1, \ldots, n\})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = z \to \min$$

Az első feltételcsoport garantálja, hogy minden munka után végrehajtunk valamit. A második feltételcsoport biztosítja, hogy minden munkát végrehajtunk. Sajnálatos módon a két feltételcsoport megengedi diszjunkt körök kialakulását a sorrendben. Ezt küszöböli ki a harmadik feltételcsoport, amelyben előírjuk, hogy tetszőleges $\emptyset \neq Q \subset \{1, \ldots, n\}$ munkahalmazra valamely munka után, a halmazon kívüli munkát hajtunk végre.

Megjegyzés: A feladat ekvivalens az utazó ügynök problémával.