3. Gyakorlat

F1. Vegyük azt az ütemezési problémát, ahol egy gép van, a munkák mindegyikének 1 a végrehajtási ideje, minden munkának van egy d_j egész határideje, és minden munkának van egy h_j haszna, amit akkor kapunk meg, ha a munkát határidőre elvégezzük. Tekintsük a következő algoritmust. Az eljárás a haszon szerint csökkenő sorrendben állítja a munkákat, majd sorra megpróbálja ütemezni őket, a legkésőbbi szabad időpontra a határidő előtt. Ha nincs ilyen egységnyi hely, a munkát visszautasítja. Igazoljuk, hogy optimális megoldást ad.

Megold: Az eljárást optimalitását a kicserélési módszerrel igazoljuk. Tegyük fel, hogy az algoritmus valamilyen inputra nem ad optimális megoldást. Legyen S egy optimális ütemezés, amelynek a leghosszabb közös végszelete van az algoritmus által adott ütemezéssel. Jelölje azt az elemet, amelyet S ütemez a közös szelet előtt k, amelyet az algoritmus p. Ilyen elem van, mert az algoritmus nem adott optimális megoldást. Két esetet különböztetünk meg.

- Ha S-ben valahol ütemezzük k előtt p-t, akkor a két munkát felcserélve egy legális ütemezést kapunk, mindkettő kész lesz határidőre, és a nyereség nem változik, így kapunk egy hosszabb közös végszelettel rendelkező optimális ütemezést, ami ellentmondás.

- Ha S-ben nem ütemezzük p-t, akkor vegyük azt az S' ütemezést, ami annyiban különbözik S-től, hogy k helyet p-t ütemezi. Mivel p kész lesz határidőre, ezért ez egy legális ütemezés. Másrészt p haszna maximális volt a még ütemezetlen munkák között, így $h_p \geq h_k$, azaz a megoldás haszna nem kisebb, mint S haszna, így ismét kaptunk egy hosszabb közös végszelettel rendelkező optimális megoldást, ami ellentmondás.

P1. Oldjuk meg az előre építő dinamikus programozási algoritmussal a következő $1||\sum h_j(C_j)$ problémát. Legyen $h_1(x) = x^2, h_2(x) = 5, h_3(x) = 3x$ Továbbá legyenek a munkák a végrehajtási időkkel megadva $j_1 = 3$, $j_2 = 5$, $j_3 = 4$.

Megold: Legyen $H(V)$ a V halmaz minimális költsége, ha a munkákat az ütemezés elejére ütemezzük. Ekkor $H(\{j_1\}) = 9$, $H(\{j_2\}) = 5$, $H(\{j_3\}) = 12$. Most számoljuk ki a költséget a kételemű halmazokra.

A $H(\{j_1, j_2\})$ érték meghatározásához két esetet kell vizsgálni. Ha j_2 van legfelül, akkor a felső munkából adódó költség $h_2(3 + 5) = 5$, az alsó munkából a költség $H(\{j_1\} = 9$, így ebben az esetben a költség 14. Ha j_1 van legfelül, akkor a felső munkából adódó költség $h_1(3+5) = 64$, az alsó munkából a költség $H(\{j_2\} = 5$, így ebben az esetben a költség 69. A jobbik eset, ha j_2 van felül, és ebben az esetben a költség 14, így $H(\{j_1, j_2\}) = 14$ és $F(\{j_1, j_2\}) = j_2$ a megoldás visszakereséséhez.

A $H(\{j_1, j_3\})$ érték meghatározásához két esetet kell vizsgálni. Ha j_3 van legfelül, akkor a felső munkából adódó költség $h_3(3+4) = 21$, az alsó munkából a költség $H(\{j_1\} = 9$, így ebben az esetben a költség 30. Ha j_1 van legfelül, akkor a felső munkából adódó költség $h_1(3+4) = 49$, az alsó munkából a költség $H(\{j_3\} = 12$, így ebben az esetben a költség 61. A jobbik eset, ha j_3 van felül, és ebben az esetben a költség 30, így $H(\{j_1, j_3\}) = 30$ és $F(\{j_1, j_3\}) = j_3$ a megoldás visszakereséséhez.

A $H(\{j_2, j_3\})$ érték meghatározásához két esetet kell vizsgálni. Ha j_2 van legfelül, akkor a felső munkából adódó költség $h_2(4+5) = 5$, az alsó munkából a költség $H(\{j_3\} = 12$, így ebben az esetben a költség 17. Ha j_3 van legfelül, akkor a felső munkából adódó költség $h_3(4+5) = 27$, az alsó munkából a költség $H(\{j_2\} = 5$, így ebben az esetben a költség 32. A jobbik eset, ha j_2 van felül, és ebben az esetben a költség 17, így $H(\{j_2, j_3\}) = 17$ és $F(\{j_2, j_3\}) = j_2$ a megoldás visszakereséséhez.

A $H(\{j_1, j_2, j_3\})$ érték meghatározásához három esetet kell vizsgálni. Ha j_2 van legfelül, akkor a felső munkából adódó költség $h_2(3+4+5) = 5$, az alsó munkákból a költség $H(\{j_1, j_3\} = 30$, így ebben az esetben a költség 35. Ha j_1 van legfelül, akkor a felső munkából adódó költség $h_1(3+4+5) = 144$, az alsó munkákból a költség $H(\{j_2, j_3\} = 17$, így ebben az esetben a költség 161. Ha j_3 van legfelül, akkor a felső munkából adódó költség $h_3(3+4+5) = 36$, az alsó munkákból a költség $H(\{j_1, j_2\} = 14$, így ebben az esetben a költség 50. A legjobb eset, ha j_2 van felül, és ebben az esetben a költség 35, így $H(\{j_1, j_2, j_3\}) = 35$ és $F(\{j_1, j_2, j_3\}) = j_2$ a megoldás visszakereséséhez.

Tehát az optimális költség 35. Az optimális ütemezés végén $F(\{j_1, j_2, j_3\}) = j_2$ van, előtte $F(\{j_1, j_3\}) = j_3$ és legelől j_1.

P2. Oldjuk meg az hátra építő dinamikus programozási algoritmussal a következő $1||\sum h_j(C_j)$ problémát. Legyen $h_1(x) = x^2, h_2(x) = 5, h_3(x) = 3x$ Továbbá legyenek a munkák a végrehajtási időkkel megadva $j_1 = 3$, $j_2 = 5$, $j_3 = 4$.

Megold Legyen $H(V)$ a V halmaz minimális költsége, ha a munkákat az ütemezés végére ütemezzük. Ekkor $H(\{j_1\}) = h_1(3+5+4) = 144$, $H(\{j_2\}) = h_2(3+5+4) = 5$, $H(\{j_3\}) = h_3(3+5+4) = 36$. Most számoljuk ki a költséget a kételemű halmazokra.

A $H(\{j_1, j_2\})$ érték meghatározásához két esetet kell vizsgálni. Ha j_2 van legalul, akkor az alsó munkából adódó költség $h_2(4+5) = 5$, az felső munkából a költség $H(\{j_1\} = 144$, így ebben az esetben a költség 149. Ha j_1 van legalul, akkor az alsó munkából adódó költség $h_1(4+3) = 49$, a felső munkából a költség $H(\{j_2\} = 5$, így ebben az esetben a költség 54. A jobbik eset, ha j_1 van alul, és ebben az esetben a költség 54, így $H(\{j_1, j_2\}) = 54$ és $A(\{j_1, j_2\}) = j_1$ a megoldás visszakereséséhez.

A $H(\{j_1, j_3\})$ érték meghatározásához két esetet kell vizsgálni. Ha j_3 van legalul, akkor ay alsó munkából adódó költség $h_3(5+4) = 27$, a felső munkából a költség $H(\{j_1\} = 144$, így ebben az esetben a költség 171. Ha j_1 van legalul, akkor ay alsó munkából adódó költség $h_1(5+3) = 64$, a felső munkából a költség $H(\{j_3\} = 36$, így ebben az esetben a költség 100. A jobbik eset, ha j_1 van alul, és ebben az esetben a költség 100, így $H(\{j_1, j_3\}) = 100$ és $A(\{j_1, j_3\}) = j_1$ a megoldás visszakereséséhez.

A $H(\{j_2, j_3\})$ érték meghatározásához két esetet kell vizsgálni. Ha j_2 van legalul, akkor az alsó munkából adódó költség $h_2(3+5) = 5$, a felső munkából a költség $H(\{j_3\} = 36$, így ebben az esetben a költség 41. Ha j_3 van legalul, akkor az alsó munkából adódó költség $h_3(3+4) = 21$, a felső munkából a költség $H(\{j_2\} = 5$, így ebben az esetben a költség 26. A jobbik eset, ha j_3 van alul, és ebben az esetben a költség 26, így $H(\{j_2, j_3\}) = 26$ és $A(\{j_2, j_3\}) = j_3$ a megoldás visszakereséséhez.

A $H(\{j_1, j_2, j_3\})$ érték meghatározásához három esetet kell vizsgálni. Ha j_2 van legalul, akkor az alsó munkából adódó költség $h_2(5) = 5$, a felső munkákból a költség $H(\{j_1, j_3\} = 100$, így ebben az esetben a költség 105. Ha j_1 van legalul, akkor az alsó munkából adódó költség $h_1(3) = 9$, a felső munkákból a költség $H(\{j_2, j_3\} = 26$, így ebben az esetben a költség 35. Ha j_3 van legalul, akkor az alsó munkából adódó költség $h_3(4) = 12$, a felső munkákból a költség $H(\{j_1, j_2\} = 54$, így ebben az esetben a költség 66. A legjobb eset, ha j_1 van alul, és ebben az esetben a költség 35, így $H(\{j_1, j_2, j_3\}) = 35$ és $A(\{j_1, j_2, j_3\}) = j_1$ a megoldás visszakereséséhez.

Tehát az optimális költség 35. Az optimális ütemezés elején $A(\{j_1, j_2, j_3\}) = j_1$ van, előtte $A(\{j_2, j_3\}) = j_3$ és legfelül j_2.